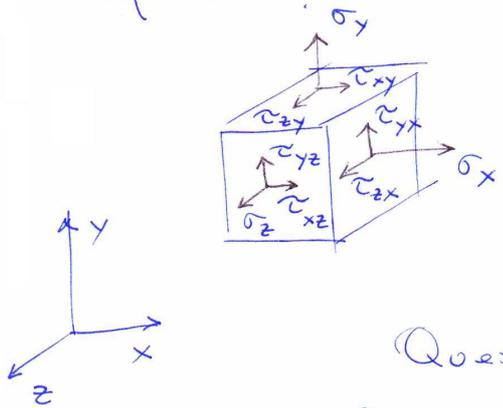


Problemi agli elementi finiti bidimensionali

Prima di tutto è necessario ricordare alcuni importanti concetti di base. In generale le tensioni e le deformazioni in un elemento infinitesimo di struttura presentano entrambe sei componenti:



$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$
per le tensioni

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$
per le deformazioni

Queste grandezze sono legate tra di loro, in generale, da equazioni che prendono il nome di "legami costitutivi":

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{array} \right.$$

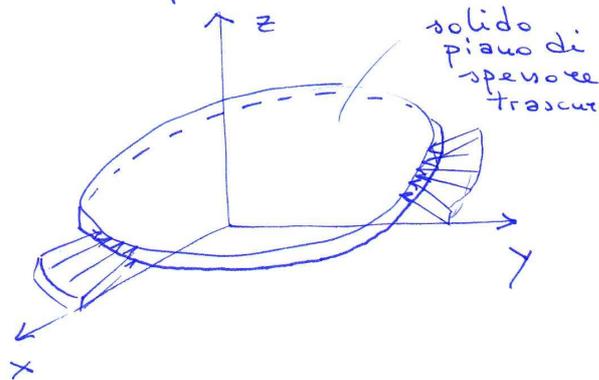
Sotto particolari condizioni di carico, ovvero condizioni di natura geometrica, una struttura in 3D può presentare stati di tensione e deformazione di tipo "piano" ovvero definibili in due dimensioni. In particolare possono definirsi:

Stato piano di tensione

Si tratta di solidi per i quali valgono, nell'ambito delle approssimazioni infinitesimistiche, le seguenti uguaglianze

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad (\epsilon_z \neq 0)$$

Un elemento piano di spessore molto piccolo caricato con forze agenti nel medesimo piano e costanti lungo lo spessore (o in generale simmetriche rispetto al piano medio) è un tipico esempio di solido



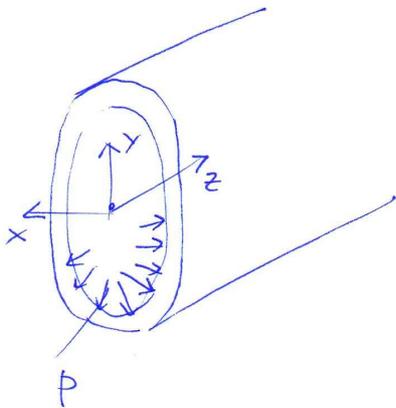
che si trova in stato piano di tensione.

Ovviamente il problema presenta nelle tensioni solo 3 incognite:

$$\sigma_x, \sigma_y \text{ e } \tau_{xy}$$

Stato piano di deformazione

Analogo al caso precedente con la differenza che ad essere nulle sono le deformazioni:



$$\epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (\sigma_z \neq 0)$$

È il caso di una struttura con una sezione uniforme e carico applicato lungo la direzione "z".

limitandoci al solo piano x-y e considerando la possibilità che ci siano delle deformazioni iniziali imposte $[\epsilon_{x0}, \epsilon_{y0}, \gamma_{xy0}]^T$, i legami costitutivi possono scriversi in forma matriciale nel caso di stato piano di tensione come:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_{x0} \\ \epsilon_y - \epsilon_{y0} \\ \gamma_{xy} - \gamma_{xy0} \end{Bmatrix}$$

che può essere scritta come:

da relazione di cui sopra sfruttata l'uguaglianza:

$$\vec{\sigma} = \frac{E}{1-\nu^2} \vec{\epsilon} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ -E \epsilon_{xy0} \end{pmatrix}}_{\text{tensione iniziale}}$$

$$E = 2(1+\nu)G$$

$$\downarrow$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Questa relazione può essere scritta anche in forma inversa, ovvero esprimendo le deformazioni in funzione delle tensioni:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix}$$

