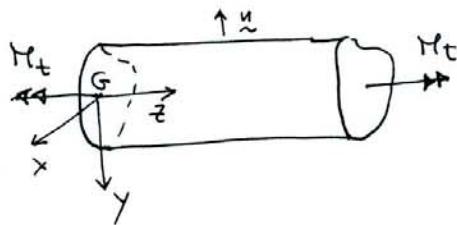
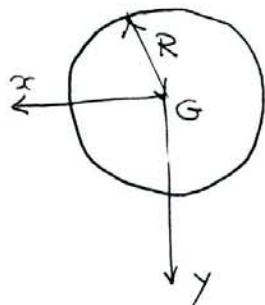


La sollecitazione di torsione : Richiami di Scienza delle costruzioni

Consideriamo il solido in figura caricato sulle due basi, da due momenti diretti in direzione "z" uguali e contrari in modo tale che l'equilibrio complessivo del solido sia rispettato. Il sistema di assi sia centrato nel baricentro e abbia come direzione quella degli assi principali d'inerzia. Come è nella logica dell'approssimazione De Saint Venant si procederà con il metodo semi inverso, ovvero si farà una ragionevole ipotesi sullo stato del solido per poi risalire alle proprietà generali.



Nel caso in oggetto la cosa più semplice è partire dal campo di spostamenti, e per facilitare il più studio assumere una sezione circolare.



E' naturale supporre che i punti della sezione non subiscono spostamenti lungo z, mentre per le altre due si suppone che la sezione ruoti rigidamente di un certo angolo nel suo piano.

Prendendo la sezione di partenza come riferimento, le sezioni rette della trave ruoteranno differentemente, in particolare la rotazione sarà una funzione lineare di "z", ovvero crescerà man mano che ci si allontana dalla sezione di riferimento. Ciò equivale a dire che a momento torcente costante, l'angolo di rotazione relativa tra 2 sezioni poste a distanza fissata l'una dall'altra, non varia lungo la trave.

(1)

Se tale distanza è unitaria, puo' allora in maniera non univoca definirsi il cosiddetto "angolo unitario di torsione"

(rotazione relativa tra due sezioni rette a distanza unitaria). La rotazione relativa rispetto alla sezione di riferimento puo' così scivere: $\Theta(z) = \theta z$ — si misura in rad/cm

Poiché il moto è di tipo rotazionale nel piano, il generico

punto P subira' uno spostamento perpendicolare al segmento che lo unisce con il baricentro, il campo di spostamenti puo' scivere dunque:

$$\begin{cases} u = -\Theta(z)y = -\Theta yz \\ v = \Theta(z)x = \Theta xz \\ w = 0 \end{cases}$$

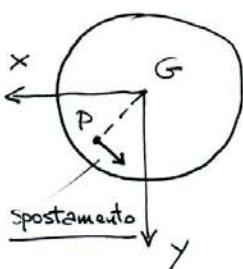
Partendo da questa espressione per il campo di spostamenti, passiamo prima al campo di deformazioni e poi a quello di tensioni, per mezzo dei legami costitutivi.

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\theta z + \theta z = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta y + 0 = -\theta y \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta x + 0 = \theta x \end{array} \right\}$$

E' possibile così passare alle tensioni:

$$\begin{array}{ll} \sigma_x = \frac{1}{E} (\epsilon_x - \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)) & \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \sigma_y = \frac{1}{E} (\epsilon_y - \nu(\epsilon_x + \epsilon_z)) & \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \sigma_z = \frac{1}{E} (\epsilon_z - \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)) & \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{array}$$

(2)



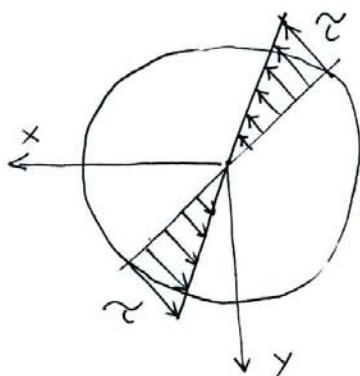
Essendo le "e" tutte nulle, così sarà anche per le tensioni normali, le uniche componenti di tensione non nulla saranno:

$$|\tilde{\tau}_{xz} = -G\theta_y| \quad e \quad |\tilde{\tau}_{yz} = G\theta_x|$$

