CALCOLO DI VOLUMI
VOLUMI DI ROTAZIONE

Si consideri la funzione $y=f(x)$, continua nell'intervallo $[a;b]$ e non negativa, e l'area compresa tra l'asse delle "x" e la funzione (che indicheremo da questo momento in poi con il termine di trapezoide). Se facciamo ruotare il trapezoide attorno all asse "x" di un giro completo (ossia di 360°), otteniamo quello che si definisce un **solido di rotazione (fig.1)**.

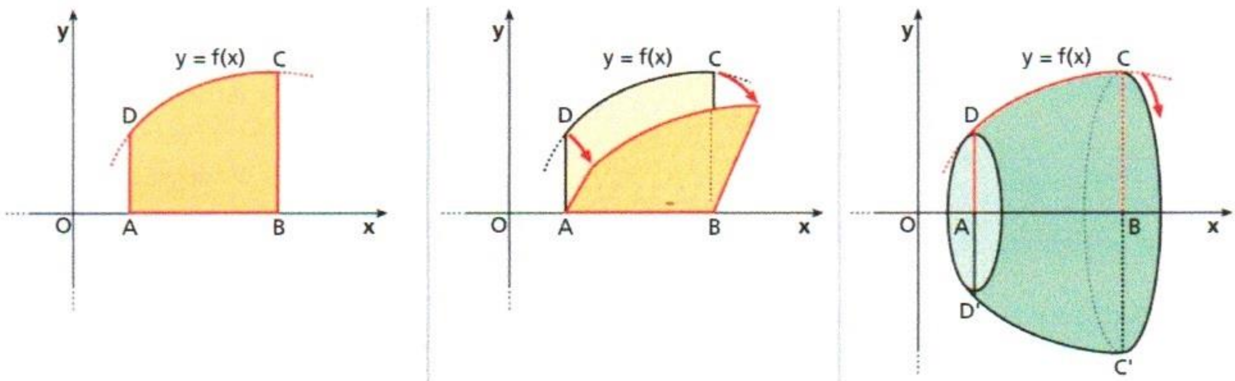
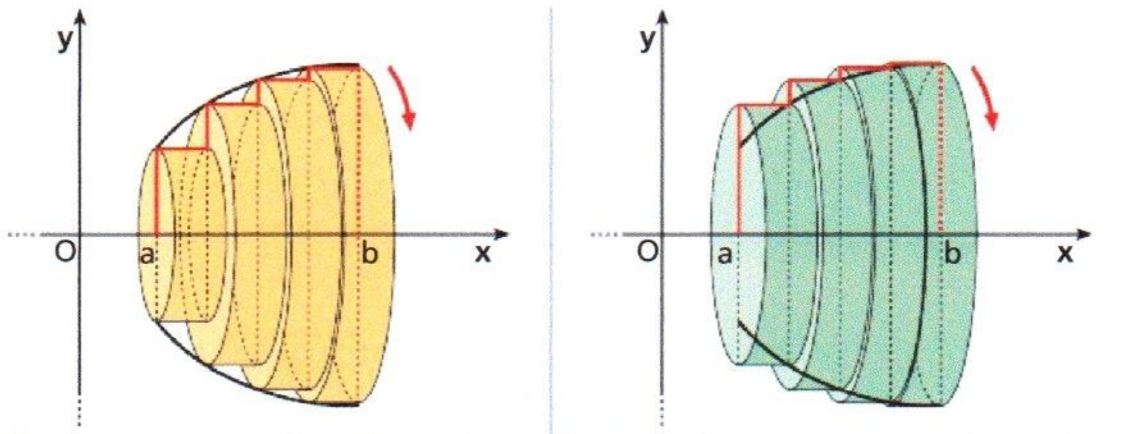


Figura 1: Sviluppo di un solido di rotazione

Al variare della "x" tra i punti A e B si nota come tutte le sezioni del solido siano dei cerchi. Proviamo a calcolare il volume di tale solido utilizzando la stessa tecnica presentata quando si é presentata la definizione di integrale definito.

