

Introduzione al corso → utilizz', richiam alla nuova norme, utilizzo di software con elementi probabilistici, gestione dei rischi e scelte politiche lefate, problems della sostenibilità

Concetti iniziali

1) Sicurezza: 2 aspetti

è un parametro soggettivo, non esiste misura qualitativa, non esiste (2 sicurezze in termini assoluti)

Quanto sicuro è abbastanza sicuro ??? Lo vedremo dopo

è fondamentalmente collegata all'ambiente antropico (lavoratori in fase di costruzione, gli stenti, le persone nella vicinanza)

esemplificando il problema di sicurezza risponde alle domande
"C'è un effetto diretto sulla persona se un certo evento avviene?"

Collasso di una torre in muratura su di una collina sparsa non è problema di sicurezza

2) Affidabilità: è la probabilità che un oggetto, una struttura garantisca le prestazioni di progetto (quindi per definite condizioni di lavoro) per un tempo prestabilito
(Esempio delle macchinette del caffè)

dunque è una quantità misurabile

$$T = 1 - \left(\frac{P_f}{P_p} \right) \xrightarrow{\text{probabilità di collasso}}$$

Dobbiamo fare i conti con le probabilità! (1)

Definizione di probabilità

→ Classica (Laplace) : Numero di casi favorevoli diviso il numero di casi totali (dado, estrazione lotto)

→ Frequentista (von Mises) : è il limite della frequenza con cui avviene l'evento per infinite ripetizioni di esperimenti sotto le stesse condizioni (applicazione limitata all'uso dei computer, calcolo di un'area ...)

→ Soggettiva (Bayes) : è il grado di fiducia che un individuo razionale avrà al verificarsi di un certo evento (quote scommesse)

In finire quando ci si riferisce alle probabilità con un certo orizzonte temporale si parla di frequenze ... spesso i due concetti si confondono quando le frequenze sono piccole
Il problema di affidabilità strutturale ricade ricorrente nell'ambito delle probabilità soggettive. → tuttavia è possibile la definizione di queste per esse.

3) Rischio : È una tecnica che si utilizza per definire una quantitativa misura degli effetti di un evento pericoloso

È basato su 2 elementi

- probabilità di un evento dannoso da una funzione identificante l'avvenuta (h_f)
- la media del danno atteso supposta certa l'occorrenza di quell'evento (D/h_f)

$$(R = E(D/h_f) \cdot p(h_f))$$

l'unità di misura del rischio è quella delle quantità che descrive il danno

→ in quali casi il valore numerico associato al rischio risulta più sensibile alle stime dei 2 fattori ???

Quando si ha a che fare con esenti risimi assenti danno effetto enorme ($\infty \cdot 0$) ... il caso tipico è quello del rischio associato alla costruzione di una centrale nucleare. (spesso la scelta viene presa solo sul danno...)

Torniamo alla domanda iniziale

Quando sicuro è sicuro abbastanza?

Questa domanda ha richiesto altre prelazioni

- 1) Cosa può succedere, in che misura e quanto speso?
(conoscenza completa delle fonti di pericolosità)
- 2) Cosa accettiamo che possa accadere, quanto speso e dove?
(processo decisionale \rightarrow alto livello)

↓
fonti di pericolosità
chimiche, ma anche
quelle fisicamente
che hanno effetti differenti (sostenibilità)
o perché gli eventi sono molto rari.

se la risposta è
negativa, cercare
il migliore intervento
possibile

Approccio al problema di progetto ottimo

Il rischio dovrebbe essere parte integrante di un procedura di progetto ottimo che tenda a minimizzare i costi.

$$C = (C_p + C_E + C_R + C_f \cdot E(D)) \rightarrow$$

costo di progetto costo di esecuzione costo di manutenzione costo legato al rischio

non avendo l'evento pericoloso unico questa dovrebbe essere una sostenibile o un'interessante di convoluzioni.

Chiaro che tutti i parametri sono implicitamente legati alle probabilità di colpo, per cui si potrebbe ricercare il livello di efficienza ottima

p_{fo}

(2)

Facile a dire, difficilissimo a farci per 2 motivi

- { 1) i valori di p_f sono molto piccoli e piuttosto sensibili alla modellazione e ai metodi di auxiliari dell'affidabilità
- 2) p_f è influenzato più di ogni altra cosa dagli errori umani → come li modelliamo?

Ma allora di che parliamo? Il grado di affidabilità è un numero al tatto a che ci serve? → standardizzazione delle ipotesi e dei metodi, interpretazione dei risultati in sia comprensibili.

Causa di colpo nell'infusione strutturale

Studio di Matousek che ha analizzato 800 ca di strutture danneggiate alla ricerca delle cause

Inoltre Matousek ha enfatizzato che gli errori potevano essere evitati:

32% operazione dei documenti da parte delle persone successive nella linea di processo

55% mediante prove addizionali.

	N	D	C	- incidenti:
Rischio accettato	25	10	15	
Errori umani	75	90	85	
Elementi causa di danno				
• Installazione e scavo	12	4	13	
• Ponteggi e strutt. provis.	9	11	22	
• Strutture	44	72	48	
L'errore umano è:				
• Progetto	37	40	20	
• Esecuzione	35	20	46	
• Entrambi	18	22	20	
Se l'errore umano è nel progetto:				
• Concettuale	34	18	15	
• Analisi strutturale	34	49	40	
• Disegni	19	9	8	
• Preparazione esecuzione	9	5	20	

Concetto di rischio residuale

Legato all'impossibilità di poter prevedere tutta le fonti di pericolosità, e agli inevitabili errori nelle stime delle pericolosità note. (errori umani)

Ci dobbiamo convivere e tentare di limitarlo

Il caso neve

Possibili rischi residuali:

Tendenza nel
tempo all'aumento dei
valori?

→ non riconoscere la possibilità di un effetto neve

- i valori di normativa non rappresentano la max nevicata possibile

Riconoscimento delle fonti di pericolosità:

E' l'opera principale da compiere, l'efficacia dei mezzi di intervento è elevata a fatto che il problema si conosca, è un esercizio di immaginazione e creatività

Alcuni riferimenti per l'identificazione possono essere:

- Step by step the process (what, where, when)
- Analisi dell'utilizzo dell'opera
- - Analisi delle variabili che influenzano il problema di progetto, cercando le fonti di hazard legate ad ognuna di loro
- Analisi delle energie coinvolte: fissità, pressione, chimica, termica, elettrica, elettromagnetica (l'energia è spesso fonte di pericolosità)
- Analisi dei materiali.

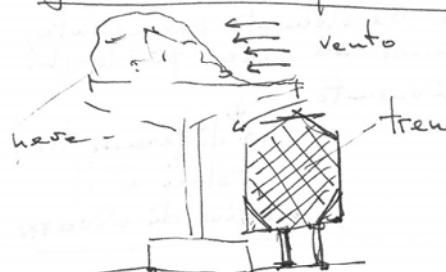
Può essere anche utile ricorrere con tecniche quali

- 1) schema ad albero (albero degli incidenti, albero degli eventi, carte di corrispondenza causa-effetto)
- 2) Analisi delle interazioni: farendre sulle situazioni in cui c'è una interazione di competenze e di compiti. → errori umani

Il metodo del "morphological thinking" → la ricerca di tutte le possibili combinazioni tra gli elementi del problema senza alcun pregiudizio

Altre tecniche: brainstorming, esperimenti, letteratura esistente.

Gli scenari di pericolosità



crolllo del tetto della stazione

di Eindhoven 1970

Il codice non prescrive una superficie superiore esposta al vento per causa della neve, inoltre c'era anche un treno in posizione riservata

Approccio matriciale, in cui individuare una causa principale e tutte le possibili combinazioni (libro Salsadoni).

(3)

Anche l'imperibile è probabile → Big Bang sulla 45^a strada
 (Mario Salasdon).

Abbiamo capito finora che il problema che dobbiamo affrontare è di natura puramente probabilistica, mentre noi siamo abituati a lavorare con modelli deterministici.

In realtà si può vedere l'ultimo come caso particolare del primo, in una situazione del tipo  per le sismiche utilizzate e del tipo $(0,1)$ sulla risposta che è invece in % per modelli probabilistici. (mai sentito parlare di fuzzy?)

ma nasce la necessità di un trade-off fra realismo del modello e l'operatività!

Il problema della sicurezza



conosciamo nel dettaglio e nei minimi particolari la capacità portante dell'elemento

parametro di carico

Per ogni l , siamo in grado di progettare la sezione in misure tali che

$$M_p = \frac{\bar{q} l^2}{8}$$

se non ci fossero dubbi sulle condizioni di carico futuro e sulla meccanica del sistema, si potrebbe progettare al filo

Cosa lo determina?
 Un trade-off tra costi ed esperienza

→ non esiste una teoria dell'affidabilità neutra rispetto umano

interazione modello vs esperienza

Ma voi lo fareste?

Il dubbio è un elemento permeante, per cui si tende ad avere più larghi nel dimensionamento

La differenza fra i 2 valori è il margine di sicurezza.

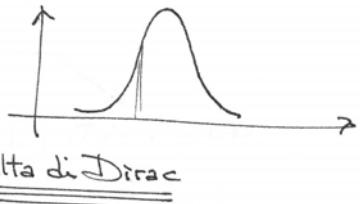
Lessione del 16/10/08

Ausili strutturali probabilistici →
 { contrapposizioni

Ausili strutturali deterministica
↓
finisce tutte le proprietà

formulazione di un
modello che permette di
valutare le probabilità che
una struttura si
comporti in un certo modo
tenendo in conto le
incertezze e le
mancate conoscenze

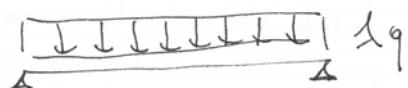
Concepto di densità di
probabilidad



Probabilistic structural design → "Quale deve essere le probabilità
di occorrenza di un determinato
evento (collasso) perché la struttura
si ottimamente progettata rispetto
a tale evento?"

problems di modellizzazione
TRADE-OFF

Il problema della sicurezza

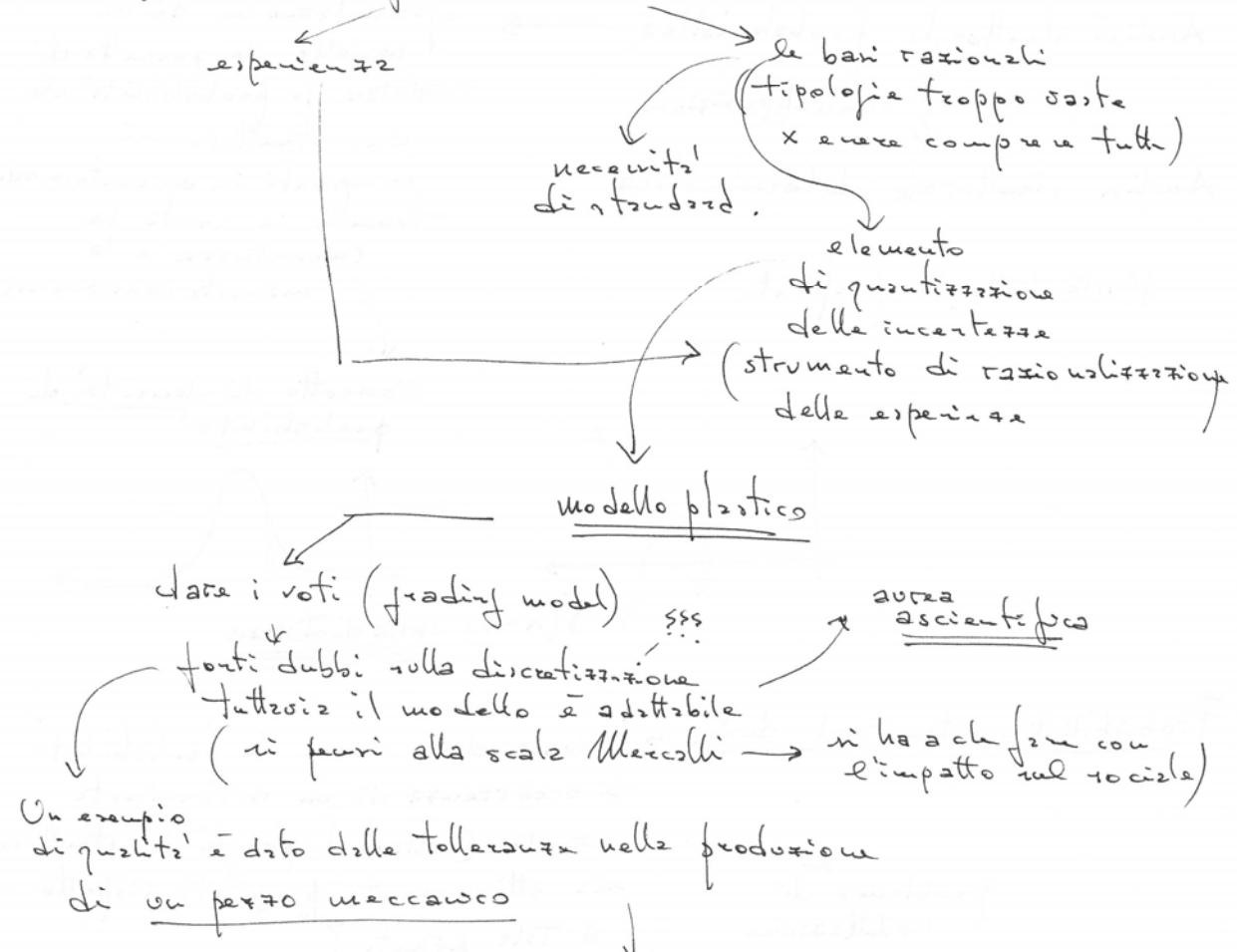


- Due proprietà
- 1) Il modello corrisponde alla capacità di calcolo nei più piccoli dettagli
 - 2) Per ogni l si può progettare la struttura in modo che sia in border situation...