E' banale dimostrare che tale campo di tensioni rispetta le equazioni indefinite di equilibrio, che in assenza di forze di volume si scrivono:

$$\operatorname{div} \tilde{\tau} = 0 \quad \text{con} \quad \tilde{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -G\theta_y \\ 0 & 0 & G\theta_x \\ -G\theta_y & G\theta_x & 0 \end{bmatrix}$$

è altresì semplice dimostrare che sul bordo il campo di tensioni non ha componenti perpendicolari alla frontiera. Cerdiamo di capire come è fatto il campo di tensioni all'interno della sezione. Ci sono solo tensioni tangenziali, la cui intensità nel generico punto è pari a:



$$|\tilde{\tau}| = \sqrt{\tilde{\tau}_{xz}^2 + \tilde{\tau}_{yz}^2} = G\sqrt{\theta_y^2 + \theta_x^2} = G\theta(r)$$

Inoltre se si
esegue il prodotto
scalare tra le
componenti di $\tilde{\tau}$ e il vettore
posizione del generico punto si ha:
distanza del
punto dall'origine

$$\tilde{\tau} \cdot \underline{PG} = \tilde{\tau}_{xz} \cdot x_p + \tilde{\tau}_{yz} \cdot y_p = -G\theta_y y_p + G\theta_x x_p = 0$$

Ovvero la risultante delle tensioni tangenziali ha un'intensità in ogni punto pari alla distanza dal baricentro per una costante ed è diretta normalmente alla congiungente del punto con il baricentro.

(3)

Passando alle sollecitazioni, avendo le σ tutte nulle, non ci sarà sforzo normale né flessione, ci possono avere solo taglio lungo x , lungo y e momento torcente.

$$T_x = \int_{\Sigma} \tilde{\tau}_{xz} d\Sigma = \int_{\Sigma} -G\theta y d\Sigma = -G\theta \int_{\Sigma} y d\Sigma = 0$$

$$T_y = \int_{\Sigma} \tilde{\tau}_{yz} d\Sigma = \int_{\Sigma} G\theta x d\Sigma = G\theta \int_{\Sigma} x d\Sigma = 0$$

gli assi
sono privi
d'inerzia
e baricentrici

$$M_t = \int_{\Sigma} (-\tilde{\tau}_{zx} y + \tilde{\tau}_{zy} x) d\Sigma = \int_{\Sigma} (G\theta y^2 + G\theta x^2) d\Sigma =$$

$$= \theta G \int_{\Sigma} (x^2 + y^2) d\Sigma \rightarrow \begin{matrix} \text{inerzia} \\ \text{olare della} \\ \text{sezione} \end{matrix} \rightarrow I_p$$

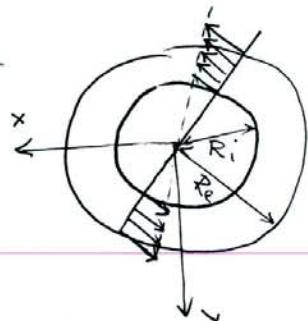
Dunque le ipotesi che abbiamo fatto sono compatibili con la presenza della sola sollecitazione di momento torcente, di valore pari a:

$$\boxed{M_t = \theta G I_p}, \text{ costante lungo l'intero sviluppo della trave}$$

questa relazione permette di legare causa ed effetto, momento torcente e angolo unitario di torsione.

Tutto lo sviluppo ivi svolto si estende anche al caso di corona circolare:

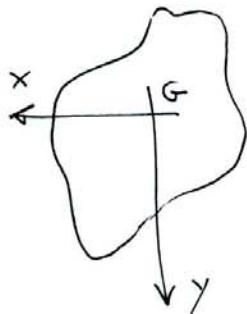
$$\theta = \frac{M_t}{G I_p} \quad \text{con } I_p = \frac{\pi (R_e^4 - R_i^4)}{2}$$



Si noti che se $R_i \rightarrow R_e$ il diagramma tende a diventare costante, vedremo che tale ipotesi si assume valida nel caso di sezioni sottili chiuse.

