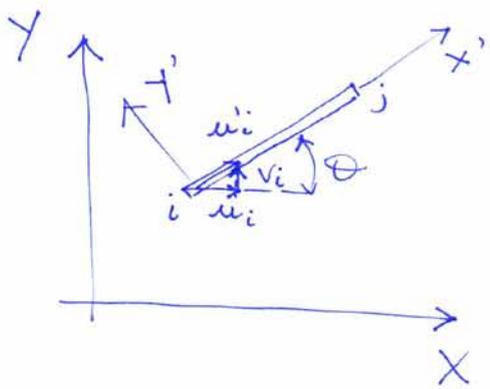


Elementi finiti: le principali tipologie.

Finora si è analizzata l'eventualità di avere un'asta "estensionale" posizionata lungo un'unica direzione. Tale elemento, tuttavia, come nel caso di sistemi reticolari, si sviluppa o in un piano o addirittura nello spazio.

Partiamo con l'analisi di un'asta nel piano.



L'idea è quella di definire un sistema di riferimento locale $x'-y'$, definito come finora fatto e un sistema di riferimento globale $x-y$. Nel sistema

locale ogni nodo presenta un unico grado di libertà u_i , mentre nel sistema globale tali gradi di libertà apparentemente diventano due u_i, v_i . In realtà è facile legare gli spostamenti nei due sistemi di riferimento

$$u'_i = u_i \cos \theta + v_i \sin \theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

$$v'_i = 0 = -u_i \sin \theta + v_i \cos \theta = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

dove $l = \cos \theta$ ed $m = \sin \theta$.

In forma matriciale tali relazioni si scrivono

$$\begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad \text{ovvero simbolicamente}$$

$$\underline{u}'_i = \underline{T} \cdot \underline{u}_i$$

matrice di trasformazione
E' una matrice ortogonale:
 $\underline{T}^{-1} = \underline{T}^t$

Nel nostro caso, tuttavia, i nodi sono due:

$$\begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

ovvero sinteticamente:

$$\underline{u}' = \underline{T} \underline{u} \quad \text{con}$$

le eventuali forze nodali

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{T} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T} \end{bmatrix}$$

si trasformano, come lecito

attendarsi seguendo esattamente la stessa relazione:

$$\underline{f}' = \underline{T} \underline{f} \Rightarrow \underline{f} = \underline{T}^{-1} \underline{f}' \stackrel{\text{orth.}}{=} \underline{T}^t \underline{f}'$$

A questo punto la domanda da farsi è: come si trasforma la matrice di rigidità?

(2)

Ricordando la matrice di rigidità classica dell'elemento:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

riorganizzando i termini per il problema analogo nel piano si ha:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ 0 \\ f_j \\ 0 \end{Bmatrix}$$

che simbolicamente si scrive:

$$\tilde{\mathbf{k}}' \tilde{\mathbf{u}}' = \tilde{\mathbf{f}}'$$

utilizzando la matrice di trasformazione $\tilde{\mathbf{T}}$ si ha:

$$\tilde{\mathbf{k}}' \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{f}}'$$

premultiplicando entrambi i termini per $\tilde{\mathbf{T}}^{-1} = \tilde{\mathbf{T}}^t$

$$\tilde{\mathbf{T}}^t \tilde{\mathbf{k}}' \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{T}}^t \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{f}}' = \tilde{\mathbf{I}} \tilde{\mathbf{f}}' = \tilde{\mathbf{f}}$$

si indica $\tilde{\mathbf{k}}$ e rappresenta la matrice globale di rigidità: $\tilde{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}}$. Nel caso specifico

$$\tilde{\mathbf{k}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Una valutazione analitica semplice dei "coseni direttori", l ed m può essere effettuata a partire dalle coordinate degli estremi dell'asta e dalla sua lunghezza:

$$l = \cos \theta = \frac{X_j - X_i}{L} \quad m = \sin \theta = \frac{Y_j - Y_i}{L}$$

Calcoliamo ora la tensione all'interno dell'elemento:

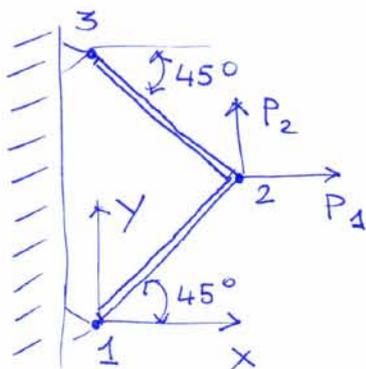
$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \tilde{B} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Questa espressione può essere scritta più facilmente come:

$$\begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

Il solito esempio pratico aiuterà a capire meglio l'applicabilità dei concetti:



Si calcoli lo spostamento del nodo 2, e la tensione all'interno di ogni asta.