Il problema è
il dubbio... quanto sopra tale valore dobbiamo progettare
per ridurre le probabilità di collasso entro un certo limite?

La differenza fra tali 2 valori è detta
margine di sicurezza ①

ha risposta al meccanismo di sicurezza ha 2 connotazioni



Un esempio
di qualità è dato dalla tolleranza nelle produzioni
di un perito meccanico

In base a questo tipo di modello
un elemento non è buono o cattivo, ma
ha un certo livello di buon' o di cattiveria

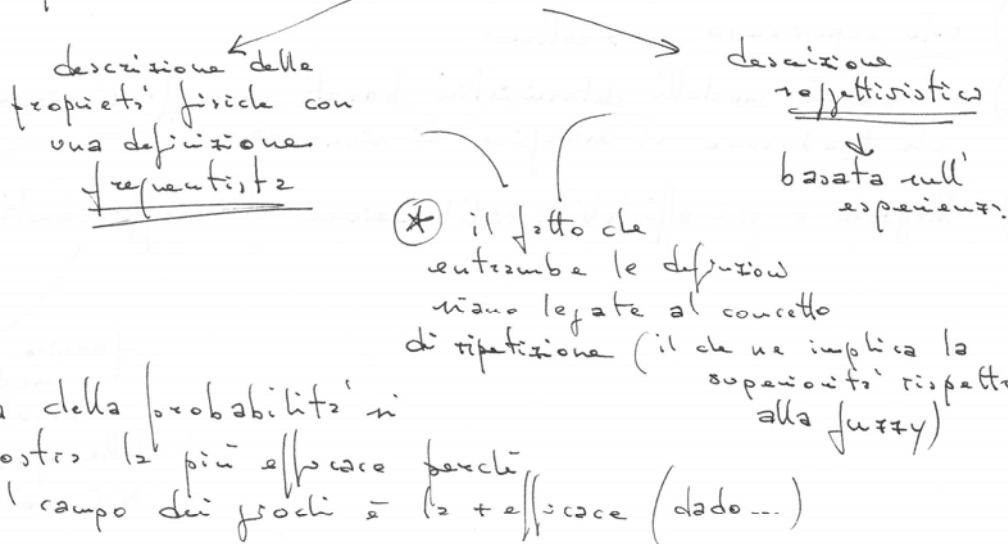
livelli di verità (fuzzy logics), livello di appartenenza
(fuzzy set)

La teoria probabilitica è ancora
in perfetta.

Torniamo ai modelli tratti, quando inseriamo una descrizione non deterministica delle proprietà fisiche ritirano parlando ad un modello probabilistico

descrizione con fuzzy sets (matrice)
e distribuzione probabilistica (fuzzy bell curve)

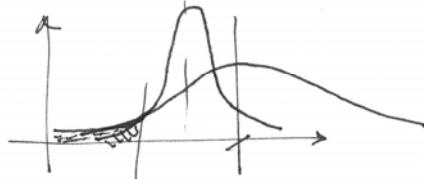
Modello probabilistico : due modi di interpretarla



Dobbio tutto filosofico è quello legato al minime diversi tipi di probabilità nell'ambito di una stessa teoria.

Vedi *) ; inoltre anche la definizione frequentista non può sedere come un giudizio neutro di natura personale.

Una misura di affidabilità di una struttura è legata ad una conoscenza generale della stessa, maggiori sono le informazioni a disposizione più accorta è la valutazione.



Il paradosso delle bad news

La conoscenza di una variabile, anche se proporzionale più migliorare il livello di affidabilità

Il problema di anti-joint : Diversi modelli a partire da info dosarebbero portare allo stesso risultato (è lo stesso ragionamento di test di laboratorio) ~> stesso modello probabilistico x effettuare confronti

(2)

Sviluppo norme

- 1) solo esperienza \rightarrow collasso
- 2) semplici modelli deterministici basati su coeff. di sicurezza, che traducono il margine di sicurezza
- 3) Meglio e più affidabile calibrazione dei coefficienti

formule
mediane
risultati
delle regole precise
 \times i valori tradizionali

lezione del 20/10/08

Distinzione fra metodi deterministici e metodi probabilistici

- Metodi deterministici

1) Fattore di sicurezza.

E' generalmente associato alle teorie elastiche.

$$\sigma_i(\varepsilon) \neq \sigma_{pi} \rightarrow \text{teoria semi-ribile}$$

perciò...

la tensione
resta in un
sistema non
coincide con l'elastica
(distr., tensione, concentrazione,
effetti di bordo...)

$$\sigma_{pi} = \frac{\sigma_{ui}}{F}$$

- scatto x
- auxili spaziali
- esperienza
- considerazioni politiche ed economiche

in realtà
un valore che
è tutto tranne
che lineare.

Quando le 2 relazioni si ottiene:

versione locale $\frac{\sigma_{ui}(\varepsilon)}{F} \leq \sigma_i(\varepsilon) \rightarrow \frac{\sigma_{ui}(\varepsilon)}{F \sigma_i(\varepsilon)} \leq 1$ (con l'uguale si dice
equazione di stato) limite

Tensione globale $\frac{R_i(\varepsilon)}{F} \leq S_i(\varepsilon) \rightarrow \frac{R_i(\varepsilon)}{F \cdot S_i(\varepsilon)} \leq 1$

2) Fattore di carico

Si tratta di un particolare fattore di sicurezza sviluppato nell'ambito delle teorie plastiche dei sistemi.

E' il valore per cui bisogna moltiplicare i carichi di servizio per far pervenire la struttura a collasso.

$$W_R(R_R) \leq W_Q(Q) \rightarrow \text{lavoro esterno}$$

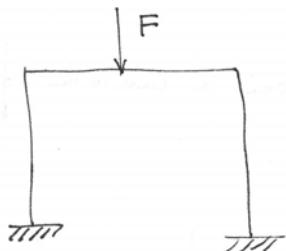
lavoro interno vettore delle resistenze plastiche (momenti plastici)

Se λ è proporzionale, l'equazione si può scrivere:

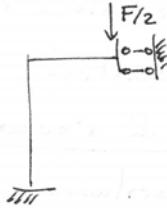
$$\frac{W_R(R_R)}{\lambda \cdot W_Q(Q_1 + \dots + Q_n)} \leq 1$$

fattore dei carichi applicati

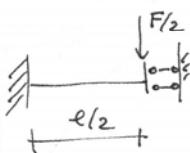
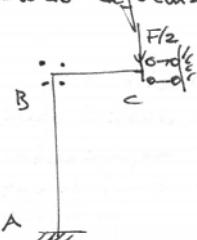
Esempio



Risoluzione in campo elastico



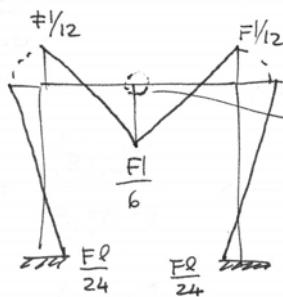
Metodo deformazioni



$$M = \frac{F x}{8}$$

$$\begin{aligned} \psi_c &= 0 \\ \frac{F/2 \cdot (l/2)^2}{2 EI} - \frac{x/2}{EI} &= \phi \\ x &= \frac{Fl}{8} \end{aligned}$$

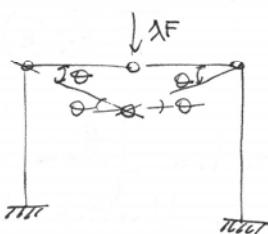
Risultato finale



seziona critica

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\text{arm}} = \frac{F_{\text{arm}} l}{6} \\ \lambda_a = \frac{M_p}{M_{\text{arm}}} = \frac{6 M_p}{F_{\text{arm}} \cdot l} \end{array} \right.$$

Situazione a collasso



$$\lambda F \cdot \frac{l}{2} = 4 M_p \cdot \phi$$

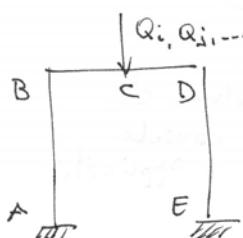
$$\lambda_c = \frac{8 M_p}{F \cdot l}$$

3) Metodo dei fattori parziali di sicurezza.

controllo locale $\phi_i R_i \leq \gamma_{D,i} S_{D,i} + \gamma_{L,i} S_{L,i} + \dots$

controllo globale $W_R(\phi R) \leq W_Q(\gamma_0 Q_D + \gamma_L Q_L + \dots)$

"i" generico
stato limite



In termini locali $\phi M_{\text{seg}}^B \leq \gamma_1 Q_1 \frac{l}{12} + \gamma_2 Q_2 \frac{l}{12} + \dots$

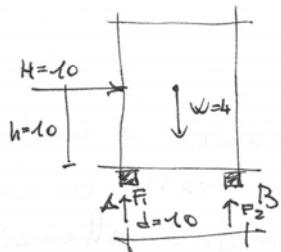
In termini globali

$$4 \phi M_p \leq (\gamma_1 Q_1 + \gamma_2 Q_2 + \dots) \frac{l}{2}$$

Il problema dell'incertezza di incertezza.

Il controllo del problema delle incertezze è legato ai coefficienti parziali, tuttavia la scelta di questi ottimi dipende dalla definizione del tipo di carico e del tipo di resistenza e queste scelte (che sono le scelte dei parametri del modello) non sono uniche anche se stato limite finito. (non esiste un unico modo di legare resistenze e sollecitazioni)

Esempio



R = 24 resistenza singola colonna.

Lo stato limite ultimo può essere descritto mediante diverse azioni e resistenze

1) Equilibrio alla rotazione intorno ad A:

$$F_1 = \frac{M_{res, A}}{M_{ag, A}} = \frac{R \cdot d}{Hh + \frac{Wd}{2}} = 2,0$$

2) Capacità della colonna B:

$$F_2 = \frac{R}{\frac{Hh}{d} + \frac{W}{2}} = 2,0$$

$$F_3 = \frac{R - \frac{W}{2}}{\frac{H \cdot h}{d}} = 2,2$$

Si sta parlando sempre della colonna B per la sua struttura e gli stessi carichi, dunque la variabilità è fatta nella scelta delle resistenze e delle corrispondenti azioni.

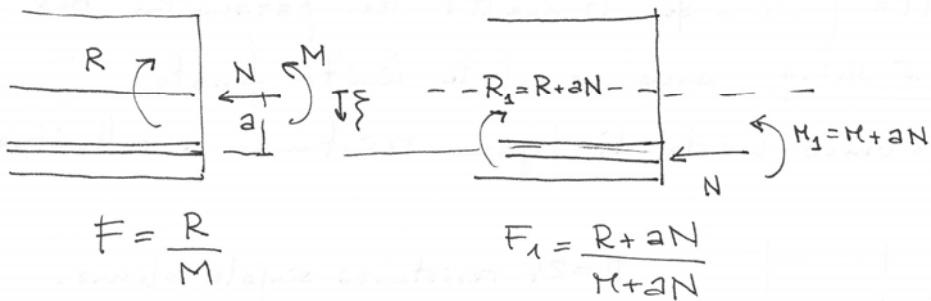
Si nota tuttavia che se si scelgono i coefficienti parziali legati dalla relazione $\phi_R = \frac{1}{2} \phi_i$ → tutti il problema è risolto ($\phi_i \leq \frac{1}{2}$ viene $F=1$)

(2)

Altro modo di procedere è quello di considerare il cosiddetto margine di sicurezza :

$$z = R - S$$

Nei casi precedenti si ottengono le medesime relazioni
Esempio:



In termini di fattore di sicurezza e di carico è sempre possibile far coincidere le 2 espressioni, al contrario in un approccio ai coefficienti parziali c'è bisogno di fare attenzione.

$$N = N_D + N_L ; M = M_D + M_L$$

caso 0) $\phi R = \gamma_D M_D + \gamma_L M_L$

caso 1) $\phi (R + aN_D + aN_L) = \gamma_D (M_D + aN_D) + \gamma_L (M_L + aN_L)$

Per essere equivalenti deve risultare

$$(\phi - \gamma_D) N_D + (\phi - \gamma_L) N_L = 0 \quad \begin{matrix} \text{questa non puo'} \\ \text{essere vera, se non} \\ \text{nella condizione} \\ \phi = \gamma_L = \gamma_D = 1 \end{matrix}$$

Il problema sta nel fatto che " aN " non è una tensione.

L'altra strada è quella di fare tutto in termini di margine di sicurezza.

Dunque alla fine due strade:

- 1) Fattorizzare R_i e Q_i in maniera tale che in condizioni limite il rapporto valga 1
- 2) Usare il margine di sicurezza

Elementi di probabilità e statistica

Azioni della teoria della probabilità: 1) $P: E \rightarrow [0,1]$

$$2) P(C) = 1 \quad P(\emptyset) = 0$$

$$3) P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Risultati derivati:

$$4) P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 | E_2) \cdot P(E_2)$$

$\Rightarrow E_1$ ed E_2 indipendenti $\rightarrow P(E_1)$

$$5) P(E \cup \bar{E}) = P(E) + P(\bar{E})$$

$$6) P(E_1 | E_2) = P(E_1 \cap E_2) / P(E_2)$$

7) Teorema di probabilità totale: Dati n eventi E_i che sono mutualmente esclusivi e collettivamente esaurienti:

$$P(A) = P(A|E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A|E_n) \cdot P(E_n)$$

(la somma con 2 dadi) $\left(\frac{15}{36} + \frac{15}{36} + \frac{6}{36} \right)$

8) Teorema di Bayes:

$$P(A \cap E_i) = \frac{P(A|E_i) \cdot P(E_i)}{P(E_i|A) \cdot P(A)}$$

$P(\text{pioggia} | \text{dolore}) = \frac{P(\text{pioggia})}{P(\text{dolore})} \frac{P(\text{dolore} | \text{pioggia})}{P(\text{dolore})} P(E_i | A) = \frac{P(A|E_i) \cdot P(E_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|E_j) \cdot P(E_j)}$

fattore correttivo delle probabilità.