Volendo scrivere le stesse relazioni nel caso di stato piano di deformazione si fornisce il

(3)

seguente piccolo trucco, che evita di svolgere i calcoli. Basterà infatti nelle relazioni già viste sostituire ad:

$$E \rightarrow \frac{E}{1-\nu^2}$$

e ad:

$$\nu \rightarrow \frac{\nu}{1-\nu}$$

Abbiamo visto come per le componenti nel piano $x-y$ sono legate tra di loro tensioni e deformazioni, vediamo ora come sono legati deformazioni e spostamenti:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

che in forma matriciale si scrive:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{v}}$$

Si noti come la presenza delle derivate ci faccia comprendere che nel caso gli spostamenti siano polinomiali, lo stesso vale per le deformazioni, con un grado più piccolo di una unità.

A chiudere il cerchio del problema ci sono, come ovvio, le equazioni di equilibrio e le

condizioni al contorno, che riguardano le azioni di massa e le azioni o i vincoli applicati in corrispondenza del bordo del corpo:

Equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases}$$

in cui f_x ed f_y sono le forze di massa.

Capiremo che nel metodo FEM queste equazioni sono soddisfatte in maniera "approssimata".

Condizioni al contorno

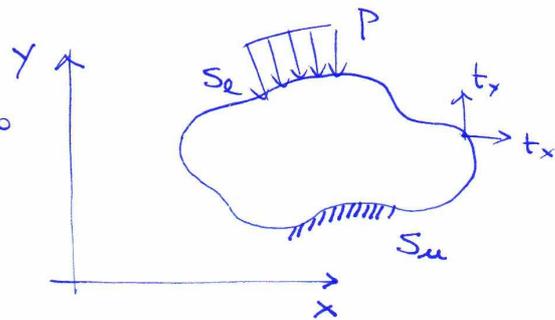
Le condizioni al contorno possono essere di 2 tipi

tipo cinematico:

$$u = \bar{u}, v = \bar{v} \text{ su } S_u$$

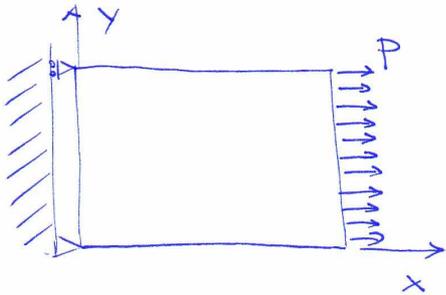
tipo statico

$$t_x = \bar{T}_x, t_y = \bar{T}_y \text{ su } S_t$$



Donque in qualsiasi problema di corpo soggetto a forze e differenti condizioni al contorno, che sia piano nelle tensioni o nelle deformazioni presenti una soluzione esatta le cui variabili incognite $u(x, y)$, $v(x, y)$ rispettano l'intero set di equazioni visto. Tale soluzione esiste... il (5)

problema è che solo in casi molto semplici da si riesce a trovare. Un esempio, tanto per fornire un caso, è quello della piastra appoggiata su di un lato e caricata dall'altro uniformemente:



La soluzione esatta di questo problema è data dalle seguenti funzioni:

$$u = \frac{p}{E} x \quad v = -\nu \frac{p}{E} y$$

$$\varepsilon_x = \frac{p}{E} \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{p}{E} \quad \gamma_{xy} = 0$$

$$\sigma_x = p \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0$$

Tuttavia sono pochi i problemi come questo, e, anche in questo caso, basta poco perché il problema non si riesca più a risolvere, per esempio la presenza di un foro al centro della piastra. Si capisce, dunque, l'essenzialità del metodo FEM nell'ambito delle pratiche applicazioni.