La matrice di rigidezza locale delle 2 aste è la solita:

(4)

$$\underline{k}'_1 = \underline{k}'_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema presenta in totale 3 nodi per 2 spostamenti = 6 gradi di liberta' totali, di cui 4 vincolati. La matrice di rigidezza sara' dunque 6×6 e le incognite saranno 2 nel problema cinematico e 4 in quello statico.

Cominciamo con lo scrivere la matrice nel riferimento globale per i 2 elementi:

Elemento 1 : $\theta = 45^\circ$ $l = m = \frac{\sqrt{2}}{2}$

da cui:

$$\underline{k}_1 = \underline{T}_1^T \underline{k}'_1 \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ +\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} =$$

\Rightarrow E' ovvio che questo calcolo riguarderebbe le sole componenti u_i e u_j . Per cui prima di effettuare il prodotto le matrici vanno espause

$$\underline{k}_1 = \underline{T}_1^T \underline{k}'_1 \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} =$$

Il lettore verifichi il risultato che e' pari a:

(5)

$$\tilde{k}_1 = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento 2: $\Theta = 135^\circ \rightarrow l = -\frac{\sqrt{2}}{2}, m = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 (rotazione positiva se antioraria)

In questo caso cambia solo la "faccia" della matrice di trasformazione che diventa

$$\tilde{T}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

effettuando gli stessi calcoli mostrati per l'elemento 1, si ha:

$$\tilde{k}_2 = \tilde{T}_2^T \tilde{k}'_2 \tilde{T}_2 = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si passa quindi all'assemblaggio delle due matrici sommando i termini cui corrispondono gli stessi gradi di libertà:

$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{1y} \\ P_1 \\ P_2 \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix}$$

dove per via dei vincoli: $u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0$

Il problema cinematico è di immediata soluzione:

$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad \text{da cui facilmente:}$$

Donque lo spostamento totale del punto 2 sarà:

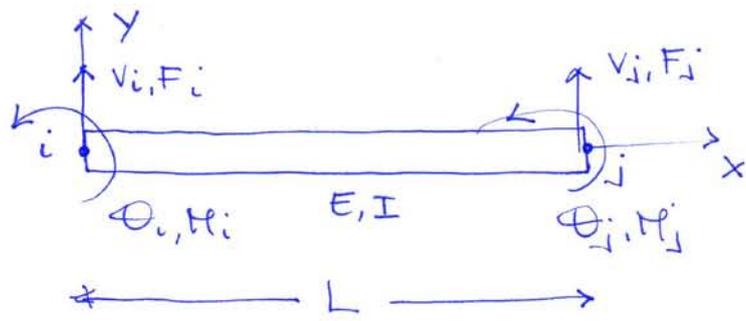
$$u_{TOT,2} = \sqrt{u_2^2 + v_2^2} = \frac{L}{EA} \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$$

Si lascia per esercizio il calcolo delle reazioni F_{1x} , F_{1y} , F_{3x} ed F_{3y} . Si calcolano inoltre le tensioni nelle due aste

$$\sigma_1 = \frac{E}{L} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{L}{EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A} (P_1 + P_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{L} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{L}{EA} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A} (P_1 - P_2)$$

Il lettore guardando alle caratteristiche della struttura discuta criticamente questi risultati. C'è ora da fare un ulteriore passo avanti, trattando l'elemento trave nel piano. È un differenziale da quello asta perché presenta deformazioni e tensioni legate al momento e al taglio.