(Il caso risulta, il caso di lancio 2 dadi le cui somme danno numeri 8)

Definizione di funzione densità di probabilità per variabile continua.

$$P(X \leq x) = F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(\varepsilon) d\varepsilon \quad \text{probabilità cumulata.}$$

$$\text{dunque } f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$$

$$P(a < X \leq b) = F_x(b) - F_x(a)$$

Per le variabili discrete esistono le funzioni di probabilità di massa.

(3)

La descrizione delle funzioni statistiche è basata su di una serie di parametri detti "momenti della distribuzione".

1) Media o Momento primo

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx = \sum_i x_i p_x(x_i)$$

c'è analogia con il primo momento di area o momento statico

$$\text{Moda} \rightarrow \underline{\int_x \max} \quad \text{Mediana} \quad F_x(x) = 0.5$$

2) Varianza o Deviazione standard (Momento secondo)

$$E((x - \mu_x)^2) = \text{Var}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f_x(x) dx$$

additività

$$= E(x^2) - (\mu_x)^2.$$

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(x)} \quad , \quad V_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \quad \begin{matrix} \text{(coefficiente)} \\ \text{di variazione} \end{matrix}$$

Disequazione di Chebychev

$$P(|X - \mu_x| \geq k \sigma_x) \leq 1/k^2$$

3) Asimmetria o Skewness (Momento terzo)

$$E((x - \mu_x)^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^3 f_x(x) dx$$

$$\text{grado di asimmetria} \quad f_3 = \frac{E((x - \mu_x)^3)}{\sigma_x^3}$$

4) Curtosi (Momento quarto)

misura della
piattezza della
distribuzione

(più è alta, più è piatta)

$$E((x - \mu_x)^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^4 f_x(x) dx$$

$$\rightarrow f_4 = \frac{E((x - \mu_x)^4)}{\sigma_x^4} \quad \begin{pmatrix} \text{per una normale} \\ f_4 = 3.0 \end{pmatrix}$$

L'insieme dei momenti caratterizza una distribuzione, per alcune distribuzioni basta pochissimo, x esempio per quella normale bastano i primi 2 momenti.

Principali distribuzioni

4) Binomiale: $B(n, p)$

esperimento che ha 2 esiti "zero" con probabilità " p ", "non zero" con probabilità " $1-p$ ".

L'idea è in " n " esperimenti quanti successi ho?

Ogni evento è indipendente. (5 esperimenti: VFFFV)

$$p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot p \cdot (1-p) = \\ = p^2 (1-p)^3$$

non c'è un
unico modo

di ottenere 2 vittorie

ma ce ne sono $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \rightarrow \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 10$

ha probabilità cumulata e'

$$F_x(x) = \sum_{y=1}^x p^y (1-p)^{n-y} \binom{n}{y}$$

$$P_x(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

MEDIA:

$$\mu_x = n \cdot p$$

$$\text{var}(x) = \sigma_x^2 = np(1-p)$$

Esempio: Probabilità che in 5 prove di schiacciamento 3 provini Rete 250 si rompano sotto i 250 kg/cm²

$$p = 0.05 \quad x = 3 \quad n = 5$$

$$P_x(3) = \binom{5}{3} (0.05)^3 \cdot (0.95)^2 = \frac{5!}{3!2!} (0.05)^3 \cdot (0.95)^2 = \\ = 10 \cdot 0.000113 = 0.00113$$

che vuol
dire il
numero
medio di
successi in
5 prove

$$P = 5 \cdot 0.05 = \underline{\underline{0.25}}$$

(4)

• Distributioni casabili discrete

- Binomiale

In una serie di esperimenti S, NS è la probabilità di avere "x" successi in "n" prove

$$P(X=x) = P_x(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

↓
 numero
 di config.
 → probabilità
 di una
 configuration

Esempio: Lancio una moneta 7 volte che probabilità ha di avere 2 teste

$$p = 0.5$$

$$n = 7$$

$$x = 2$$

$$P(X=2) = \binom{7}{2} \cdot (0.5)^2 \cdot (0.5)^{7-2} = \frac{7!}{2!5!} (0.5)^7 =$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} (0.5)^7 = 21 \cdot (0.5)^7 = 21 \cdot 0.0078 = 0,164$$

16,4%

Calcolo della media

$$\mu = \sum_{i=0}^7 x \cdot P_x(x) = \sum_{i=1}^7 x \cdot P_x(x) = n \cdot p = 7 \cdot 0,5 = \underline{\underline{3,5}}$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^7 (x - \mu_x)^2 P_x(x) = n p (1-p) = 7 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 1,75$$

- Geometrica

Restituisce la probabilità che l'n-esima prova sia un successo dato che le "n-1" precedenti siano state insuccessi

$$P(N=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p$$

$$F_N(n) = \sum_{i=1}^n (1-p)^{i-1} \cdot p = 1 - (1-p)^n$$

basta elidere tutti i termini della somma

(1)

Esempio: Probabilità che al resto lancio venga testa dopo 5 croci.

$$P(N=6) = (1-p)^5 \cdot p = (0.5)^5 \cdot 0.5 = (0.5)^6 = 0,0156$$

$p = \frac{1}{p} = 2$ \Rightarrow è il numero di lanci medi per avere un successo

$$\bar{T}_N^2 = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0.5}{0.25} = 2$$

Si pensi all'esempio: → in un anno ho un sisma che supera una certa soglia
→ in un giorno ho prodotto più di 10 pezzi difettosi.

- Binomiale negativa o di Pascal

E' la distribuzione corrispondente alle probabilità che il "k-esimo" successo ce l'ho al t-esimo tentativo.
La ^{fumzione} probabilità di massa è

$$P(T=t) = \binom{t-1}{k-1} \frac{p^k (1-p)^{t-k}}{k!} \quad \rightarrow \begin{array}{l} t=k, k+1 \\ \text{intuizione} \\ \text{con "k" successi} \\ \text{in "t" prove} \end{array}$$

non a caso
 si usa "t"
 perché il numero
 di prove può
 essere usato come
 istanti di tempo
 (campionamento).

modi di avere
 k successi in t prove,
 dando per saldo che il k-esimo successo
 c'è l'ho alla prova t-esima.
 Dunque ciò equivale ai modi di avere
 t-1 successi nei precedenti t-1
 Tentativi.

Esempio: Probabilità di avere la 5^a testa all'ottavo lancio

$$P(T=8) = \binom{7}{4} (0.5)^8 = \frac{7!}{4!3!} (0.5)^8 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot 0,0039 = 0,1367$$

$$p = \frac{5}{0.5} = K = 10 \quad \Rightarrow \text{come ci si aspetta}$$

$$\bar{T}_T^2 = \frac{k(1-p)}{p^2} = \frac{5}{0.5} = 10 \quad \underline{\bar{T}_T = \sqrt{10}}$$

13.67%
2

Distribuzione di Poisson

E' la probabilità di ottenere un certo numero di occorrenze X_t di un'eventuale casuale in un intervallo "t".
Noto il tasso medio di occorrenza (il numero medio di occorrenza nell'unità di tempo)

Non è altro che una binomiale per $n \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$
(in genere questa approssimazione è valida se $n/p = 500$)

$$P(X=x) = \frac{(vt)^x}{x!} e^{-vt} \quad \begin{array}{l} \text{ha lo stesso senso di} \\ \text{"np", cioè il} \\ \text{numero medio di} \\ \text{occorrenza nel} \\ \text{tempo "t"} \end{array}$$

$$F(x=x) = \sum_{i=1}^x \frac{(vt)^i}{i!} e^{-vt}$$

Esempio approssimazione binomiale : ha probabilità di un tempo
con $\bar{x} = np = \frac{1}{90 \cdot 89 \cdot 88} = 1,419 \cdot 10^{-6}$

$n = 10000$ estrazioni

$$\underline{vt = np} \rightarrow \underline{vt = 1,419 \cdot 10^{-2}}$$

$$P(X=5) = \frac{(1,419 \cdot 10^{-2})^5}{120} \cdot \frac{1}{2,71828} = 4,7268 \cdot 10^{-12}$$

Esempio: In un'azione stradale passano 20 auto al minuto,
qual'è la probabilità che in abbinno passino di 32
metri in 1 minuto?

$$P(X=32) = \frac{(20)^{32}}{32!} e^{-20} = \underline{\underline{0,00336}}$$

5

Distribuzione Esponentiale

Per gli eventi che ricadono nei processi di Poisson, la distribuzione esponentiale descrive la distribuzione dell'istante di tempo di prima occorrenza.

E' in altre parole l'ausilio continuo della distribuzione geometrica. Poiché il processo di Poisson è stazionario in fuorigi scegliere l'istante iniziale come si vuole e parlare di tempo tra due eventi.

$$P(T=t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

probabilità
di occorrenza
nell'unità
di tempo

Esempio: Distribuzione dell'istante di tempo in cui avviene 12 prime auto

$$P(T=t) = 20 e^{-20 \cdot t}$$



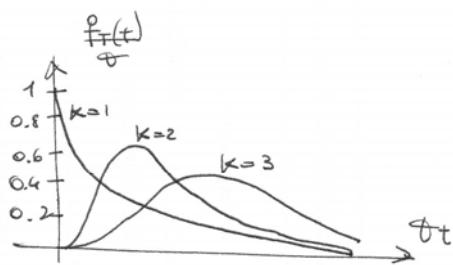
$$\lambda = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{20} = 3 \text{ sec}^{-1}$$

$$\text{Var}(T) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \Delta t^2 = 9 \text{ sec}^2$$

Distribuzione Gamma

Per gli eventi che descrivono mediante un processo di Poisson, essa descrive le funzioni derivate di probabilità del tempo in cui avviene 12 "k-esima" occorrenza. E' l'ausilio continuo delle leggi binomiste.

La forma di questa distribuzione si può generalizzare anche con k non intero



(4)

$$P(T=t) = \frac{\nu(vt)^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-vt}$$

$$P(T < t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(vt)^x}{x!} e^{-vt} \quad k \text{ intero}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-u} u^{k-1} du = \frac{\Gamma(k, vt)}{\Gamma(k)} \quad t \geq 0, k \geq 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-u} u^{k-1} du = (k-1)! \quad \text{per } k \text{ intero}$$

Esempio

Distribuzione dei tempi per la 5^a auto che paura

$$P(t=t) = \frac{20 \cdot (20 \cdot t)^{5-1} e^{-20t}}{(5-1)!} = \frac{20}{24} \cdot (20)^4 \cdot t^4 e^{-20t} =$$

$$= \frac{(20)^5}{24} t^4 e^{-20t} \quad \text{m} \rightarrow D = 4t^3 e^{-20t} - 20t^4 e^{-20t} = 0$$

$$4t^3 e^{-20t} (1-5t) = 0$$

$$t = 1/5 \quad \text{i.e. } \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{m}}}}}$$

$$p = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$v_{nr} = \frac{5}{400} = \frac{1}{80}$$

$$r_1 = 2\sqrt{k} \quad ? \quad \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{ok}}}}}$$

(5)

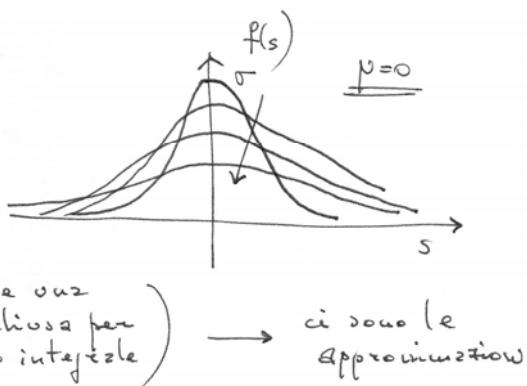
Distribuzione normale

E' quella più utilizzata nella pratica, può servire come caso limite delle altre distribuzioni, oppure come modello descrittivo di processi finiti.

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}$$

$$F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}w^2} dw$$

(non esiste una formula chiusa per questo integrale)



ci sono le approssimazioni

Si può anche dimostrare che $\gamma_1 = 0$ ($\gamma_2 = 3$) → coefficiente di curvatura.

$N(0,1)$ si definisce famiglia standard e in facendo le funzioni $f_x(x)$ e $F_x(x)$ sono tabellate.

Proprietà interessante: $Y = \sum_i X_i \rightarrow$ distribuzione normale $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

$$\begin{cases} \mu_Y = \sum_i \mu_{X_i} \\ \sigma_Y^2 = \sum_i \sigma_{X_i}^2 \end{cases}$$

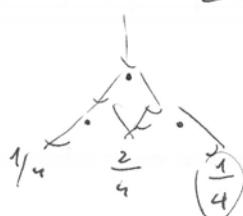
Tavole del limite centrale

La somma di un grande numero di variabili ha una distribuzione che tende a quella normale indipendentemente da come sono distribuite le variabili addendo.

Esempio: La somma dei punti di dadi. \rightarrow

La variabile iniziale è uniforme, la somma è gaussiana.