Quello che si farà in seguito è fornire una formulazione generale per l'elemento finito a due dimensioni, che in seguito si particolareggerà (*) ai casi specifici. L'idea è partire dalle funzioni $u(x,y)$, $v(x,y)$ ed esprimerle in base ad opportune funzioni di forma rispetto agli spostamenti (5)

nodali .

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \rightarrow \underline{u} = \underline{N} \underline{d}$$

ovviamente le funzioni di forma sono ora funzioni di due variabili, e si prendono identiche, ad estremo nodo fissato, sia per lo spostamento "u" che "v". Si noti, inoltre, come si sia assunto che $u(x,y)$ dipenda solo dagli spostamenti u_i , come $v(x,y)$ solo da quelli v_j .

Seguiamo ora gli stessi passaggi già eseguiti per l'elemento monodimensionale:

Consideriamo ora l'energia immagazzinata nell'elemento:

$$\underline{\epsilon} = \underline{D} \underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{D} \underline{N} \end{pmatrix} \underline{d} = \underline{B} \underline{d}$$

\underline{B} matrice di deformazione - spostamento

$$U = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma}^T \underline{\epsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V (\underline{\epsilon} \underline{\epsilon})^T \cdot \underline{\epsilon} dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon} \underline{\epsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V \begin{pmatrix} \underline{d}^T \underline{B}^T \underline{\epsilon} \underline{B} \underline{d} \end{pmatrix} dV =$$

sono vettori che non dipendono da V contenendo gli spostamenti dei nodi

$$= \frac{1}{2} \underline{d}^T \left(\int_V \underline{B}^T \underline{\epsilon} \underline{B} dV \right) \underline{d} = \frac{1}{2} \underline{d}^T \underline{K} \underline{d} \quad (7)$$

In questo caso :

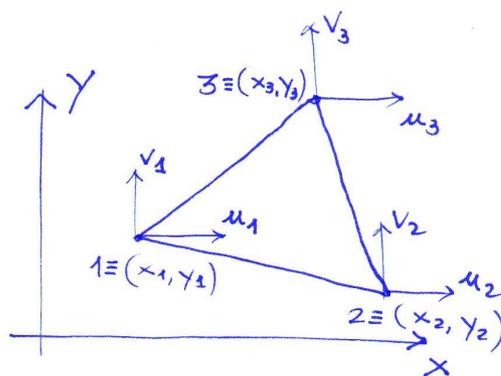
$$\underline{\underline{K}} = \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{B}} dV$$

La differenza rispetto al caso unidimensionale è che ora $\underline{\underline{E}}$ è una matrice (come visto nella premessa) e non uno scalare.

Gli elementi maggiormente impiegati negli studi 2D sono triangolari o quadrangolari, con funzioni di forma lineari o quadratiche.

Elemento triangolare lineare

Gli spostamenti "u" e "v" si assumono come funzioni lineari degli spostamenti nei nodi:



$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = b_1 + b_2 x_1 + b_3 y_1 \\ u_2 = b_1 + b_2 x_2 + b_3 y_2 \\ u_3 = b_1 + b_2 x_3 + b_3 y_3 \\ v_1 = b_4 + b_5 x_1 + b_6 y_1 \\ v_2 = b_4 + b_5 x_2 + b_6 y_2 \\ v_3 = b_4 + b_5 x_3 + b_6 y_3 \end{array} \right.$$

Questo è un sistema di 6 equazioni in 6 incognite che permette di calcolare b_1, b_2, \dots, b_6 e definire quindi le relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = b_1 + b_2 x + b_3 y \\ v = b_4 + b_5 x + b_6 y \end{array} \right.$$

e dunque le funzioni di forma

$$\left\{ \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \right\}$$

(8)

Si può verificare che, nel caso in esame,

$$N_1 = \frac{1}{2A} \int \left\{ (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y \right\}$$

$$N_2 = \frac{1}{2A} \int \left\{ (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y \right\}$$

$$N_3 = \frac{1}{2A} \int \left\{ (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y \right\}$$

dove:

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

che si può dimostrare essere l'area del triangolo.