In questo ambito
 I è il momento
 d'inerzia dell'asta,
 E il modulo elastico,

$v = v(x)$ il campo di spostamenti perpendicolari all'asta

$\Theta = \Theta(x) = \frac{dv(x)}{dx}$ il campo di rotazioni

$F = F(x)$ l'andamento del taglio lungo l'asta

$M = M(x)$ l'andamento del momento lungo l'asta

Queste grandezze sono legate dalle seguenti relazioni:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M(x)$$

$$\sigma = -\frac{M}{I} \cdot y$$

la sfida più grande che dobbiamo affrontare ora è quella della valutazione della matrice di

rigidezza:

$$\underset{(4 \times 4)}{\tilde{K}} \cdot \begin{Bmatrix} v_i \\ \Theta_i \\ v_j \\ \Theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix}$$

da matrice \tilde{K} si potrebbe calcolare sfruttando il significato fisico di ogni termine, e studiando la "linea elastica" della trave.

Noi, invece, seguiremo un approccio più formale, mediante l'uso delle funzioni di forma, che descrivono l'andamento delle grandezze "v" e "θ" lungo l'asta.

In particolare:

$$v(x) = \tilde{N} \tilde{u} = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

in cui

$$\begin{cases} N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{cases}$$

La scelta di tali funzioni non è casuale, esse devono avere un grado polinomiale tale da poter descrivere correttamente la deformata, e al tempo stesso al-

cuni casi particolari come quello di moto rigido (si noti come $N_1 + N_3 = 1$ ed $N_2 + N_3 L + N_4 = x$).

La curvatura della trave può esprimersi come:

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} (\tilde{N}(x) \tilde{u}) = \left(\frac{d^2 \tilde{N}}{dx^2} \right) \tilde{u}$$

Calcoliamo \tilde{B} :

questa è ora la matrice deformazioni - spostamenti

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}$$

Come fatto per l'elemento asta, calcoliamo l'energia di deformazione:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \cdot \epsilon \, dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left(-\frac{M \cdot y}{I} \right)^T \cdot \frac{1}{E} \left(-\frac{M \cdot y}{I} \right) dA dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L M^T \cdot \frac{1}{EI^2} \cdot M \left(\int_A y^2 dA \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L M^T \cdot \frac{1}{EI} M dx$$

$\underbrace{\int_A y^2 dA}_{\substack{\text{questa} \\ \text{è l'inerzia} \\ I}}$

ma dalle relazioni riportate all'inizio $\frac{M}{EI} = \frac{d^2 v}{dx^2}$,

per cui:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^T \cdot EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L (\tilde{B} \tilde{u})^T \cdot EI \cdot (\tilde{B} \tilde{u}) dx = \frac{1}{2} \tilde{u}^T \left(\int_0^L \tilde{B}^T EI \tilde{B} \right) \tilde{u}$$

da matrice di rigidità si ottiene dunque come

$$\tilde{K} = \int_0^L \tilde{B}^T \cdot EI \cdot \tilde{B} dx$$

nel caso di asta a sezione e materiale costante si ha:

$$\tilde{K} = EI \int_0^L \tilde{B}^T \cdot \tilde{B} dx$$

$\begin{matrix} 4 \times 1 & 1 \times 4 \end{matrix}$

(10)

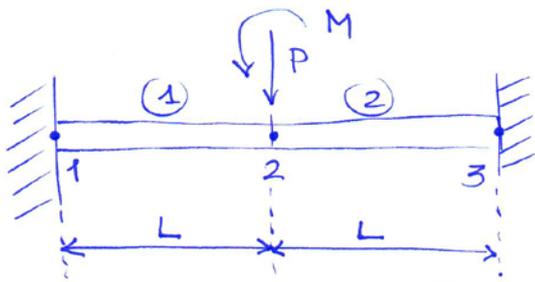
$${}^2B^T \cdot {}^2B = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)^2 & \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)\left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) & -\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)^2 & \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)\left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Delle funzioni di questa matrice si svolgera' l'integrale tra 0 ed L e si moltiplichera' per EI. Il risultato finale e' la seguente matrice, ottenuta combinando anche la rigidita' assiale.

$${}^2K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Facciamo un esempio pratico anche di questo caso che riguarda il solo comportamento a flessione e taglio delle aste



Le matrici di rigidità dei due elementi a flessione e taglio sono rispettivamente

$$\tilde{k}_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Effettuando l'assemblaggio si ottiene:

$$\tilde{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Si può scrivere quindi:

$$\underset{\sim}{k} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ -P \\ M \\ F_{3y} \\ M_3 \end{bmatrix}$$

Il problema cinematico è dunque espresso dalle seguenti due quantità (v_2, θ_2), la cui individuazione è possibile mediante l'equazione:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \end{Bmatrix} \quad \text{dalle quali:}$$

$$v_2 = -\frac{PL^3}{24EI} \quad \theta_2 = \frac{ML}{8EI}$$

note tali quantità si possono calcolare le reazioni

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 2P + 3M/L \\ PL + M \\ 2P - 3M/L \\ -PL + M \end{Bmatrix}$$

le tensioni $\sigma_x = -\frac{M(x)}{I} y$

ricordando che $M(x) = EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$

da $v(x)$ può essere ricostituita mediante le funzioni di forma essendo noti gli spostamenti

menti e le rotazioni agli estremi di ogni asta.