Dividiamo l intervallo $[a; b]$ in "n" parti uguali. In ogni intervallo consideriamo il minimo m_i e il massimo M_i di $f(x)$ e disegniamo i rettangoli aventi come altezza tali valori di minimo e massimo. Nella rotazione completa intorno all'asse delle "x" ogni rettangolo descrive un cilindro circolare retto (figura 2).



a. Ogni cilindro per difetto ha per base un cerchio di raggio m_i e per altezza h. **b.** Ogni cilindro per eccesso ha per base un cerchio di raggio M_i e per altezza h.

Figura 2: Sviluppo per eccesso e per difetto

La somma dei volumi degli "n" cilindri con base i cerchi di raggi m_i approssima per difetto il volume del solido di rotazione iniziale, mentre la somma dei volumi degli "n" cilindri con base i cerchi di raggi M_i lo approssima per eccesso.
Poichè la formula del volume del cilindro circolare di raggio "r" e altezza "h" é:

$$V_{cil} = \pi \cdot r^2 \cdot h \tag{1}$$

Il volume v_n dei cilindri approssimanti il solido per difetto e il volume V_n dei cilindri approssimanti per eccesso sono rispettivamente:

$$v_n = \pi \cdot {m_1}^2 \cdot h + \pi \cdot {m_2}^2 \cdot h + \cdots + \pi \cdot {m_n}^2 \cdot h \tag{2}$$
$$V_n = \pi \cdot {M_1}^2 \cdot h + \pi \cdot {M_2}^2 \cdot h + \cdots + \pi \cdot {M_n}^2 \cdot h \tag{3}$$

Ora se, esattamente come abbiamo fatto per definire il significato geometrico di integrale definito, consideriamo l intervallo "h" tendente a zero, i valori di minimo e di massimo finiscono per coincidere tra loro ed essere pari al valore della funzione, e di conseguenza risultano uguali i valori dei volumi v_n e V_n. Si tratta quindi di sommare infiniti cilindri di altezza piccolissima (infinitesima); tale operazione corrisponde, come noto, allo svolgimento di un integrale:

$$V = \lim_n v_n = \lim_n V_n = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx \qquad (4)$$

Dunque si conclude che, data una funzione f(x), per calcolare il volume generato dalla sua rotazione intorno all'asse delle "x" è necessario risolvere l'integrale indicato al punto (4).

Come esempio consideriamo la funzione $f(x)=x^2$ e prendiamo a=0 e b=1. La situazione è quella rappresentata nella figura 3. Il volume ottenuto è simile a quello di un cono con la superficie laterale ricurva (la forma è quella di un cappello orientale o di una vecchia trombetta acustica).

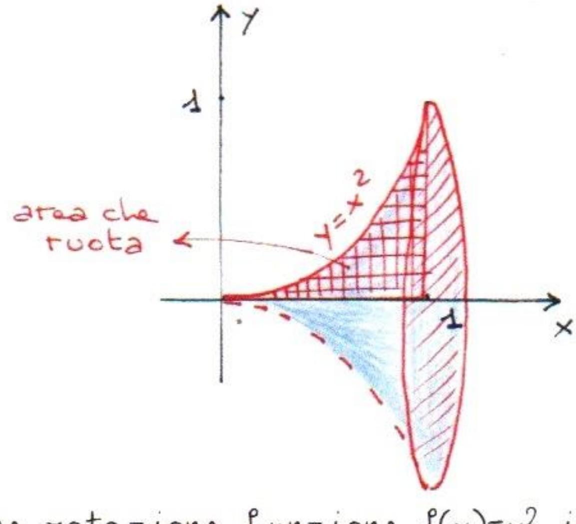


Figura 3: Volume rotazione funzione $f(x)=x^2$ intorno all asse x

Svolgiamo il calcolo del volume rappresentato mediante la formula (4):

$$V = \pi \cdot \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_{0-1} = \pi \cdot \left(\frac{1}{5} - 0\right)$$
$$= \frac{\pi}{5}$$

Rotazione intorno all asse y:

Si consideri ora una funzione f(x) e l'area compresa tra essa e l'asse delle ordinate. Si intende calcolare il volume che si ottiene dalla rotazione di tale area intorno al medesimo asse.