(4)

Cerchiamo a questo punto di comprendere, almeno per linee generali, come si affronta il problema nel caso in cui la



sezione presenta una forma

generica. In tale ovvia entità la prima considerazione è legata alla presenza nel campo di spostamenti di una componente normale al piano della sezione, il cui valore, nell'

ipotesi di costanza della sollecitazione torcente, risulti costante e pari a: $w = \theta \omega(x, y)$, oltre alle componenti del caso precedente.

\rightarrow funzione di iniezione di infossamento.

Partendo dunque dal campo di spostamenti:

è possibile ricavare il campo di deformazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -\theta y z \\ v = \theta x z \\ w = \theta \omega(x, y) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) \end{array} \right.$$

Le uniche tensioni che si salcano sono ancora le:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz} = G \gamma_{xz} = G \theta \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} = G \gamma_{yz} = G \theta \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) \end{array} \right.$$

Noto il campo di tensioni ci andiamo a calcolare il momento torcente complessivo sulla sezione, che deve essere pari a M_t

$$\begin{aligned}
 M_t &= \int_{\Sigma} (-\tilde{\gamma}_{xz} y + \tilde{\gamma}_{zy} x) d\Sigma = \\
 &= \int_{\Sigma} \left[G\theta \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) (-y) + G\theta \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) x \right] d\Sigma = \\
 &= G\theta \int_{\Sigma} \left(x^2 + y^2 - \frac{\partial \omega}{\partial x} y + \frac{\partial \omega}{\partial y} x \right) d\Sigma = G\theta (\bar{J}_t)
 \end{aligned}$$

fattore di
rigidezza torsionale

dunque: $\theta = \frac{M_t}{G\bar{J}_t}$, I tagli devono essere nulli per cui risulta:

$$\begin{cases}
 \tilde{\gamma}_{zx} = G\gamma_{zx} = G\theta \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) \\
 \tilde{\gamma}_{zy} = G\gamma_{zy} = G\theta \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right)
 \end{cases} \rightarrow T_x = \int_{\Sigma} \tilde{\gamma}_{zx} d\Sigma = 0$$

$$\begin{cases} \\
 \end{cases} \rightarrow T_y = \int_{\Sigma} \tilde{\gamma}_{zy} d\Sigma = 0$$

Ora essendo nulle tutte le componenti di tensione derivate da $\tilde{\gamma}_{zx}$ e $\tilde{\gamma}_{zy}$, ed essendo quest'ultime non dipendenti da "z", le prime due equazioni di equilibrio sono rispettate banalmente, la terza, invece, si scrive

$$\frac{\partial \tilde{\gamma}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\gamma}_{zy}}{\partial y} = 0 \quad \text{cioè sostituendo i valori di } \tilde{\gamma} \text{ porta a:}$$

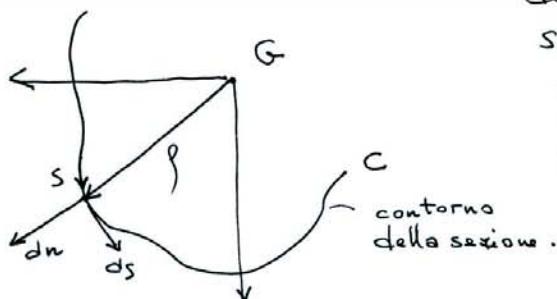
$$G\theta \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0}$$

Inoltre perché il flusso di tensioni tangenziali sia sul contorno diretto come la tangente alla

superficie deve essere:

$$\boxed{\frac{d\omega}{ds} = \rho \frac{dp}{ds}}$$

(Capitolo
"Lezioni di
Scienza delle
Costruzioni"
pag. 331)



(6)

Dunque la funzione di infossamento $\omega(x,y)$ non puo' essere scelta in maniera arbitraria, ma deve rispettare le 2 condizioni.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{la funzione deve essere "armonica" nella regione chiusa da } C) \\ \frac{d\omega}{dn} = \rho \frac{df}{ds} \quad \text{sul contorno } C \end{array} \right.$$

La ricerca di questa funzione $\omega(x,y)$ prende il nome di "problema di Neumann", e si puo' dimostrare che nelle condizioni in cui ci troviamo esiste puo' sempre trovare almeno di una costante arbitraria.