L'esempio del pallonometro



Probabilità di cadere 255 palline laterali è $\binom{1000}{255} \left(\frac{1}{4}\right)^{255} \left(\frac{3}{4}\right)^{745}$

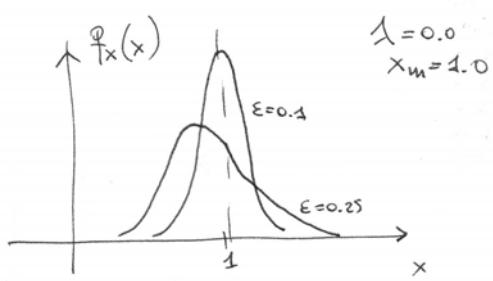
Almeno 255 palline $\sum_{x=255}^{1000} \frac{1000!}{x!(1000-x)!} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{1000-x} \rightarrow$ impossibile con calcolatrice

$$\text{Ma } p = np = 250 \quad \sigma_x = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\frac{1000 \cdot 3}{16}} = 13.6 \rightarrow \int_{255}^{\infty} f(N(250, 13.6)) \dots (6)$$

Distribuzione log-normale $\text{LN}(\lambda, \varepsilon)$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \varepsilon} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \lambda}{\varepsilon} \right)^2} \quad 0 \leq x < \infty$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(u) du \quad \begin{pmatrix} \text{nuova form} \\ \text{espliata} \end{pmatrix}$$



I parametri sono $\lambda = E[\ln x] = \mu_{\ln x}$
 $\varepsilon^2 = \sigma_{\ln x}^2$

I momenti di questa distribuzione

Le relazioni 1) e 2) possono essere utilmente manipolate:

$$\begin{aligned} \text{Dalla 1)} \quad \ln \mu_x &= \lambda + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \\ &\downarrow \\ \lambda &= \ln \mu_x - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad E[x] &= \mu_x = e^{\lambda + \frac{1}{2} \varepsilon^2} \\ 2) \quad \sigma_x^2 &= \mu_x^2 \left(e^{\varepsilon^2} - 1 \right) \\ P(a < x \leq b) &= \phi\left(\frac{\ln b - \lambda}{\varepsilon}\right) - \phi\left(\frac{\ln a - \lambda}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Il teorema del limite centrale si può estendere anche al caso in cui ho distribuzioni log-normali, basta semplicemente sostituire prodotto a somma, o log-normale a normale

- Le dimensioni geometiche o le resistenze dei materiali duttili viene modellate con distribuzioni log-normali

Distribuzione Beta

È la distribuzione che è più malleabile e plasmabile nel caso in cui il valore delle variabili sia compresa fra due valori precisi a e b

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \frac{1}{B(q, r)} \cdot \frac{(x-a)^{q-1} \cdot (b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}} \quad \begin{matrix} \text{ie } a=0, b=1 \\ \text{Beta standard} \end{matrix} \\ \Rightarrow B(q, r) &= \int_0^1 x^{q-1} (1-x)^{r-1} dx = \frac{\Gamma(q) \Gamma(r)}{\Gamma(q+r)} = \frac{(q-1)! (r-1)!}{(q+r-1)!} \quad (7) \end{aligned}$$

Se $a=0, b=1$

$$f_s(s) = \frac{1}{\beta(q,r)} s^{q-1} (1-s)^{r-1} \quad 0 \leq s \leq 1$$

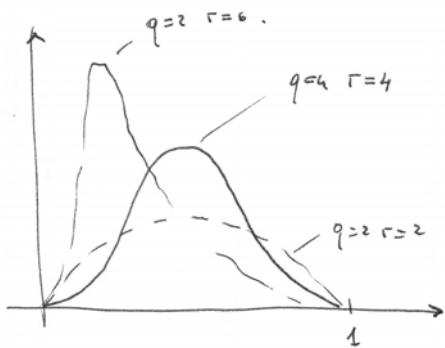
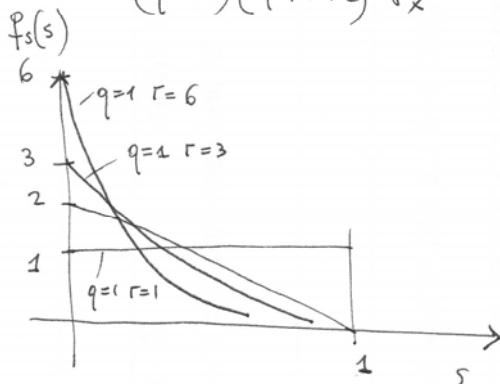
$$= 0 \quad \text{nelle altre zone}$$

Vediamo i parametri della distribuzione

$$\mu_x = a + \frac{q(b-a)}{q+r}$$

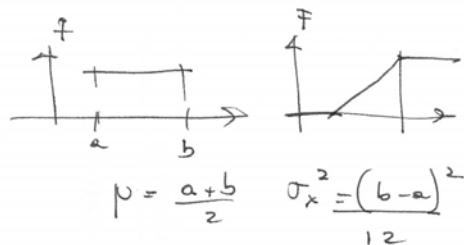
$$\sigma_x^2 = \frac{q \Gamma(b-a)^2}{(q+r)^2 (q+r+1)}$$

$$\gamma_1 = \frac{2(r-q)}{(q+r)(q+r+2)}$$



Un esempio classico è la distribuzione uniforme in intervallo

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{al resto} \end{cases}$$



$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

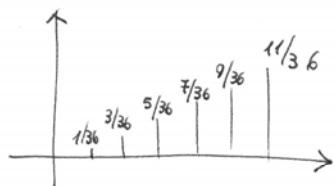
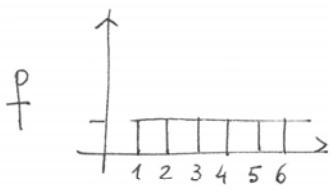
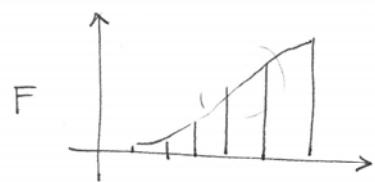
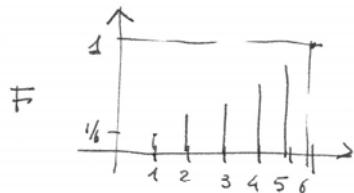
(8)

Teoria dei valori estremi

Consideriamo un evento x che ha probabilità di occorrenza $P(x)$, ovvero a cui corrisponde una probabilità cumulata $F(x)$, è possibile verificare che la probabilità che il massimo sia x è $[F(x)]^n$ (o $P(x)^n$)

Caso del dado

	1	2	3	4	5	6
$F(x)$	$1/6$	$1/3$	$1/2$	$2/3$	$5/6$	1
$F(x)^n$	$1/36$	$1/9$	$1/4$	$4/9$	$25/36$	1



La distribuzione dei minimi è esattamente al contrario.

L'applicazione di questo concetto a distribuzioni di partenza differenti, determina diverse distribuzioni di massimi e minimi

Distribuzione di valori estremi di tipo I (Gumbel)

È la distribuzione dei valori più grandi (o più piccoli) di "n" variabili casuali X_i quando $n \rightarrow \infty$, nel caso in cui le variabili X_i siano distribuite come

$$f_b(x) = e^{-g(x)} \quad F_x(x) = 1 - e^{-g(x)}$$

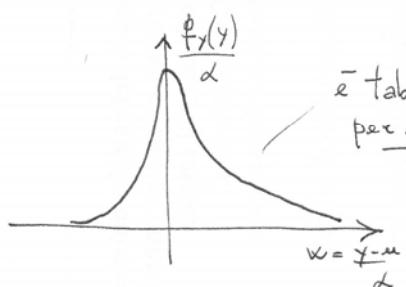
con $g(x)$ funzione crescente
altrimenti $e^{-g(x)}$ divergerebbe

sono importanti perché in questo quadro ricadono le distribuzioni normale, esponenziale... (1)

Detto γ la distribuzione dei minimi, tale variabile sarebbe distribuita come:

$$f_y(y) = \alpha e^{-\alpha(y-u)} - e^{-\alpha(y-u)} \quad -\infty < y < +\infty$$

$$F_y = e^{-e^{-\alpha(y-u)}} \quad \text{a.a.}$$



è tabellata
per $\alpha = 1$

$$\text{imponendo } w = \frac{y-u}{\alpha}$$

e si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f_y(y)}{\alpha} = e^{-w^2} \\ F_y = e^{-e^{-w^2}} \end{array} \right.$$

I parametri sono "la moda", α che è un parametro di dispersione della distribuzione, α^{-1} la pendenza

costante di Euler
0.57725

$$\mu_y = u + \frac{\pi}{\alpha}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\pi^2}{6\alpha^2}$$

$$\gamma_1 = 1,1396$$

Distribuzione dei valori minimi

$$f_{ys}(y^s) = \alpha e^{-\alpha(y^s-u)} - e^{-\alpha(y^s-u)}$$

$$F_{ys}(y^s) = 1 - e^{-e^{-\alpha(y^s-u)}}$$

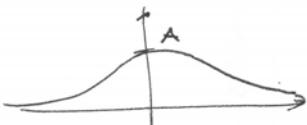
$$\mu_{ys} = u - \frac{\pi}{\alpha}$$

$$\sigma_{ys}^2 = \frac{\pi^2}{6\alpha^2}$$

$$\gamma_1 = -1,1396$$

La posizione di un fisso è descritto da una legge del tipo

$$Y = A e^{-g(x)x^2}$$



(2)

Probabilità condizionata distribuzione

Evento da due variabili casuali X_1 e X_2 , la prob. che tale evento avvenga per certe realizzazioni x_1 e x_2 è descritto dalla funzione cumulata:

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = P[(X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2)] = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1, X_2}(u, v) du dv$$

funzione densità di probabilità condizionata

$$f_{X_1, X_2} = \frac{\partial^2 F(X_1, X_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \left[\begin{array}{l} \text{noto che } F_{X_1, X_2}(-\infty, y) = F_{X_1, X_2}(x_1, -\infty) = 0 \\ \text{e a } F_{X_1, X_2}(\infty, y) = F_{X_2}(y) \text{ e viceversa} \end{array} \right]$$

Distribuzione di probabilità condizionata

Se la probabilità che $x_1 < X_1 \leq x_1 + \delta x_1$ è funzione di x_2 ,

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = P[x_1 < X_1 \leq x_1 + \delta x_1 | x_2 < X_2 \leq x_2 + \delta x_2]$$

Ricordando che $P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$ si può scrivere

$$\textcircled{*} \quad f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} \quad \begin{array}{l} \text{se } X_1 \text{ e } X_2 \text{ sono} \\ \text{indipendenti} \end{array}$$

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$$

Distribuzione di probabilità marginale

(Teorema della probabilità totale: $P(A) = \sum_i P(A|E_i) \cdot P(E_i)$)

Si ottiene ~~variazendo~~ fissando un valore e integrando nello spazio

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) \cdot f_{X_2}(x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2$$

Se X_1 e X_2 indipendenti $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = f_{X_1}(x_1)$ e non c'è differenza tra marginale e condizionata $\textcircled{1}$

Momenti della distribuzione congiunta

Medie

$$\mu_{x_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad \text{della } \star$$

$$\mu_{x_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_{x_1|x_2}(x_1|x_2) dx_1 \right) f_{x_2}(x_2) dx_2 = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{x_1|x_2} f_{x_2}(x_2) dx_2}$$

si dice media marginale (o μ_{x_1}) di x_1 .

perché?

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1 = \mu_{x_1}$$

↳ questa è
la marginale

Varianzza

$$v_{x_1}(x_1) = E[(x_1 - \mu_{x_1})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_{x_1})^2 f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 =$$

come sopra

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} v_{x_2}(x_2) f_{x_2}(x_2) dx_2 = v_{x_2}(x_1)$$

Covarianza e correlazione

Esiste anche (2 possibilità) di definire un momento secondo misto che è chiamata covarianza:

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_1, x_2) &= E[(x_1 - \mu_{x_1})(x_2 - \mu_{x_2})] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_{x_1})(x_2 - \mu_{x_2}) f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

È possibile così definire un coefficiente detto di correlazione

$$\rho_{x_1 x_2} = \frac{\text{cov}(x_1, x_2)}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}}$$

$-1 \leq \rho \leq 1$

, ora supponiamo che esista una legge lineare che lega i due parametri

$$x_2 = ax_1 + b, \text{ la correlazione}$$

verrebbe:

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_{x_1})(ax_1 + b - a\mu_{x_1} - b) f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_{x_1})^2 f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = a \cdot \text{var}(x_1) \end{aligned}$$

se calcolo:

$$\text{var}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a^2 (x_1 - \mu_{x_1})^2 f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= a^2 \text{var}(x_1), \text{ calcolando il coefficiente di correlazione si ha:}$$

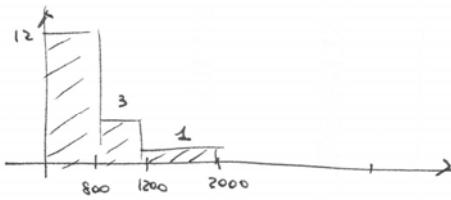
$$\rho_{x_1 x_2} = \frac{a \text{var}(x_1)}{\sqrt{a^2 \text{var}(x_1)}} = 1 \cancel{a} \rightarrow \begin{array}{l} \text{o meglio } a \pm 1 \text{ è seconda} \\ \text{del segno di } a \end{array}$$

Dunque il valore di ρ è una misura della linearità fra le due variabili (mentre in merito a legami di tipo diverso).