Il problema é identico al caso precedente con l'unica differenza che non abbiamo a disposizione la legge che ci fornisce l'andamento della curva al variare del valore di y. Per ottenere tale legge é necessario invertire la funzione $y=f(x)$, scrivendola come $x=f^{-1}(y)$.

Una volta effettuata tale operazione il calcolo si svolgerá nel modo giá spiegato nel caso precedente, facendo attenzione che stavolta l'integrale risulta essere nella variabile "y" e che gli estremi di integrazione, dovendosi trovare su quest'ultimo asse, non possono essere a e b, ma devono essere i valori assunti dalla funzione quando al posto di "x" si inseriscono tali due valori, ovvero f(a) ed f(b).

La situazione generica é quella rappresentata nella successiva figura 4.

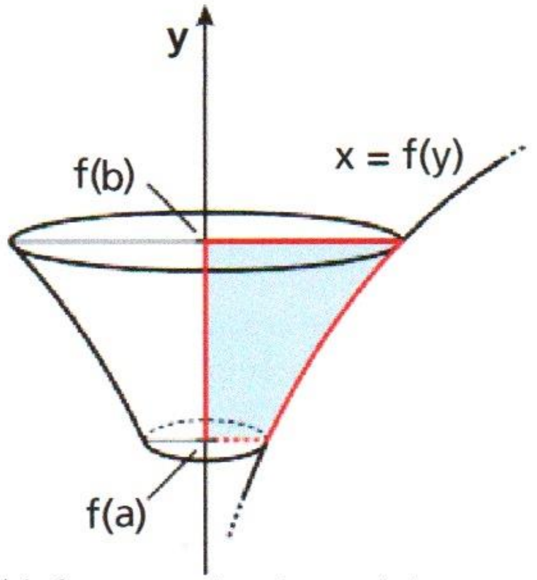


Figura 4: Volume rotazione intorno all asse y

L' espressione matematica per il calcolo del volume di rotazione in questione risulta essere:

$$V = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} (f^{-1}(y))^2 dy \qquad (5)$$

A titolo esemplificativo, per la stessa funzione $y=x^2$, calcoliamo il volume ottenuto facendo ruotare la parte di piano compresa tra la funzione e l'asse delle "y" intorno al medesimo asse. La situazione, da un punto di vista grafico, è quella rappresentata in figura 5:

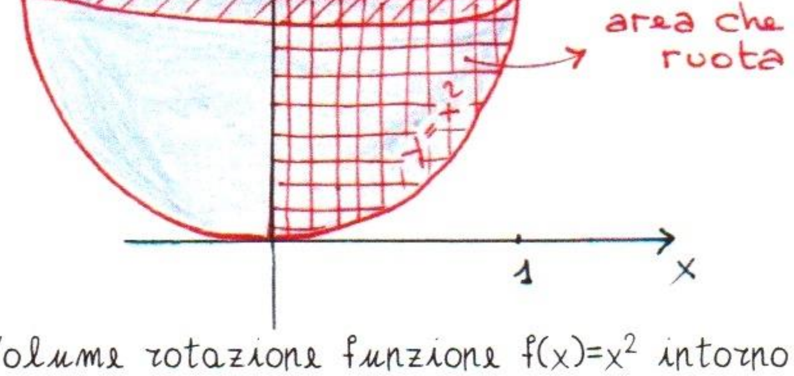


Figura 5: Volume rotazione funzione $f(x)=x^2$ intorno all asse y

Per effettuare il calcolo é necessario identificare la funzione inversa di $f(x)=x^2$. Tale funzione si ottiene ricavando la "x":

$$y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y} = f^{-1}(x)$$

Gli estremi di integrazione saranno:

$$f(a) = f(0) = 0\,, f(b) = f(1) = 1$$

Il calcolo, individuati gli elementi, si basa sull' utilizzo della relazione (5) ed é piuttosto semplice:

$$V = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} \left(f^{-1}(y)\right)^2 dy = \pi \cdot \int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi \cdot \int_0^1 y \cdot dy$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{0-1} = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

Dunque a questo punto sappiamo come operare nel caso in cui ci troviamo di fronte il calcolo di un volume ottenuto dalla rotazione di un'area compresa tra la funzione ed un asse, <u>intorno al medesimo asse</u>. Ci chiediamo se é possibile ricavare una relazione analoga nel caso in cui l'area da far ruotare venga descritta da uno dei due assi, ma la rotazione avvenga intorno all altro asse.