Tale arbitarieta' puo' essere eliminata imponendo che lo spostamento medio in direzione perpendicolare alla sezione sia nullo:

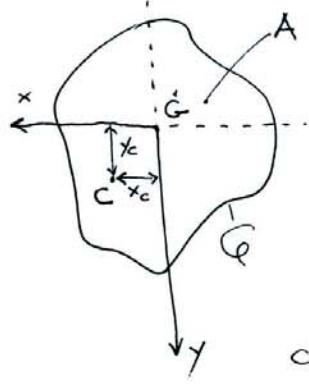
$$w_m = \frac{1}{A} \int_A \omega(x,y) dA = 0 \Rightarrow \int_A \omega(x,y) dA = 0$$

In tal modo la funzione risulta essere univocata.

Ora c'è bisogno di mettere in luce un aspetto importante del problema. Finora si è sempre considerato un riferimento con centro nel baricentro della sezione, ovvero con asse "z" di rotazione passante per il baricentro. Si potrebbe pensare che, nel problema di pura torsione, la scelta di un asse diverso porti a risultati differenti.

Cercheremo di far capire che in questo caso cosi non e', e definiremo l'idea di centro di torsione che e' fondamentale nel caso in cui il momento torcente sia legato a componenti di taglio non nulle.

(7)



Consideriamo il caso in cui l'asse di rotazione perpendicolare alla sezione passi per il punto $C \equiv (x_c, y_c)$. Il campo di spostamenti in tale ipotesi sarà:

$$u = -\theta(y - y_c) z; \quad v = \theta(x - x_c) z, \quad w = \theta w_c(x, y)$$

cui corrisponde un campo di tensioni le cui uniche componenti non nulle sono:

$$\begin{cases} \tau_{zx} = G \theta \left(\frac{\partial w_c}{\partial x} - y + y_c \right) \\ \tau_{zy} = G \theta \left(\frac{\partial w_c}{\partial y} + x - x_c \right) \end{cases}$$

Valutando le condizioni che la funzione di infossamento deve rispettare si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_c}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } A \\ \frac{d}{dn} (w_c + y_c x - x_c y) = \rho \frac{dp}{ds} \quad \text{sol contorno } Q \end{cases}$$

si intende far notare che i termini sommati ad w_c nella 2^a equazione, possono essere sommati anche nella prima, avendo derivata seconda nulla sia rispetto a "x" che rispetto a "y". Ha quindi la soluzione del problema di Neumann unica a meno di una costante deve essere:

$$w_c = w_c + y_c x - x_c y, \quad \text{da cui:}$$

$$w_c(x, y) = w(x, y) - y_c x + x_c y + C$$

sostituendo questa relazione nei campi di spostamento e di tensione si può concludere che:

(8)

- i campi di spostamento differiscono per un moto uniforme della sezione;
- i campi di tensione sono identici.

Quindi la scelta dell'area di rotazione delle sezioni nella torsione con momento costante è assolutamente arbitraria.

Fra tutti gli anni possibili è lecito chiedersi quale conveniente scegliere, ovvero rispetto a quale il problema di torsione si presenta in una versione più semplice.

L'idea è quella di scegliere l'area di rotazione in modo che risultino nullo il moto medio della sezione, sia in termini di spostamento:

$$\omega_m = \frac{1}{A} \int_A^0 \omega dA = 0$$

sia in termini di rotazione:

$$\varphi_{xm} = \frac{1}{I_y} \int_A^0 \omega y dA = 0, \quad \varphi_{ym} = -\frac{1}{I_x} \int_A^0 \omega \times dA = 0$$

il che equivale ad imporre:

$$\int_A^0 \omega_c(x,y) dA = \int_{\tilde{A}}^0 \omega_c(x,y) y dA = \int_A^0 \omega_c(x,y) \times dA = 0$$

ovvero rispettivamente:

$$c=0$$

$$\int_A^0 \omega(x,y) y dA + x_c I_x = 0$$

$$\int_A^0 \omega(x,y) \times dA - y_c I_y = 0$$

da cui le coordinate del centro
di torsione:

(9)

Si noti come sia la sola forma della sezione a determinare la posizione del centro di torsione, inoltre tale punto deve necessariamente trovarsi su di un'asse di simmetria ($\omega(x,y)$ è antisimmetrica rispetto a tale asse). Se di assi di simmetria ce ne sono 2, il centro di torsione sarà all'intersezione di tali assi.