In particolare:

Elemento 1

$$V_1 = 0 \quad \Theta_1 = 0 \quad V_2 = -\frac{PL^3}{24EI} \quad \Theta_2 = \frac{ML}{8EI}$$

$$\begin{aligned} V_I(x) &= \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) \cdot \left(-\frac{PL}{24EI} \right) + \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \left(\frac{ML}{8EI} \right) \\ &= \left(-\frac{PL}{8EI} - \frac{M}{8EI} \right) x^2 + \left(\frac{P}{12EI} + \frac{M}{8EI} \cdot \frac{1}{L} \right) x^3 \end{aligned}$$

$$\Theta_I(x) = \frac{dV_I(x)}{dx} = \left(-\frac{PL}{4EI} - \frac{M}{4EI} \right) x + \left(\frac{P}{4EI} + \frac{3M}{8EI} \cdot \frac{1}{L} \right) x^2$$

$$\begin{aligned} M_I(x) &= EI \frac{d^2V_I(x)}{dx^2} = -\frac{PL}{4} - \frac{M}{4} + \frac{Px}{2} + \frac{3}{4} \frac{Mx}{L} = \\ &= -\frac{1}{4} (PL + M) + \frac{1}{2} \left(Px + \frac{3}{2} \frac{Mx}{L} \right) \end{aligned}$$

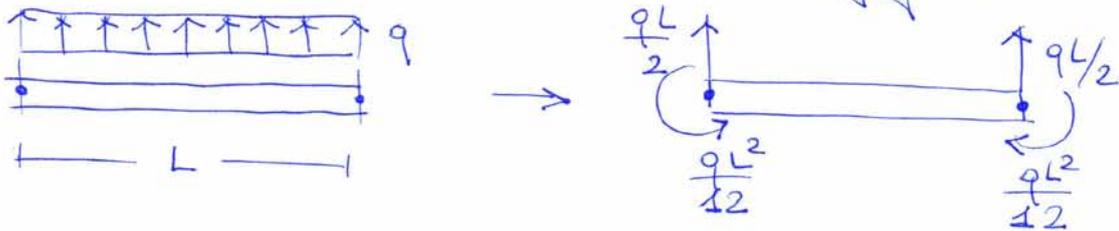
$$T_I(x) = \frac{dM_I(x)}{dx} = \frac{1}{2} P + \frac{3}{4} \frac{M}{L}$$

Se si deriva rispetto a "x" l'espressione del taglio si ottiene il carico ripartito. Nel metodo FEM l'idea del carico ripartito non esiste, ovvero esso viene tutto trasferito in azioni sui nodi, per cui la derivata di $T_I(x)$ deve essere nulla, come in realtà è in questo caso.

Cio' significa che le funzioni di forma

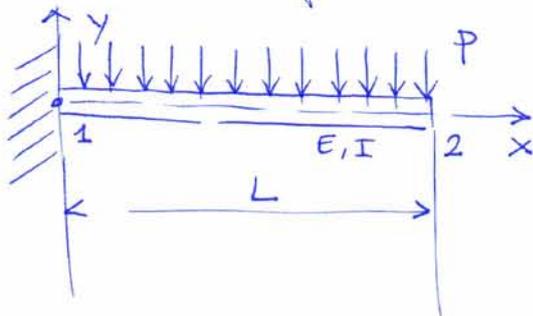
sono effettivamente in grado di descrivere in maniera esatta la soluzione del problema in esame con forze solo nodali.

Visto che il carico ripartito non è accettato, c'è da chiedersi come ci si comporta in sua presenza. È possibile dimostrare che esso va trasformato nelle azioni indicate in figura.



Esercizio

Data la seguente struttura a mensola con carico ripartito



p , si valuti lo spostamento verticale e la rotazione dell'estremo 2.