Se ne stiamo parlando la risposta é ovviamente affermativa.

Metodo dei gusci cilindrici:

La situazione da analizzare é quella descritta nella figura 6, ovvero un'area individuata tra la funzione e l asse delle "x", da far ruotare intorno all'asse delle "y" (in generale il ruolo dei due assi potrebbe essere anche scambiato).

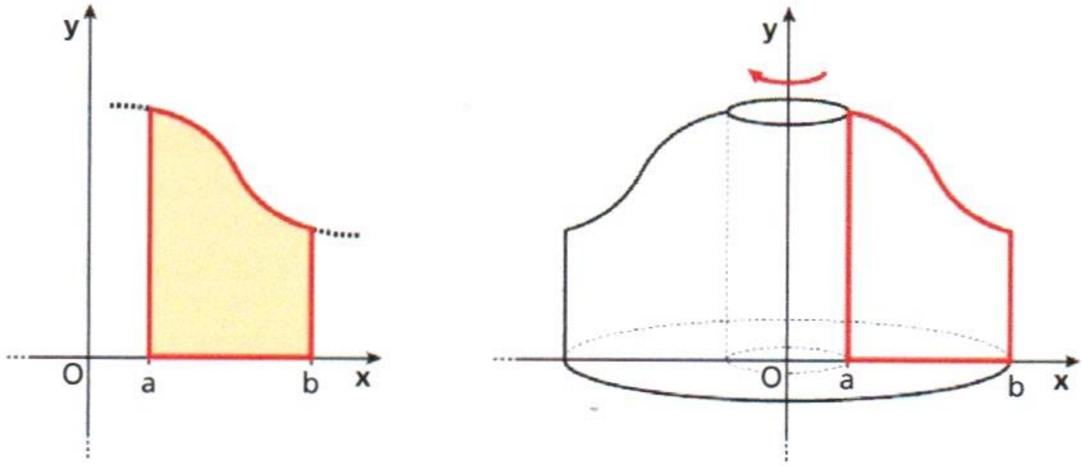


Figura 6: Volume rotazione intorno ad asse diverso dalla base

L'idea é di procedere in maniera assolutamente analoga a come giá fatto nel caso precedente, si divide l intervallo [a; b] in "n" parti uguali. In ogni intervallo consideriamo il minimo m_i e il massimo M_i di f(x) e disegniamo i rettangoli aventi come altezza tali valori di minimo e massimo. Si considera successivamente il singolo rettangolo e gli si fa compiere una rotazione di 360° gradi intorno all asse "y" (fig. 7).

Nella rotazione completa intorno all'asse "y" ogni rettangolo descrive **un guscio cilindrico**. La somma dei volumi di tutti i gusci cilindrici di altezza m_i approssima per difetto il volume del solido, mentre la somma dei volumi dei gusci di altezza M_i lo approssima per eccesso.