Approccio alle tensioni

Un metodo alternativo per risolvere il problema di torsione nasce dalla constatazione che le equazioni indefinite di equilibrio si riducono sempre alla sola: $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$

Se allora si definisce una funzione $F(x,y)$ tale che

$\tau_{zx} = \frac{\partial F}{\partial y}$, $\tau_{zy} = -\frac{\partial F}{\partial x}$, tale equazione di equilibrio è per definizione verificata.

A questa funzione "F" bisogna richiedere di avere 2 proprietà

- 1) deve determinare spostamenti ω continui all'interno della sezione
- 2) deve determinare tensioni che sul bordo non abbiano componenti normali.

In termini matematici tali condizioni si traducono in:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2G\theta & \text{in } A \\ F=0 & \text{in } Q \end{cases}$$

questo sistema è noto come "problema di Dirichlet", esso ha sempre, nelle condizioni in cui lavoriamo, soluzione unica.

(10)

Questo approccio ha il vantaggio che la funzione incognita "F" ha un significato fisico. Essa rappresenta, come derivate parziali, il valore delle tensioni tangenziali, inoltre essa è legata al momento torcente agente dalla relazione:

$$2 \int_A F dA = M_z$$

che vedremo nelle pratiche applicazioni consentirà di legare l'angolo unitario di torsione al momento agente.

La sezione rettangolare sottile

Supponiamo ora di avere una trave di sezione rettangolare, avente la dimensione lungo "x" molto maggiore di quella lungo "y". Per aiutarsi nella valutazione della funzione F si può

utilizzare l'analogia della membrana, in base alla quale $F(x, y)$ corrisponde a $w(x, y)$ di una membrana avente la stessa forma della sezione, uniformemente tesa, vincolata sul bordo e soggetta ad un carico ripartito verticale uniforme.

In base all'intuizione è convincente l'idea secondo cui, a parte zone vicine al bordo, la funzione F sia indipendente da x inoltre essa deve essere nulla sui bordi in direzione parallela all'asse delle ascisse.

La scelta più semplice è allora:

$$F = C \left(y - \frac{b}{2} \right) \left(y + \frac{b}{2} \right) = C \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right)$$

Oltre all'annullamento sul bordo, imponendo la condizione di continuità si ottiene:

$$2C = -2G\theta$$

Da cui l'espressione della funzione F :

$$F = -G\Theta \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right)$$

Ora ci tocca legare l'angolo unitario di torsione al momento torcente esterno:

$$2 \int_A F dA = M_t \rightarrow -2G\Theta \int_A \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) dA = M_t$$

Tisolrendo:

$$-2G\Theta \left(I_x - \frac{b^2}{4} A \right) = M_z \Rightarrow M_z = G\Theta \frac{ab^3}{3} \bar{J}_t$$

da cui

$$\Theta = \frac{3M_z}{Gab^3}$$

che sostituita in F da' :

$$F = -\frac{3M_z}{ab^3} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right)$$

questa relazione fornisce il campo di tensioni:

$$\left[\tilde{\sigma}_{zx} = \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{6M_z y}{ab^3} \right] ; \quad \left[\tilde{\sigma}_{zy} = \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \right]$$

$$|\tilde{\sigma}_{\max}| = \left| -\frac{6M_z b}{ab^3} \cdot \frac{b}{2} \right| = \left(\frac{3}{2} \right) \frac{M_z b}{ab^3} \bar{J}_t$$