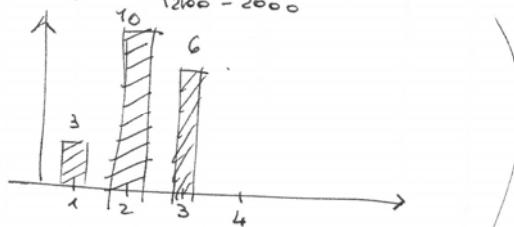
Esempio : Calcolo covarianza

Le distribuzioni marginali sono quelle che si ottengono bloccando una variabile e leggendo la distribuzione dell'altra:

Marginali persone & auto



Numero auto	Reddito mensile				marginale persone con reddito
	≤ 800	800 - 1200	1200 - 2000	≥ 2000	
1	12	6	3	1	22
2	3	14	10	20	45
3	1	2	6	3	12
4	/	/	/	3	3
	16	22	19	27	82



Media auto

$$\bar{x}_1 = \frac{1 \cdot 22 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 3}{82} = \frac{22 + 90 + 36 + 12}{82} = \frac{160}{82} = 1,95$$

Da questa si dorebbe parlare di quella normale

	800	800 - 1200	1200 - 2000	2000	
1	0,146	0,073	0,037	0,012	0,268
2	0,037	0,171	0,122	0,244	0,549
3	0,012	0,024	0,073	0,037	0,146
4	/	/	/	0,037	0,037
	0,195	0,268	0,232	0,305	1

Media reddito

$$\bar{x}_2 = \frac{16 \cdot 600 + 22 \cdot 1000 + 19 \cdot 1600 + 2500 \cdot 27}{82} = \frac{9600 + 22000 + 30400 + 67500}{82} = \underline{\underline{1579,27}}$$

Varianza auto

$$\sigma_{x_1}^2 = (1,95 - 1)^2 \cdot 0,268 + (2 - 1,95)^2 \cdot 0,549 + (3 - 1,95)^2 \cdot 0,146 + (4 - 1,95)^2 \cdot 0,037 = \\ = 0,242 + 0,0014 + 0,161 + 0,155 = \underline{\underline{0,56}} \quad \boxed{\sigma_{x_1} = 0,748}$$

$$\sigma_{x_2}^2 = (600 - 1579,27)^2 \cdot 0,195 + (1000 - 1579,27)^2 \cdot 0,268 + (1600 - 1579,27)^2 \cdot 0,232 + (2500 - 1579,27)^2 \cdot 0,305 = \\ = 187000 + 89928 + 99,7 + 258562 \approx 535590 \quad \boxed{\sigma_{x_2} = 731,84} \quad (4)$$

Covarianza

$$\text{Cov} = 0,146 \cdot (-1579,27+600) \cdot (-1,95+1) + \dots =$$

x_{righe}

$$= 135,82 + 40,17 - 0,728 - 10,5 - 1,812 - 4,95 + 0,126 + 11,23 - 12,34 - 14,60 +$$

$$+ 1,589 + 35,77 + 69,84 = 249,61$$

$$\rho = \frac{249,61}{0,748 \cdot 731,84} = \boxed{0,456}$$

correlazione lineare media
e positiva \nearrow

Una distribuzione notevole : Normale Bivariata

Nel caso in cui abbiamo due randomi casuali, le cui marginali sono distribuzioni normali, la funzione congiunta assume la forma:

$$f(x_1, x_2, \rho) = \frac{1}{2\pi \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(h^2+k^2-2\rho hk)}{1-\rho^2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \frac{x_1 - \mu_{x_1}}{\sigma_{x_1}} \\ k = \frac{x_2 - \mu_{x_2}}{\sigma_{x_2}} \end{array} \right.$$

se $\mu_{x_1} = \mu_{x_2} = 0$ e $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = 1$ si ottiene la standard $\phi_2(h, k, \rho)$

Per la cumulata non esistono integrali in forma chiusa bisogna sommare i valori delle densità.

I parametri sono:

Media condizionata

$$(fusione di \text{ } \text{tegumento}) \quad E(x_2 | x_1 = x_1) = \mu_{x_2|x_1} = \mu_{x_2} + \rho \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}} (x_1 - \mu_{x_1})$$

Varianza condizionata

$$\sigma_{x_2|x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2 (1 - \rho^2)$$

Alcune considerazioni:

- Distribuzione bivariata normale $\xrightarrow{\text{ }} \text{Distribuzione marginale normale}$

- Se $\rho = 0$, x_1 e x_2 oltre ad essere incollate sono anche indipendenti.

(5)

Trasformazione di variabili casuali

Supponiamo che X e Y siano 2 variabili casuali legate da una funzione " g " monotonica $Y = g(X)$, allora si può dimostrare che le densità di probabilità sono legate come:

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{questa relazione segue} \\ \text{dalla conservazione} \\ \text{dell'area infinitesima} \\ \text{sotto le due curve} \\ \text{(una sorta di} \\ \text{conservazione della} \\ \text{probabilità a livello} \\ \text{locale)} \end{array}$$

$f_Y(y) dy = f_X(x) dx$

↓

questa relazione non
è più valida se g
non è monotonica, semplicemente perché non
c'è più interpretare visto che non c'è più
corrispondenza bivivoca tra " x " e " y ".

Un'applicazione pratica è quella che si usa nello studio alla MonteCarlo.

$$Y = F_X(x) \quad 0 \leq Y \leq 1 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x) \quad \text{da cui}$$

$f_Y(y) = f_X(x) \cdot \left| \frac{1}{f_X(x)} \right|$

che è una distribuzione rettangolare
che non dipende dalla funzione della densità di
 $F_X(x)$

Trasformazione di più di 2 variabili casuali

Supponiamo di avere due variabili casuali X_1 e X_2 con funzione densità di probabilità nota:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$$

e che siano legate ad altre 2 variabili casuali,

$$Y_1 = Y_1(x_1, x_2), \quad Y_2 = Y_2(x_1, x_2)$$

(6)

Supponiamo che esistano inverse uniche : $x_1 = x_1(y_1, y_2)$
 $x_2 = x_2(y_1, y_2)$

Allora :

$$\phi_{x_1, x_2}(y_1, y_2) = \phi_{x_1, x_2}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

è il determinante
è il prodotto delle
derivate parziali col cambiare
di x_1, x_2 .

mantiene
invariato l'entità
dell'ipervolume

Facciamo il caso di una trasformazione lineare

$$Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \quad i = 1, 2, \dots, n$$

se \mathbf{T} è ortogonale la
trasformazione è una isometria
(conserva angoli e distanze), in questo caso $|\mathbf{T}| = |\mathbf{A}| = \pm 1$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Se delle funzioni Momenti delle funzioni di variabile casuale
Siano:

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad \mu_Y = \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i} \quad \left| \begin{array}{l} \text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \sum_{i=1}^n a_i a_j \text{cov}(X_i, X_j) \\ \text{cov}(Y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i a_j \rho_{ij} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \quad (\rho_{ii} = 1) \end{array} \right.$$

Prodotto

$$Y = \prod_{i=1}^n \underbrace{x_i}_{n=2}$$

$$\mu_Y = \mu_{X_1} \cdot \mu_{X_2} + \rho \sigma_{X_1} \sigma_{X_2}$$

$$\text{var}(Y) = \left[(\mu_{X_1} \sigma_{X_2})^2 + (\mu_{X_2} \sigma_{X_1})^2 + (\sigma_{X_1} \sigma_{X_2})^2 \right] (1 + \rho^2)$$

se X_1, X_2 sono indipendenti si applica quello di sopra per $\rho = 0$
e si puo' dimostrare $\sqrt{V_Y} = \sqrt{V_{X_1}} + \sqrt{V_{X_2}} + \sqrt{V_{X_1} V_{X_2}}$

basta applicare la definizione di coeff. di variazione $V_k = \sigma_k / \mu_k$

$$n \geq 2 \quad E(Y) = \prod_{i=1}^n \mu_{X_i}$$

$$\text{var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \prod_{i=1}^n \mu_{X_i}^2 - \left(\prod_{i=1}^n \mu_{X_i} \right)^2$$

(7)

Il problema base di affidabilità

16/11/08

Nell'ambito del problema base si considera un'unica variabile carico S , ed un'unica variabile resistenza R , ognuna descritta dalla relativa funzione densità f_S e f_R (R ed S devono essere confrontabili \rightarrow stessa unità di misura)

- Per un'unico elemento strutturale considerato le cui insorgenze sono:

$$R \leq S, \text{ dunque}$$

$$\begin{aligned} p_f &= P(R \leq S) = P(R - S \leq 0) = R \left(\frac{R}{S} \leq 1 \right) = \\ &= P(\ln R - \ln S \leq 0) \end{aligned}$$

o in una forma più generale

$$p_f = P(G(R, S) \leq 0)$$

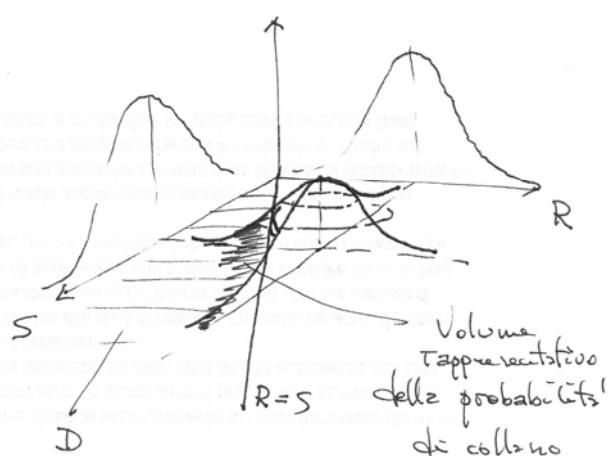
" G " è detta funzione di stato limite, può avere scritta con riferimento ad un elemento, ad una parte strutturale o all'intero elemento.

Dunque dette f_R ed f_S le probabilità marginali di R ed S , ed $f_{RS}(r, s)$ la funzione densità di probabilità condizionata, il termine $f_{RS}(r, s)$ rappresenta le probabilità che in suonruo valori specifici della coppia R, S , dunque le probabilità di fallire puo' essere scritte:

$$p_f = P(R - S \leq 0) = \int_0^{\infty} \int_D^0 f_{RS}(r, s) dr ds$$

Ora se R ed S sono indipendenti

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_R(r) f_S(s) dr ds$$

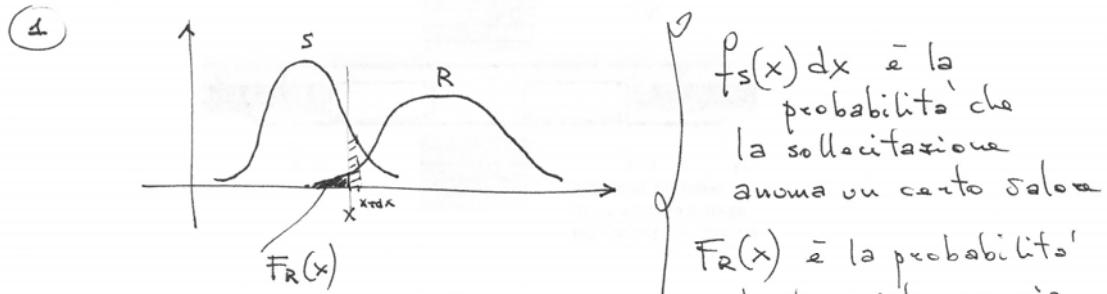


(1)

Questo integrale si può scrivere alternativamente in due diversi modi

$$(1) \quad p_f = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) f_s(x) dx, \quad (2) \quad p_f = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_s(x)] f_R(x) dx$$

Questi sono di semplice interpretazione:



L'interpretazione di (2) è esattamente simile. Il valore di p_f dipende dalla vicinanza e delle "acutezza" delle 2 distribuzioni.

Un caso particolare: f_R ed f_s indipendenti e normali
Considerata la variabile $Z = R - S$ c'è fallimento se $Z \leq 0$
ma come visto se R, S normali lo è anche Z , con parametri

$$\rightarrow \mu_Z = \mu_R - \mu_S \rightarrow \sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2$$

$p_f = P(Z \leq 0)$ se Z è normale (a parità di standard deviation)

$$Z_S = \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \quad \text{richiedere } Z \leq 0 \rightarrow Z_S \leq \left(\frac{-\mu_Z}{\sigma_Z} \right)$$

$$p_f = P\left(Z_S \leq \left(\frac{-\mu_Z}{\sigma_Z} \right)\right) = P\left(Z_S \leq \frac{-(\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) = \Phi(-\beta)$$

Φ indice di sicurezza

probabilità cumulata

Fai notare gli effetti dei parametri $\mu_R, \mu_S, \sigma_R, \sigma_S$

(2)

Esempio

Consideriamo una trave in legno di 5m con un carico centrale Q , $\mu_Q = 3 \text{ kN}$ e varianza $\sigma_Q^2 = 1 (\text{kN})^2$. La resistenza flaminante della trave ha media $\mu_R = 10 \text{ kN.m}$ e $\text{cov} = 0.15$

$$S = \frac{QL}{4} = Q \cdot \frac{5}{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_S = \frac{5}{4} \mu_Q = 13.75 \text{ kN.m} \\ \sigma_S^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \sigma_Q^2 = 1.56 (\text{kN.m})^2 \end{array} \right.$$

$$\sigma_S^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \sigma_Q^2 = 1.56 (\text{kN.m})^2 \text{ var}(Y) = \sum_i \sum_j \text{aij} \sigma_i \sigma_j$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R = 10 \text{ kN.m} \\ \sigma_R^2 = (\text{cov} \cdot \mu_R) = 2.25 (\text{kN.m})^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{in questo} \\ \text{caso c'è solo} \\ i=j \end{array}$$

$$\sigma_R^2 = (\text{cov} \cdot \mu_R) = 2.25 (\text{kN.m})^2 \quad \mu_e = \mu_R - \mu_S = 6.25$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 = 3.81 \rightarrow \sigma_z = 1.95$$

$$\beta = \frac{6.25}{1.95} = 3.20 \quad \phi(-3.20) = \underline{\underline{f \cdot 10^{-4}}} \quad \phi_f$$

Fattori di sicurezza, legati con ϕ_f

Cercheremo di capire come i fattori di sicurezza λ_0 sono legati alle probabilità di collasso, nel caso si supponga R e S normali distribuite

Definiamo il fattore di sicurezza centrale $\lambda_0 = \frac{\mu_R}{\mu_S}$
In genere non viene utilizzato tale fattore, ma vi definiscono valori caratteristici definiti come segue,

$$R_k = \mu_R \left(1 + k_R V_R \right) \quad \text{coefficiente di variazione } V_R / \mu_R$$

1.645 se si tratta del 5% e la distribuzione

$$S_k = \mu_S \left(1 + k_S V_S \right)$$

che sono indipendenti da k

è normale → sul testo c'è una tabella dei valori caratteristici del cov e del tipo di distribuzione fornisce i valori caratteristici definiti dalla media.