Dagli spostamenti è possibile calcolare le deformazioni:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{d}} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Attenzione in questa matrice si è posto $x_{ij} = x_i - x_j$ e

Si ricordi che $\underline{\underline{B}}$ è $\begin{cases} x_{ij} = x_i - x_j \\ y_{ij} = y_i - y_j \end{cases}$

pari a $\underline{\underline{D}} \underline{\underline{N}}$ dove in $\underline{\underline{D}}$ ci

sono derivate parziali, ecco perché a differenza di

$\underline{\underline{N}}$ che è una matrice funzione di (x, y) , $\underline{\underline{B}}$ è

invece una matrice costante. Passando alla matrice

di rigidità

$$\underline{\underline{k}} = \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{B}} dV = \left(\int_V dV \right) \underline{\underline{A}} \cdot \left(\underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{B}} \right)$$

$\int_V dV \rightarrow$ costante \rightarrow spessore \rightarrow area della sezione

(9)

da matrice di rigidità in forma chiusa è particolarmente laboriosa da calcolare, se ne fornisce indicativamente il valore di alcuni termini:

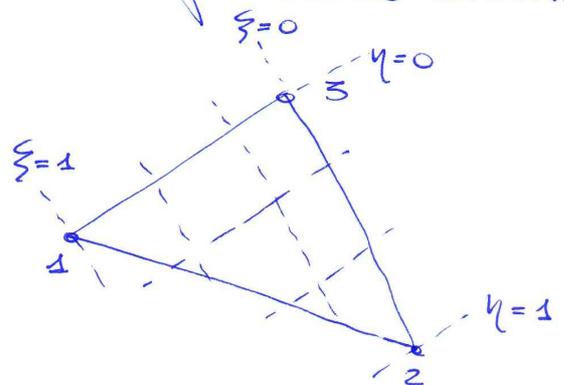
$$K_{11} = \frac{E \cdot A \cdot E}{1 - \nu^2} \left(\gamma_{23}^2 + \frac{1 - \nu}{2} x_{32}^2 \right)$$

$$K_{12} = \frac{E \cdot A \cdot E}{1 - \nu^2} \left(\nu \gamma_{23} x_{32} + \frac{1 - \nu}{2} x_3 \gamma_{23} \right)$$

$$K_{13} = \frac{E \cdot A \cdot E}{1 - \nu^2} \left(\gamma_{23} \gamma_{31} + \frac{1 - \nu}{2} x_{31} x_{13} \right) \dots$$

Si può verificare che la matrice è simmetrica. Da cosa fu' evidente che salta all'occhio in questa fase è la complessità delle funzioni di forma e delle funzioni da cui dipende la matrice di rigidità, tutti elementi che sembrano avere poco a che fare con il comportamento dell'elemento.

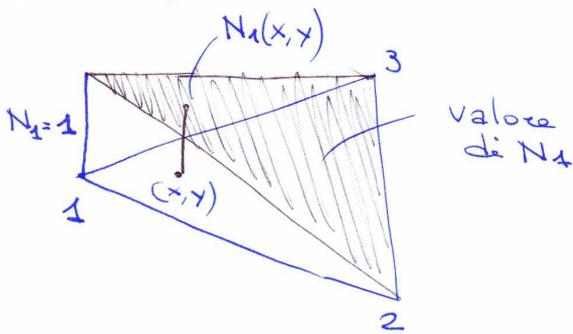
A tale scopo, o meglio per dare un maggior significato fisico alle quantità che definiscono l'elemento finito si introduce un sistema di coordinate dette "natural". In queste nuove coordinate le funzioni di forma si esprimono come:



$$N_1 = \xi, \quad N_2 = \eta, \quad N_3 = 1 - \xi - \eta$$

Si noti che: $N_1 + N_2 + N_3 = 1$ il che garantisce che le funzioni di forma siano in grado di riprodurre una traslazione rigida.

Volendo provare una rappresentazione tri-dimensionale della funzione N_1 , si ottiene qualcosa di simile a quanto a lato disegnato.