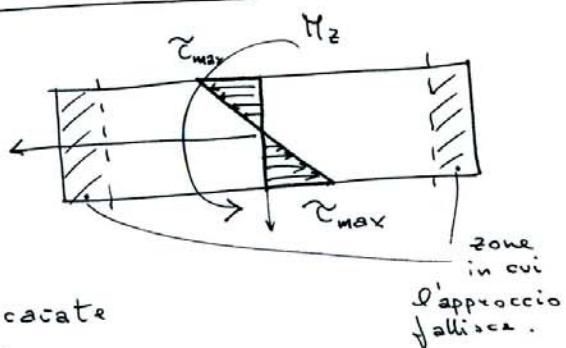
$$\tilde{\sigma}_{\max} = \frac{M_z b}{\bar{J}_t}$$

Le espressioni ricavate valgono nel caso $b \gg a$, ma

dovendo essere generalizzate a qualsiasi sezione rettangolare

come segue:

$$\bar{J}_t = ab^3 \quad \tilde{\sigma}_{\max} = \frac{B M_t}{ab^2}$$



zone in cui l'approssimazione è valida.

(12)

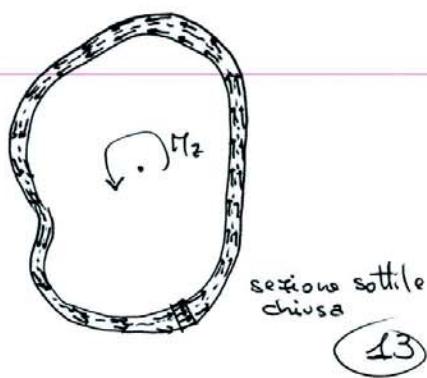
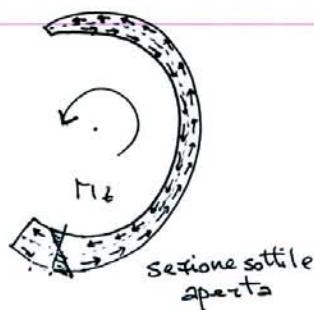
dove α e β sono coefficienti dipendenti dal rapporto a/b

a/b	∞	10	3	2	1,5	1,2	1
α	0,333	0,312	0,263	0,229	0,196	0,166	0,143
β	3	3,2	3,74	4,06	4,33	4,57	4,80

La torsione nelle travi sottili di sezione chiusa

Nel caso di travi aventi sezione sottile si possono estendere i risultati ottenuti per la sezione rettangolare sottile, con il momento torcente che viene assorbito attraverso una distribuzione lineare di tensioni tangenziali che si annullano in corrispondenza delle fibre media, ed aventi andamento lineare le linee di flusso delle tensioni devono, infatti, per questioni di equilibrio avere necessariamente chiuse, e l'unica possibilità è che "fixino" intorno alla linea media.

Se però la linea media della sezione genera un circuito chiuso, allora le linee di flusso possono chiedersi camminando sempre dalla stessa parte, il che rende possibile che le tensioni tangenziali τ_{tz} relative ad uno spessore fissato, abbiano stesso segno. Attesa l'esiguità dello spessore, inoltre, è logico supporre che esse siano costanti.