(3)

È possibile così definire un fattore di sicurezza caratteristico come:

$$\lambda_K = \frac{R_K}{S_K}, \quad \text{ora consideriamo le sorgibili}$$

normali distribuite, si ha:

$$\phi_f = \phi \left(\frac{-(\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right) = \phi \left(\frac{-(\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{V_R^2 \lambda_0^2 + V_S^2}} \right) = \text{se si divide per } \mu_S$$

$$= \phi \left(\frac{-(\lambda_0 - 1)}{\sqrt{V_R^2 \lambda_0^2 + V_S^2}} \right)$$

ora tutto il fattore tra parentesi è
di "da da un punto di vista
tabella e' in corrispondenza bivoca
con β_f (quanti lo rappresenta)

$$\beta = \frac{\lambda_0 - 1}{\sqrt{V_R^2 \lambda_0^2 + V_S^2}} \quad \text{da cui} \quad \beta^2 = \frac{(\lambda_0 - 1)^2}{V_R^2 \lambda_0^2 + V_S^2} \rightarrow \beta^2 (V_R^2 \lambda_0^2 + V_S^2) = \lambda_0^2 + 1 - 2\lambda_0$$

ordiniamo in λ_0

$$\lambda_0^2 \left(1 - \beta^2 V_R^2 \right) - 2\lambda_0 + \left(1 - \beta^2 V_S^2 \right) = 0$$

da cui:

$$\lambda_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (1 - \beta^2 V_R^2)(1 - \beta^2 V_S^2)}}{1 - \beta^2 V_R^2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 1 + \beta^2 (V_R^2 + V_S^2) - \beta^4 V_R^2 V_S^2}}{1 - \beta^2 V_R^2} =$$

$$= \frac{1 \pm \beta \sqrt{V_R^2 + V_S^2 - \beta^2 (V_R^2 V_S^2)}}{1 - \beta^2 V_R^2} = \frac{1 \pm \beta \sqrt{V_R^2 + V_S^2 (1 - \beta^2 V_R^2)}}{1 - \beta^2 V_R^2} \quad \begin{matrix} \text{la soluzione} \\ \text{e quella} \\ \text{con il "+"} \end{matrix}$$

Se si vuole la relazione con λ_K , basta ricordare che

$$\lambda_K = \frac{R_K}{S_K} = \frac{\mu_R (1 - k_R V_R)}{\mu_S (1 - k_S V_S)} = \frac{1 - k_R V_R}{1 - k_S V_S} \lambda_0$$

Esempio

Supponiamo che S sia caratterizzato da $\mu_S = 60$, $V_S = 0.2$ e distribuito come una Gumbel, il frattile al 95%. Si puo' calcolare dalla convolata, ci ricordiamo che

$$F_Y(y) = e^{-e^{-\alpha(y-u)}} \quad \text{in cui} \quad \alpha^2 = \frac{\pi^2}{6 V_S}$$

$$V_y = V_S \cdot \mu_S = 12 \quad \text{da cui calcolo } \alpha \text{ e } u:$$

$$u = \mu_y - \frac{(\bar{r})_{\text{uler}}}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{V_y} \cdot \sqrt{6}} = 0.1069, \quad u = 60 - \frac{0.57722}{0.1069} = 54.6, \quad \text{dunque:}$$

$$0.95 = e^{-e^{-0.1069(S-54.6)}} \rightarrow S = 82.38 \quad \dots \text{si potessero usare le tabelle}$$

2-2

Come visto l'integrazione dell'integrale di convolazione che ci dà $F_Z(z)$ è possibile solo in specifici casi, in particolare con riferimento al caso di sicurezza $Z = R/S$ se sono normali, un'altra possibilità è l'uso del rapporto $Z = R/S$ se le variabili sono log-normali. (Esercizio)

Problemi di affidabilità funzionale

Per molti problemi la semplice formulazione proposta non è interamente adeguata, non si possono definire Z sole favorevoli e inoltre anche quando ciò è possibile non è detto che siano indipendenti (ci può essere in cui alcuni carichi si oppongono al collaudato limite d'equilibrio).

Il primo passo è definire le variabili base del sistema: dimensioni, peso prop., resistente, carichi \rightarrow importanti è il livello di affidamento: la resistenza a compressione è un parametro base, ma in resto dipende da altri fattori (A/C , frammentazione...)

Sarebbe bello che le variabili base fossero indipendenti, invece così non è, si parla al legame tra resistenza e rifidanza (t, r)

Quando non si può fare a meno di considerare variabili legate fra loro, bisogna capire la dipendenza, la matrice di correlazione ci dice qualche cosa, ma non tutto!

Le distribuzioni da associare alle singole variabili dipendono da cosa si ha, in particolare si può:

questi sono
sempre specificati

(test di Kolmogorov-Smirnov) →

- infine dati disponibili
- fare delle considerazioni di tipo sottostitutivo
- utilizzare leggi finite (teorema limite centrale)

Se non si può stimare in misura affidabile una distribuzione, si cerca di farne una salutazione deterministica (point estimate), o una valutazione basata almeno sui momenti principali.

Tutto questo bisogna sostituirci (a base R-S, ma \bar{x} il settore delle variabili base, la resistenza e gli effetti possono essere espressi così:

$$R = G_R(\bar{x}), S = G_S(\bar{x}) \quad \text{ad esse saranno associate}$$

delle funzioni densità di probabilità definite in base

ai le seguenti funzionali e le

cumulate potremo ottenerci per semplice integrazione multipla.

$$F_R(r) = \int_{-\infty}^r \dots \int_{-\infty}^r f_{\bar{x}}(\bar{x}) d\bar{x} \quad \text{analogamente (2 cose) vede per } S$$

è il dominio

delle variabili di \bar{x}

cui corrisponde una

resistenza minore di r

Le funzioni densità di probabilità e densità cumulata andrebbero utilizzate nell'integrazione di convoluzione per il calcolo della F_p

Per fortuna questa può essere evitata, perché è possibile formulare l'equazione di stato limite $G(\bar{x})$, se $G \leq 0$ niamo nel dominio di fallimento

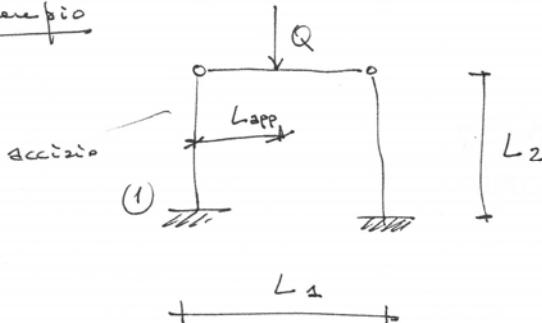
Una rilevante proprietà di questa funzione è quella che

$\frac{\partial G}{\partial x_i} > 0$ per le variabili che affanno resistenza e quindi allontanano dallo stato limite

$\frac{\partial G}{\partial x_i} < 0$ per le var. sollecitate

⑥

Esempio



Vogliamo studiare la
probabilità della colonna 1

$$S = Q \frac{L_1 - L_{app}}{L_1} = \text{se } L_{app} = d L_1$$

$$= Q (1-d) \quad \begin{matrix} \text{i parametri} \\ \text{statistici sono} \\ \text{nellezza} \end{matrix}$$

Q, L_{app}, L_1
(e di conseguenza d)

Per quanto attiene alla resistenza:

$$G(\underline{x}) = FN\left(\sigma_y \cdot A, \frac{L_2}{P}\right) - Q(1-d) \quad \underline{x} = [Q, L_{app}, L_1, \sigma_y, A, L_2, P]$$

Ponendo alla formulazione generale

$$P_f = \mathbb{P}[G(\underline{x}) \leq 0] = \int_{-\infty}^{\underline{x}} \int_{G(\underline{x}) \leq 0} f_{\underline{x}}(\underline{x}) d\underline{x}$$

R ed S sono
chiaramente dentro
 \underline{x}

$$\text{Se le variabili sono indipendenti } f_{\underline{x}}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i)$$

L'integrazione di questo caso è un'operazione piuttosto complicata, e tecnicamente eseguibile in forma chiusa, diventa utile de novo peribili per rendere il tutto più trattabile: semplificare il processo di integrazione mediante metodi numerici approssimati (metodo MonteCarlo), semplificare la forma della funzione integranda (per esempio rendendola multi-normale ed usando le proprietà di tali funzioni, metodo FORM e SORM), semplificando il dominio di integrazione.

Problema di affidabilità condizionata

17/11/08

Si parla di problema condizionato quando non si hanno informazioni complete sulle statistiche delle variabili \tilde{x} , per esempio media e varianza potrebbero essere stimate e non note con precisione.

Se i parametri su cui è fondata la stima li indiciamo θ e sono a loro volta delle variabili casuali, il problema diventa la valutazione di una probabilità di colpo condizionata.

Chiaramente anche l'equazione di stato ha le due funzioni di θ , così come la funzione probabilità condizionata

E' importante capire che le incertezze su X sono diverse da quelle su θ , le prime sono incertezze intrinseche le seconde legate alla mancanza di informazioni. La probabilità condizionata sarà:

$$p_f(\theta) = \int_0^{\infty} f_{\tilde{x}|\theta}(x|\theta) dx$$

distribuzione predittiva per $f_{\tilde{x}|\theta}$

$G(x|\theta) \leq 0$

Il problema è che per prendere delle decisioni a noi serve una probabilità non condizionata, si può in tal senso utilizzare il teorema delle probabilità totali,

$$f_f = E[p_f(\theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} p_f(\theta) f_{\theta}(\theta) d\theta$$

ricorda gli
gli eventi
indipendenti ed
esclusivi

ristituendo

$$f_f = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{G(x|\theta) \leq 0} f_{\tilde{x}|\theta}(x|\theta) dx \right) f_{\theta}(\theta) d\theta \Rightarrow$$

integrale predittivo
è una sorta di media pesata delle distribuz.
condizionate

(1)

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\tilde{x}|\theta}(x|\theta) \cdot f_{\theta}(\theta) d\theta$$

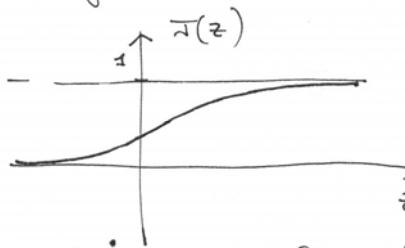
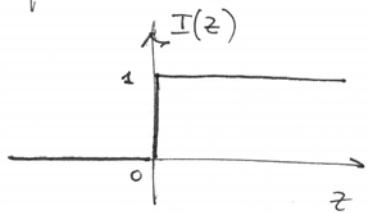
Un'altra interpretazione di natura condizionale puo' essere la seguente. Consideriamo una funzione I detta come segue:

$$I(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

questa funzione puo' essere utilizzata come una funzione di utilita' dello stato. Dunque $I(G(x))$ e' una funzione che seleziona se il rischio e' in condizioni di collasso

uno negli altri casi.

Se questo tipo di approccio puo' avere senso con riferimento alla situazione di collasso, ne ha molto meno nelle condizioni di servizio, dove spesso questi fenomeni, deformazione... possono presentarsi in misura variata e con intensita' differenti



La probabilita' di collasso (stretta non necessariamente intesa come collasso)

in potrebbe scrivere:

$$f_f = P\left(\int^x G(x)\right) = \int_{-\infty}^x J[G(x)] \cdot f_x(x) dx$$

e' il complemento $\underline{J^c = 1 - J}$

La soluzione di questo integrale non e' semplice, peraltro in alcuni casi tale integrale puo' essere comunque interpretato come una probabilita' condizionata.

Nell'ambito del problema risulta la curva $J^c(G(x))$ puo' essere una sorta di curva di accettabilita' restrittiva, che varia al variare di Θ magitudine del rischio entrante. L'integrazione su tutti i Θ con le rispettive probabiliti' mi fornisce le probabiliti' di collasso.

(2)

Metodi di integrazione e simulazione

Discussiamo le possibilità di soluzione dell'integrale:

$$\Phi_F = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{G(x) \leq 0} f_X(x) dx , \quad \text{le strade sono tecnicamente 3}$$

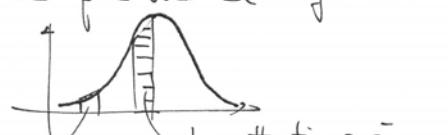
1- Diretta integrazione

2- Integrazione numerica: metodo MonteCarlo

3- Evitare l'integrazione trasformando la funzione integranda in una funzione densità di probabilità coniuta multi-normale.
(per quest'ultima esistono risultati già disponibili)

4)-5) ha primitiva multi-dimensionale della funzione integranda è spesso impossibile da ottenere, ecco perché si utilizzano diversi metodi numerici

- Regola trapezoidale: funziona bene per sia delle facce di $f_X(x)$



- Metodi basati su di un'approssimazione di tipo polinomiale:
(polinomi di Hermite)

la sostituta è concentrata nella zona della media
ma di intuito specifica inflazione.