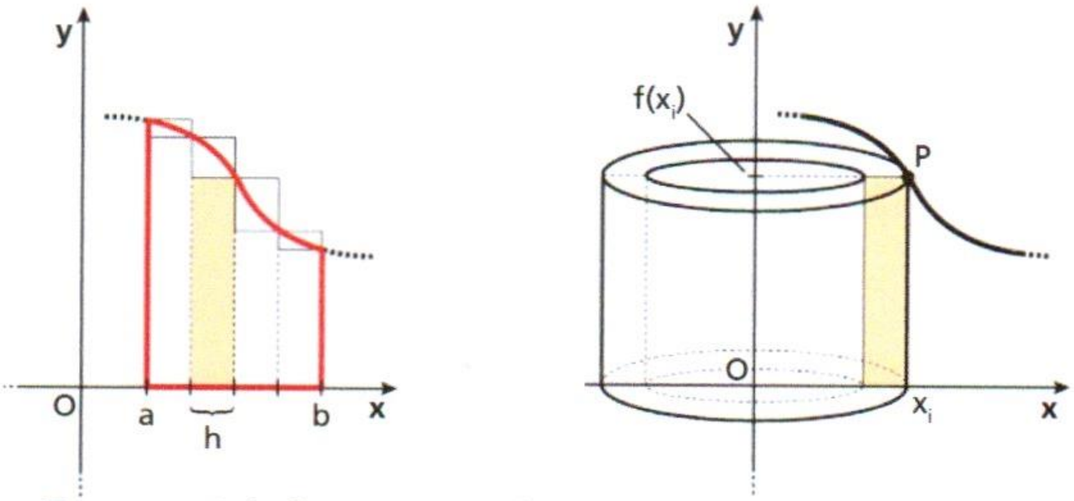


Figura 7: Definizione del singolo guscio cilindrico

Il volume del singolo guscio cilindrico si può ottenere sottraendo al volume del cilindro esterno di raggio x_i+h, quello del cilindro interno di raggio x_i. Entrambi i cilindri avranno per altezza il massimo o il minimo della funzione nell'intervallo a seconda se si sta considerando l'approssimazione per eccesso o per difetto. A titolo esemplificativo consideriamo quella per difetto, ovvero guscio con altezza m_i:

$$v_{gus,i} = \pi \cdot \left[(x_i + h)^2 - x_i^2\right] \cdot m_i = \pi \cdot [2x_i h + h^2] \cdot m_i \qquad (6a)$$

Evidentemente la stessa formula vale anche nel caso dell'utilizzo dei valori massimi, e quindi dell'approssimazione per eccesso:

$$V_{gus,i} = \pi \cdot \left[(x_i + h)^2 - x_i^2\right] \cdot M_i = \pi \cdot [2x_i h + h^2] \cdot M_i \qquad (6b)$$

Mandando ora l'ampiezza dell intervallo "h" a zero, si osservano due fattispecie: la prima è che non c'è più differenza tra minimo e massimo in un intervallo, entrambi tendono al valore della funzione f(x), inoltre il termine h^2 risulta essere trascurabile come valore rispetto a $2x_ih$ (elevare un numero molto piccolo al quadrato lo rende più piccolo). Dunque posso scrivere che per h tendente a zero:

$$v_{gus,i} = V_{gus,i} = \pi \cdot [2 \cdot x \cdot h] \cdot f(x) \qquad (7)$$

Il volume di rotazione da ottenere si può quindi calcolare semplicemente sommando gli infiniti gusci cilindrici infinitesimi (piccolissimi) che si sono ottenuti facendo tendere h a zero (h=dx). Tale operazione corrisponde ad integrare il volume di un singolo guscio per i valori di "x" variabili tra a e b:

$$V = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x)dx \qquad (8)$$

Consideriamo sempre come esempio la nostra amata funzione $y=x^2$, e calcoliamo il volume ottenuto ruotando intorno all'asse "y" l'area tra tale funzione e l asse delle x.

Il volume da calcolare è rappresentato in figura 8, per calcolarlo basterà semplicemente sostituire gli estremi di integrazione e la funzione f(x) all'interno dell'integrale indicato in (8):

$$V = 2\pi \cdot \int_0^1 x \cdot x^2 dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^1 x^3 dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0-1} = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