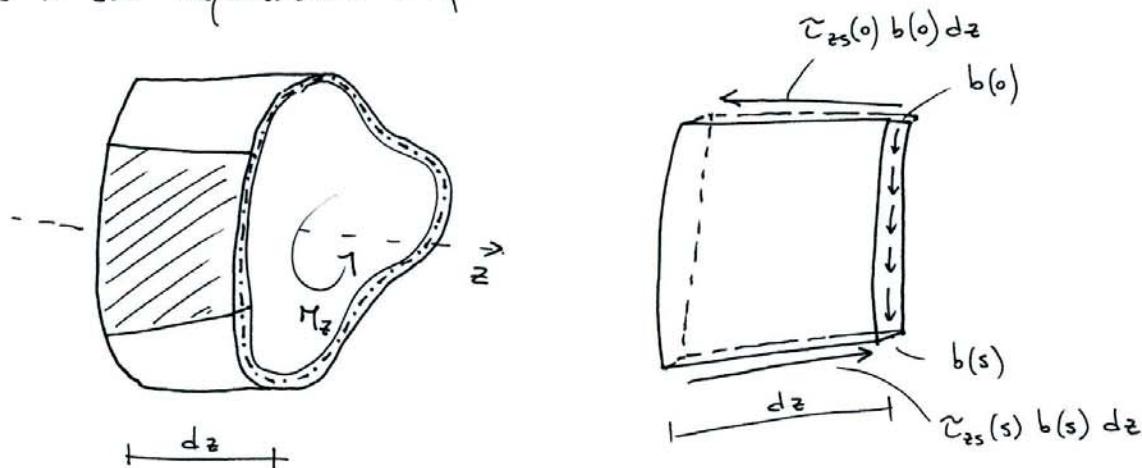


Il modo di resistere a flessione delle travi in sezione chiusa, dunque, è profondamente differente da quello delle travi in sezione sottile aperta.

Per determinare il valore delle tensioni tangenziali $\tau_{zs}(s)$, nel caso di sezione sottile chiusa, detta "s" l'ascissa curvilinea è importante subito capire che risulta

$$\tau_{zs}(s) \cdot b(s) = \text{cost.}$$

si consideri, infatti, una porzione della sezione sottile chiusa, ed il suo equilibrio rispetto all'asse "z".



Tale equazione, utilizzando il principio di reciprocità, porta a scrivere

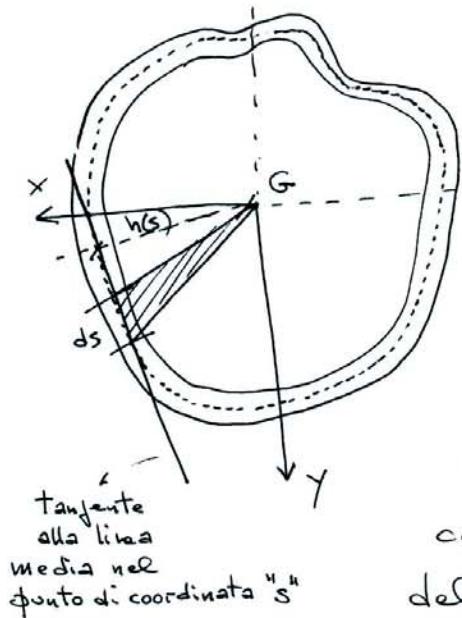
$$\tau_{zs}(s) b(s) = \tau_{zs}(0) b(0) \quad \begin{array}{l} \text{cioè poiché "s"} \\ \text{è generica e quindi} \\ \text{a dire che } \tau(s) \cdot b(s) \text{ è} \\ \text{costante.} \end{array}$$

Se ora si scrive l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno a "z" dell'intera sezione si ha:

$$M_z = \int_a^b \tau_{zs}(s) b(s) (h(s)) ds$$

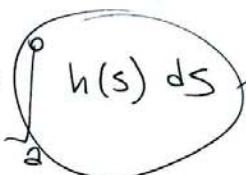
distanza della
linea media
dal baricentro

(14)



In tale integrale la quantità $\tilde{\tau}_{zs}(s) b(s)$ è, come visto, costante, e può essere portata fuori. Essa rappresenta la risultante delle tensioni sulla corda generica. $h(s)$ come detto è il braccio di questa risultante rispetto al baricentro. Si intende far notare come $h(s) \cdot ds$ è il doppio dell'area del triangolo infinitesimo indicato in figura. Dunque si può scrivere:

$$\mathcal{M}_z = \tilde{\tau}_{zs}(s) b(s)$$



questa quantità integrale, può essere graficamente interpretata come il doppio dell'area chiusa descritta dalla linea media.

$$\mathcal{M}_z = \tilde{\tau}_{zs}(s) \cdot b(s) \cdot 2 \cdot \Omega , \text{ da cui la tensione tangenziale sulla generica corda può scendersi:}$$

$$\boxed{\tilde{\tau}_{zs}(s) = \frac{\mathcal{M}_z}{2 \cdot \Omega \cdot b(s)}}$$

questa espressione è conosciuta con il termine di "formula di Bredt"

Si fa solamente notare, per chiudere, come la tensione tangenziale massima si abbia in corrispondenza della corda avente b_{\min} .