I metodi numerici funzionano molto meglio nel caso dell'integrale di convoluzione del problema base che nel caso generale, ma per errori di approssimazione sia per l'enorme sforzo computazionale. (per i tempi di calcolo sono generalmente non praticabili).

Nel caso le funzioni sono normali e indipendenti la soluzione è più semplice, come è spesso utile applicare il teorema della diseguenza di Stokes per abbassare di 1 grado la completezza dell'integrale passando dal domio alla frontiera.

(3)

Il problema è che nel maggior numero dei casi le variabili in \underline{X} sono tutte tra loro da una relazione di tipo lineare. In tal caso le tecniche numeriche di integrazione sono poco efficaci, ecco invece che una tecnica adottata in altri contesti sia in cattedra: il metodo MonteCarlo che non pone alcuna ipotesi di base sulle caratteristiche delle variabili.

L'idea è quella di effettuare un campionamento casuale al fine di simulare un grande numero di eventi e studiare i risultati. Questo equivale a dire campiono il settore \underline{X} in misura coerente con la singola distribuzione di probabilità e poi cercare quali delle combinazioni ottenute violano le stesse limiti.

$$P_f = \frac{n(G(\underline{\tilde{x}}_i) \leq 0)}{N} \quad \begin{array}{l} \text{dove } n \text{ è il campione, } N \text{ è l'accortezza.} \\ \text{è l'accortezza.} \end{array}$$

Tale metodo vale la pena utilizzarlo se il numero di simulazioni necessarie è minore del numero di punti che serve in una integrazione di tipo numerico, cioè è vero per problemi di grandi dimensioni, perché i punti possono essere presi in misura casuale e non seguendo strette regole.

Per applicare il metodo MonteCarlo c'è la vecchia' che:

- siano disponibili metodi che consentano il campionamento delle variabili base \underline{X}
- una strategia di campionamento che sia semplice e affidabile
- la considerazione degli effetti della complessità nel calcolo di $G(\underline{\tilde{x}}_i)$
- Data una tecnica di campionamento, capire quanti campioni servono

Si deve tenere esplicitamente in conto anche della dipendenza tra le variabili

Da un punto di vista fisico è semplice fare un campionamento casuale, basta buttare un po' di numeri in un sacchetto, mischiare ed estrarre, la casualità co la mette la natura. La funzione densità di probabilità, essendo la distanza tra i numeri molto più piccola dell'ampiezza dell'intervallo, è uniforme, del tipo

$$\begin{aligned} F_R(r) &= r \quad \text{per } 0 \leq r \leq 1 \\ \left\{ \begin{array}{ll} f_R(r) &= 1 \\ &\dots \\ &= 0 \end{array} \right. & \text{altrimenti} \end{aligned}$$

In realtà sostanziosamente tale procedura è molto più complesso di quello che puo' apparire. Infatti le macchine calcolatrici un "falso" generatore casuale di numeri (PRNG), tali numeri, infatti, vengono valutati con una formula ricorsiva avente ciclo molto lungo, per le pratiche applicazioni, tuttavia, questo approccio funziona bene. Questo approccio, così come quello delle tavole dei numeri casuali, prevede numeri preconfezionati che non sono casuali nel vero senso del termine.

Per evitare contesti filosofici, quando il metodo MonteCarlo utilizza uno di questi approcci, si parla di "quasi-MonteCarlo", tale approccio è comunque usato per via della certezza di uniformità della distribuzione da cui i numeri sono tirati fuori.

Diciamo che ora siamo in grado di estrarre numeri da una distribuzione uniforme in maniera casuale, il problema è che le nostre variabili non sono uniformemente distribuite, un campionamento in una distribuzione qualsiasi è detta una "casuale sartaia".

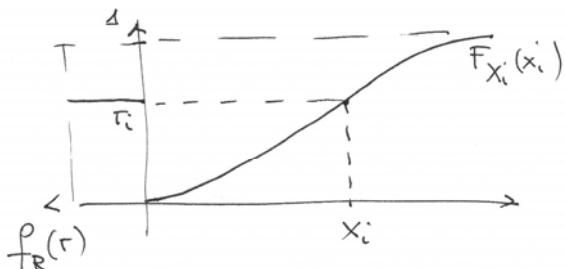
Per generare una "sartaia casuale" da una "casuale pura" il metodo più generale è quello della "trasformata inversa".

Si prende una variabile X_i avente distribuzione cumulata $F_{X_i}(x_i)$, l'idea è quella di generare numeri compresi

(5)

tra 0 e 1 e valutare quel valore della variabile la cui cumulata corrisponde al numero estratto

$$F_{X_i}(x_i) = \tau_i \rightarrow x_i = F_{X_i}^{-1}(\tau_i)$$



poiché la cumulata è funzione strettamente crescente nell'intervallo in cui è definita "f", l'inversa esiste di sicuro.

Inoltre essa può applicarsi anche a variabili di cui è nota solo la cumulata mediata semplici operazioni.

Variate casuali per specifiche distribuzioni possono essere ottenute con specifici algoritmi, si cita quello di Box e Muller i quali diedero le seguenti formule:

$$\begin{cases} U_1 = \sqrt{-2 \ln \tau_1} \sin 2\pi \tau_2 \\ U_2 = \sqrt{-2 \ln \tau_1} - \cos 2\pi \tau_2 \end{cases}$$

che fornisce una coppia esatta di variate normali indipendenti standardizzate.

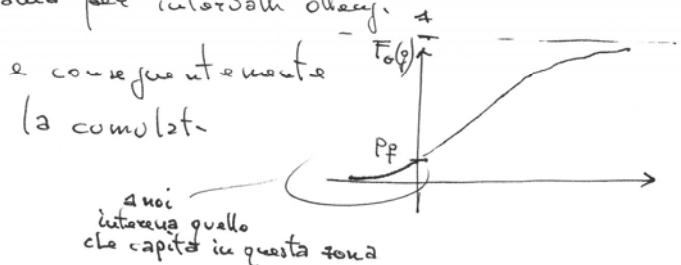
Ora il metodo Monte Carlo nel suo approssimato più semplice funziona bene se la probabilità di fazione si può scrivere come:

$$\hat{P}_f = \bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[G(x_i) \leq 0] f_X(x_i) dx$$

questa è la media della funzione indicatore I , per la quale uno stimatore oggettivo (unbiased) è proprio:

$$\hat{P}_f = \bar{T}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[G(\tilde{x}_i) \leq 0]$$

Qualche piccola riflessione ora, chiamiamo $g = G(\tilde{x})$, ovvero la realizzazione della funzione stato binaria per un certo campionamento se rado a piazzare un istogramma per intervalli ottengono



(6)

Dunque per avere un campionamento più raffinato bisognerebbe fare in modo di prendere punti con una distribuzione che privilegi i punti della coda che ci interessano. La scelta di questa distribuzione non è semplice, permette però di rendere più significativo il campionamento effettuato.

All'altra questione interessante è quanti campioni ci servono per avere un fisso livello di confidenza.

\tilde{x} è una variabile casuale, dunque anche la funzione indicatrice lo è, pur se ha solo due valori. Ora chiamiamo T_1 la somma delle variabili $I[G(\tilde{x}) \leq 0]$ per un certo campionamento, se i campioni tendono a ∞ la distribuzione approssima una normale. Calcoliamo la media di questa distribuzione: (considerando che trattasi di somma di variabili casuali)

$$E(T_1) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} E[I(G(\tilde{x}_i) \leq 0)] = E[I(G \leq 0)]$$

questa media, come visto, è un ottimo stimatore della probabilità di fallire.

Poniamo alla variabile... non avendoci correlazione fra i diversi punti del campionamento risulta:

$$\textcircled{*} \quad \text{Var}_{T_1} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2} \text{Var}[I(G \leq 0)] = \frac{\text{Var}_{I(G \leq 0)}}{N}$$

Questo evidenzia come la deviazione standard dell'stimata MonteCarlo, data con la radice di N, ora serve una stima di Var_{T_1} , ci ricordiamo che:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (\mu_X)^2, \text{ nel nostro caso}$$

$$\text{Var}[I(G \leq 0)] = \int \int I[G(\tilde{x}) \leq 0]^2 f_{\tilde{x}}(\tilde{x}) d\tilde{x} - \frac{1}{N}^2$$

Nota bene che questa varianza ci serve per poter calcolare le varianze di T_1 , avendo i due valori definiti dalla $\textcircled{*}$

Chiaramente non conoscendo le caratteristiche statistiche di I , una varianza stimata in base al campionamento

In particolare

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2) = \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \underbrace{\frac{2\bar{x}}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i}_{\text{se divido}} + \frac{n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2n}{n-1} \bar{x}^2 + \frac{n\bar{x}^2}{n-1} = \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n\bar{x}^2}{n-1} \quad \begin{array}{l} \text{e moltiplico} \\ \text{per "n"} \end{array}
 \end{aligned}$$

nel nostro caso $x_i = I[G(\hat{x}_i) \leq 0]$, per cui

$$S_{I[G \leq 0]}^2 = \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N I[G(\hat{x}_i) \leq 0]^2 - N \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[G(\hat{x}_i) \leq 0] \right)^2 \right]$$

questa è la migliore stima che abbiamo di $\sigma_{I[G \leq 0]}^2$, tuttavia tale stima risulta del campionamento, e meglio dai suoi risultati per cui non ci è utile in fase di prezzo. (la stessa cosa vale per la media).

Shooman suggerisce quindi di utilizzare per $\sigma_{\hat{x}}$ quelli tipici di una distribuzione binomiale: $N = Np \quad \sigma = \sqrt{Nqp}$

Tenendo presente che N è grande e p è piccolo.

Essendo \hat{x} distribuita in maniera normale per ottenere un certo livello di confidenza deve avere:

$$\textcircled{*} P[-k(Nqp)^{1/2} < \hat{x} - np < k(Nqp)^{1/2}] = c$$

si ricorda che l'obiettivo

è stituire la media \bar{x} che è l'indicatore della p

Detto $\varepsilon = \frac{\bar{x} - np}{np}$ l'errore adimensionale, in corrispondenza di un certo numero N di prove, e relativo ad un desiderato livello di confidenza, uno può ottenerlo da $\textcircled{*}$

$$\varepsilon = k \sqrt{\frac{q}{np}} = k \sqrt{\frac{(1-p)}{np}}$$

(8)

per esempio con un livello di confidenza del 95% per $N=10^5$ e $p_f = 10^{-3}$, l'errore su T_A sarà

$$\varepsilon = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1-10^{-3}}{10^5 \cdot 10^{-3}}} \cong \frac{1.96}{\sqrt{10^2}} = \frac{1.96}{10} = 0,196 \cong 20\%$$

Questo significa che se calcolo un valore di T_A tirandolo fuori da 10^5 prove io ho il 95% di probabilità che quel valore di differenza dal valore vero di meno del 20%

Quindi fissato il livello di confidenza (in maniera presumibilmente alto, in modo che si abbiano "quasi certezze") può salutare il numero di prove che mi servono per sbagliare meno di una certa soglia:

$$\varepsilon = k \sqrt{\frac{1-p}{Np}} \rightarrow \frac{\varepsilon}{k} = \sqrt{\frac{1-p}{Np}} \rightarrow N = \left[\left(\frac{\varepsilon}{k} \right)^2 \cdot \frac{p}{1-p} \right]^{-1} = \left[\left(\frac{\varepsilon}{k} \right)^2 \cdot p \right]^{-1}$$

Per esempio si voglia sbagliare del 5% sulla salutazione di una probabilità di fallire con una confidenza del 95%, $p_f = 10^{-5}$

$$N > \left(\frac{k}{\varepsilon} \right)^2 \cdot \frac{1}{p} = \left(\frac{1.95}{0.05} \right)^2 \cdot \frac{1}{10^{-5}} = 10^5 \cdot 400 \cdot (1.95)^2 \cong 10^5 \cdot 1600 = \underline{\underline{1.6 \cdot 10^8}} \\ \underline{\underline{160 \text{ milioni}}}$$

Una formula generalmente utilizzata per una stima di N , e che non prevede un errore atteso è la seguente

$$N > \frac{-\ln(1-\alpha)}{p_f} = \frac{-\ln(0.05)}{10^{-5}} \cong 3 \cdot 10^5 = \underline{\underline{300.000}}$$

a che errore corrisponde?

$$\varepsilon = 1.96 \sqrt{\frac{1}{3 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5}}} = \frac{1.96}{\sqrt{3}} = 1.13 \quad \text{troppe false?}$$

(9)

Esempi.

ha trazione in una reazione S ha proprietà statistiche $N(10.0, 1.25)$ e la resistenza $R \rightarrow N(13.0, 1.5)$, quale probabilità di collasso si stima applicando in maniera "crude" il metodo MonteCarlo, supponendo le variabili siano indipendenti?

Ci limitiamo a 10 campioni per entrambe le variabili utilizzando i valori della tabella dei numeri casuali, l'idea è semplice prendiamo il 1° numero casuale $\hat{u}_1 = 0.9311$, andiamo nella cumulata e salutiamo

$$\hat{x}_1 = \phi^{-1}(\hat{u}_1) = 1.49 \quad \text{da cui nota la media e la varianza ottenute}$$

$$\hat{x}_1 = \frac{\hat{r}_1 - \mu_R}{\sigma_R} = \frac{\hat{r}_1 - 13}{1.5} = 1.49 \rightarrow \hat{r}_1 = 1.5 * (1.49) + 13 = 15.23$$

Si prendono altri 10 numeri casuali e si formano le coppie \hat{r}_1, \hat{s}_1 che si confrontano. Se lo si fa si vede che in un unico caso $\hat{s}_1 > \hat{r}_1$, per cui la probabilità di fallimento si stima come 0.1.