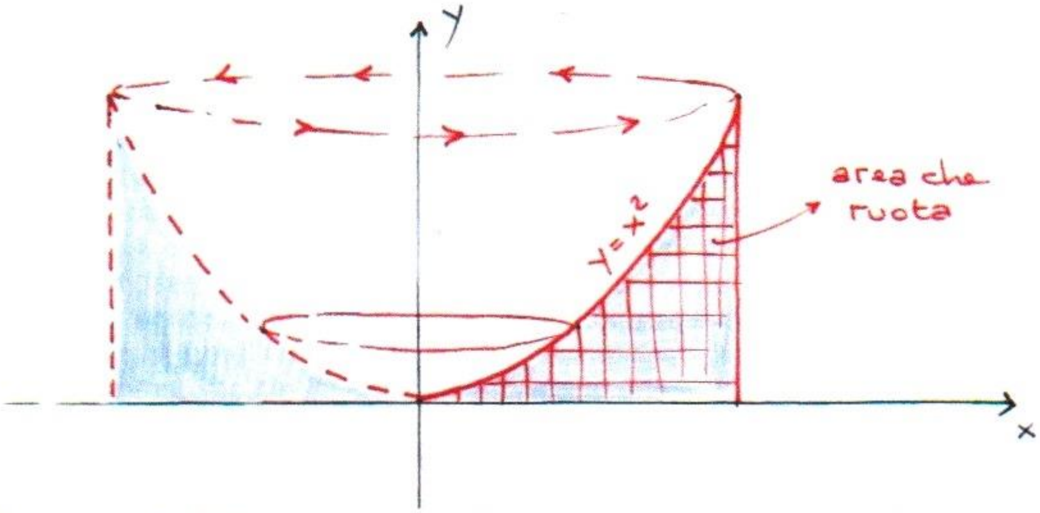


Figura 8: Definizione volume di rotazione intorno a y

Nel caso in cui si volesse calcolare il volume ottenuto ruotando intorno ad "x" un'area definita tra una funzione e l asse "y" bisognerebbe seguire lo stesso percorso concettuale, con l'unica difficoltà, già evidenziata, di dover invertire la funzione f(x). Tale ragionamento conduce alla seguente espressione:

$$V = 2\pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} y \cdot f^{-1}(y) dy \qquad (9)$$

Sempre con riferimento alla funzione $y=x^2$, la situazione sarebbe quella indicata in figura 9, ed il calcolo, avendo già precedentemente individuato la funzione inversa e gli estremi di integrazione, avrebbe il seguente sviluppo:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \cdot \int_0^1 y \cdot \sqrt{y}\, dy = \\
&= 2\pi \cdot \int_0^1 y^{3/2}\, dy = 2\pi \cdot \left[\frac{y^{5/2}}{5/2}\right]_{0-1} = 2\pi \cdot \left(\frac{2}{5} - 0\right) = \frac{4\pi}{5}
\end{aligned} \tag{10}
$$

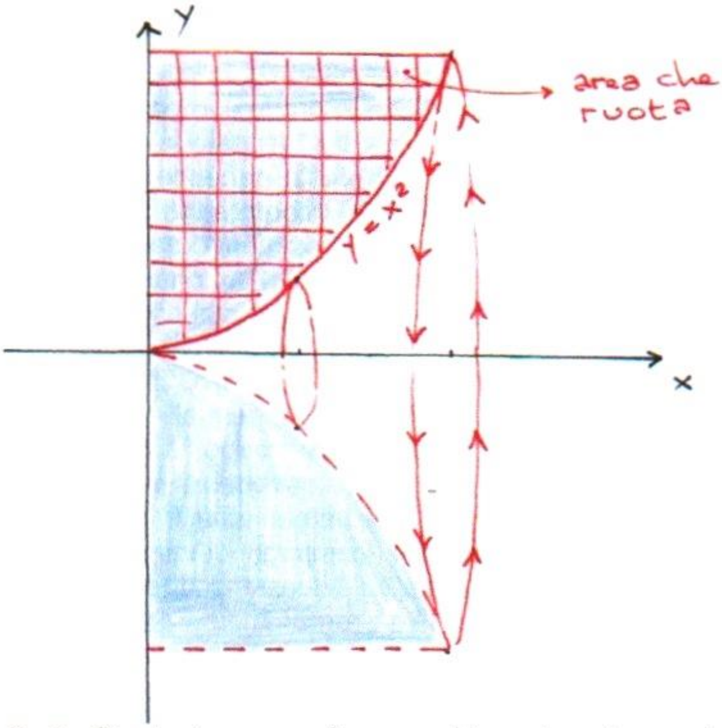


Figura 9: Definizione volume di rotazione intorno a x