La probabilità si può anche calcolare col metodo del margine di sicurezza:

$$P_f = \phi \left[\frac{-(13-10)}{\sqrt{(1.5)^2 + (1.25)^2}} \right] = \phi(-1.54) = 0.0618$$

~ ~

Un'altra maniera di ragionare è quella di usare la cumulata e di applicare il metodo MonteCarlo all'integrale di convolutione

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_S(r)) f_R(r) dr = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(s) f_S(s) ds, \quad \text{in questo caso bastano}$$

10 numeri casuali, l'integrazione è singola, il procedimento è semplice

$\hat{u}_1 = 0.9311$, si calcola $\hat{x}_1 = F_S^{-1}(\hat{u}_1)$, e da \hat{x}_1 si passa ad \hat{s}_1 con $\hat{x}_1 = \frac{\hat{s}_1 - \mu_S}{\sigma_S}$, ora ci serve $F_R(\hat{s}_1)$ per calcolarlo devo trovare il valore della standard di R corrispondente a \hat{s}_1 , $\hat{v}_1 = \frac{\hat{s}_1 - \mu_R}{\sigma_R}$ e poi calcolare $F_R(\hat{s}_1) = \phi(\hat{v}_1)$. Trovate 10 $\phi(\hat{v}_1)$ in romanzo e in multipli per 0.1 (ne facciamo la media) (10)

Averemo capito come la probabilità di failure potesse salutare attraverso l'introduzione, nell'ambito di una strategia alla Montecarlo, della variabile \bar{T}_1

$$\hat{P}_f \approx \bar{T}_1 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I[G(\hat{x}_j) \leq 0]$$

Tale variabile per N grande approssima una normale, la cui

media è:

$$E[\bar{T}_1] = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} E(I[G(\hat{x}_j) \leq 0]) = E(I[G(\hat{x}_j) \leq 0])$$

e la cui varianza è pari a

$$\sigma_{\bar{T}_1}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2} \text{Var}(I[G \leq 0]) = \frac{\sigma_I(G \leq 0)^2}{N^2} \cdot N = \frac{\sigma_I(G \leq 0)^2}{N}$$

Dunque la deviazione standard di \bar{T}_1 è inversamente proporzionale alla radice quadrata di N , tutto ciò non è un risultato "piacevole" se si pensa che nel caso del metodo trapezoidale la dipendenza inversa è rispetto a N^2 e in quello di Simpson è di N^4 .

Per migliorare la "velocità" di convergenza del metodo ci sarebbe bisogno di avere informazioni in merito al problema da risolvere, cercando di indirizzare il campionamento verso le zone in cui si manifesta il collasso. Tale idea è alla base delle tecniche di "importance sampling".

Sabbiamo che la probabilità di failure può essere scritta come:

$$\hat{P}_f = \bar{T} = \int \dots \int I[G(x) \leq 0] f_x(x) dx = \int \dots \int I[G(x) \leq 0] \underbrace{f_x(x)}_{h_v(x)} \cdot h_v(x) dx$$

questa
fusione è

detta di "importance sampling"
o meglio densità di probabilità di IS

1

Se $h_v(x)$ è interpretata come una distribuzione di probabilità tutto l'integrale può essere visto come il calcolo di una media:

$$\bar{v} = E \left\{ I[G(\underline{x}) \leq 0] \frac{f_x(\underline{x})}{h_v(\underline{x})} \right\} = E \left[\frac{I^f}{h} \right]$$

In altre parole $h_v(x)$ è una funzione che pesa i valori che acquista la variabile \underline{x} quando definisce $f_x(\underline{x})$. Ora tutto il ragionamento che abbiamo fatto per \bar{v}_1 la scorsa volta lo poniamo ripetere pari pari per \bar{v}_2 definita come segue:

$$\hat{v}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \bar{v}_2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left\{ I[G(\hat{v}_j) \leq 0] \frac{f_x(\hat{v}_j)}{h_v(\hat{v}_j)} \right\}$$

dove stavolta la scelta dei campioni è regolata dalla funzione $h_v(x)$. Analogamente a quanto già visto

$$\sigma_{\bar{v}_2}^2 = \underbrace{\text{Var} \left(\frac{I^f}{h} \right)}_N \longrightarrow \text{questa quantità si può calcolare come:}$$

$$\star \quad \text{Var} \left(\frac{I^f}{h} \right) = \int \dots \int \left[I[G(x) \leq 0] \frac{f_x(x)}{h_v(x)} \right]^2 h_v(x) dx$$

Il problema sarebbe ora quello di scegliere $h_v(x)$ in maniera tale da minimizzare

$\text{Var} \left(\frac{I^f}{h} \right)$ e di conseguenza quella di \bar{v}_2 .

Supponiamo di scegliere $h_v(x)$ come:

$$h_v(\underline{x}) = \frac{|I[G(\underline{x}) \leq 0] \cdot f_x(\underline{x})|}{\int \dots \int |I[G(\underline{x}) \leq 0] \cdot f_x(\underline{x})| d\underline{x}}$$

e sostituiamolo in \star

(2)

$$\text{Var}\left(\frac{\mathbb{I}_T}{h}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbb{I}^2[\mathbb{I}_T f_x(x)]^2}{\mathbb{I}^2[\mathbb{I}_T f_x(x)]} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}[\mathbb{I}_T f_x(u)] du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}[\mathbb{I}_T f_x(x)] dx \right)$$

questo è
un numero
e va fuori dall'integrale

$$- \bar{T}^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathbb{I}[x] f_x(x) \right| dx \right]^2 - \bar{T}^2 = 0 \quad \begin{array}{l} (\text{sempre che la funzione}) \\ (\text{integrandà non}) \\ (\text{cambi segno}) \end{array}$$

Fisicamente la funzione densità di probabilità $h_y(y)$ scelta è $\neq 0$ solo nella zona in cui c'è collasso, e se uno ci pensa è una sorta di percentuale con cui ogni singolo punto nel dominio di failute contribuisce al collasso.

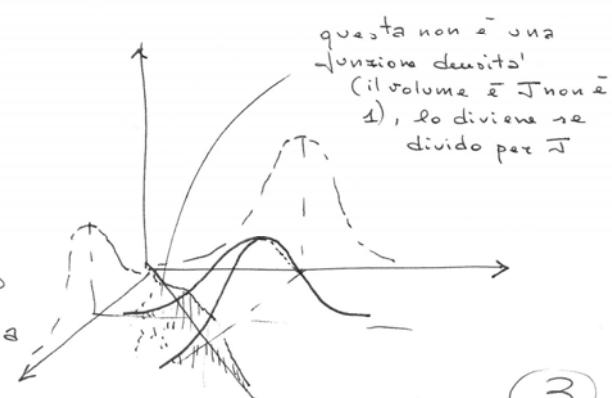
Il problema è che per finire in tal modo la funzione densità di probabilità della funzione d'importanza dovrei conoscere la probabilità di collasso \bar{T} .

In altre parole per una funzione integranda non negativa, il che equivale a dire per una funzione indicatore non negativa, visto che per definizione una funzione densità di probabilità è positiva ovunque, si può ridurre la varianza a patto di avere una stima buona della probabilità di collasso a disposizione dall'inizio.

Guardiamo meglio come fatta la funzione $h_y(y)$:

$$h_y(y) = \frac{\mathbb{I}[G(y) \leq 0]}{\bar{T}} \cdot f_x(x)$$

non è altro che la funzione densità di probabilità congiunta presa solo sul dominio di collasso e scalata in maniera che questa diventi una funzione densità



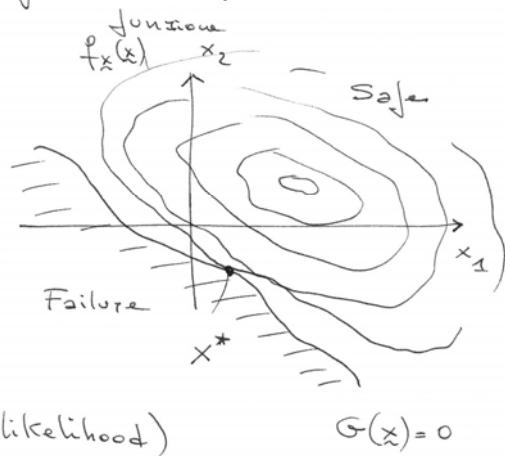
Si è dunque capito che la derivazione di una funzione ottima $U_{\tilde{x}}(\tilde{x})$ è un problema che non può essere risolto, tuttavia esistono delle scelte per $\tilde{U}_{\tilde{x}}(\tilde{x})$ che portano comunque a buoni risultati. È chiaro che la zona di campionamento che ci interessa è quella nell'iperdominio di failure $G(\tilde{x})$ ed in particolare la zona di quel dominio in cui la funzione $f_{\tilde{x}}(\tilde{x})$ assume valori più grandi.

Una idea per individuare siffatta zona è quella di calcolare il punto x^* per il quale la funzione $f_{\tilde{x}}(\tilde{x})$ ha un massimo (problema di massimo libero). Tale punto è detto

punto di "massima probabilità" (maximum likelihood)

In alcuni casi non è possibile valutare tale punto, si parla al caso in cui la distribuzione è rettangolare, tale situazione, tuttavia, non è così critica come può apparire dato che la zona con $G(\tilde{x}) \leq 0$ è generalmente piccola (per piccolo), per cui una scelta arbitraria di x^* in questi casi ha un effetto poco determinante sul calcolo.

Una volta definito x^* , una scelta possibile è la semplice traslazione della funzione $f_{\tilde{x}}(\tilde{x})$ in maniera tale che la media sia x^* , un'altra scelta più appropriata sarebbe quella di utilizzare una multi-normale, aventi coefficienti di correlazione nulla e deviazioni standard pari alle singole σ_i . Queste scelte permettono un campionamento più ricorrente nella zona di interesse e permettono di trattare equazioni di stato lineari e non-lineari allo stesso modo.



$$G(\tilde{x}) = 0$$

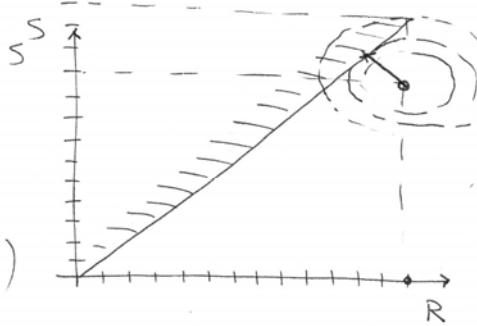
(4).

forme di $f_x(x)$ diverse vengono approssimate allo stesso modo. Quello che succede generalmente è che queste tecniche permettono di tenere un 50% di punti nel dominio di fallire contro il p_f % della distribuzione iniziale (Es. 100 punti $\rightarrow N_{15}=200$, $N_{10^{-5}}=10^7$).

Un altro vantaggio non trascurabile è che la funzione $h_x(x)$ può essere scelta liberamente, cioè consentire di far riferimento a componenti del vettore X indipendenti, il che è di per sé un enorme vantaggio quando invece la funzione $f_x(x)$ presenta un grado di correlazione fra le variabili. In quest'ultimo caso, infatti, il campionamento dovrebbe riguardare variabili casuali indipendenti, una operazione molto più complessa.

Esempio

Ricordiammo l'esempio già fatto $R \sim N(13, 1.5)$ $S \sim N(10, 1.25)$ la funzione densità di probabilità sarebbe normale bivariata, e nel caso di indipendenza sarebbe il prodotto tra le due distribuzioni una distribuzione adeguata per il campionamento, per la funzione d'importanza è la seguente. $I \sim N(13.5, 1.3)$



L'altra cosa da mettere in rilievo è che in questa applicazione si può non fare per la funzione di probabilità congiunta, ma utilizzare la formula:

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(s) f_S(s) ds \quad \text{con la novità di considerare la funzione cumulata di } R \text{ al posto della funzione indicatore}$$

Vediamo allora come procedere usando la stessa tabella dei numeri casuali della volta scorsa.

Si prende il primo numero casuale $\hat{u}_i = 0.9311$, si calcola il valore di campionamento riferendosi prima alla cumulata standard

$$\hat{x}_i = F_I^{-1}(\hat{u}_i) = \phi^{-1}(\hat{u}_i) = +1.49$$

da questa poniamo ricavare il campione riferendoci alla funzione d'importanza:

$$\hat{v}_i = 11.5 + 1.3 \cdot \hat{x}_i = 13.44$$

Ora basta calcolare $h_v(\hat{v}_i)$ che è il valore della normale $N(11.5, 1.3)$ in corrispondenza di 13.44, o detto in maniera più semplice è il valore della normale standard quando la cumulata è 0.9311

$$h_v(\hat{v}_i) = 0.1315, \quad \text{ci tocca ancora da calcolare } F_R(\hat{v}_i) \\ \text{e } f_S(\hat{s}_i)$$

per il calcolo di $F_R(\hat{v}_i)$ basta calcolare la variabile standard corrispondente a \hat{v}_i rispetto alla distribuzione di R e leggere la cumulata

$$\hat{r}_i = \frac{\hat{v}_i - 13}{1.5} = 0.29 \quad \phi(0.29) = 0.6141$$

per $f_S(\hat{s}_i)$ ci calcoliamo $\hat{s}_i = \frac{\hat{v}_i - 10}{1.25} = 2.75$ e da una tabella di distribuzione stand.

$$f_S(\hat{s}_i) = 0.0073$$

A questo punto calcolo

$$\frac{F_R(\hat{v}_i) \cdot f_S(\hat{s}_i)}{h_v(\hat{v}_i)} = 0.034$$

A questo punto l'unica cosa da fare è la media dei valori ottenuti partendo da diversi numeri casuali iniziali (6)