Ora ci teoriamo con due sistemi di coordinate sul sistema, uno (x,y) , l'altro (ξ, η) . Si può facilmente dimostrare come essi siano legati dalla seguente relazione:

relazione:

$$\begin{cases} x = x_{13} \xi + x_{23} \eta + x_3 \\ y = y_{13} \xi + y_{23} \eta + y_3 \end{cases}$$

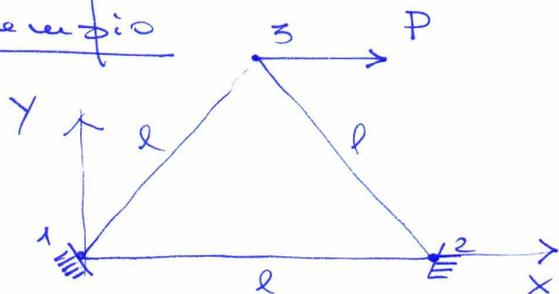
Ora la matrice N si scriverà in maniera molto più semplice, quella che si complica è la matrice D , che si può dimostrare assumerebbe la forma:

$$\tilde{D}^* = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} \frac{\partial}{\partial \xi} - y_{13} \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 & -x_{23} \frac{\partial}{\partial \xi} + x_{13} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ 0 & -x_{23} \frac{\partial}{\partial \xi} + x_{13} \frac{\partial}{\partial \eta} & y_{23} \frac{\partial}{\partial \xi} - y_{13} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ -x_{23} \frac{\partial}{\partial \xi} + x_{13} \frac{\partial}{\partial \eta} & y_{23} \frac{\partial}{\partial \xi} - y_{13} \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Ovviamente nessuna semplificazione è possibile alla matrice di rigidezza che dipende dalle coordinate generali. Quello che invece si può notare è una maggiore semplicità nel passaggio dagli spostamenti nodali a quelli di un punto interno.

Più che presentare altri elementi finiti bidimensionali nel dettaglio, è meglio a questo punto svolgere un "semplice" esercizio per rendersi conto di come anche il problema più semplice risulti intrattabile col metodo FEM senza l'ausilio di un calcolatore.

Esempio



$$x_1 = 0 \quad y_1 = 0$$

$$x_2 = l \quad y_2 = 0$$

$$x_3 = \frac{l}{2} \quad y_3 = \frac{\sqrt{3}l}{2}$$

Le funzioni di forma si calcolano immediatamente

$$N_1 = \frac{1}{2A} \left(\frac{\sqrt{3}l^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}lx + \frac{l}{2}y \right)$$

$$N_2 = \frac{1}{2A} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}lx - \frac{l}{2}y \right)$$

$$N_3 = \frac{1}{2A} (ly)$$

Una piastra di spessore "t", di forma triangolare, vincolata nei punti 1 e 2 e libera in 3, dove è applicato un carico orizzontale P.

si ricorda che "A" è l'area del triangolo

Ora si può costruire la matrice $\underline{\underline{B}}$ che contiene le differenze tra le coordinate:

$$\underline{\underline{B}} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}l}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}l}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{2} & 0 & -\frac{l}{2} & 0 & l \\ -\frac{l}{2} & -\frac{\sqrt{3}l}{2} & -\frac{l}{2} & \frac{\sqrt{3}l}{2} & l & 0 \end{bmatrix}$$

ricordando che la matrice $\underline{\underline{E}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix}$

Si può passare al calcolo della matrice di rigidezza dell'elemento pari a: $\underline{\underline{k}} = t \cdot A \cdot (\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{B}})$

$$\underline{\underline{k}} = \frac{E \cdot t}{4A(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{3l^2}{4} + \frac{1-\nu}{8}l^2 & \frac{\nu\sqrt{3}l^2}{4} + \frac{1-\nu\sqrt{3}l^2}{8} & -\frac{3l^2}{4} + \frac{1-\nu}{8}l^2 & \frac{\nu\sqrt{3}l^2}{4} - \frac{1-\nu\sqrt{3}l^2}{8} & -\frac{1-\nu l^2}{4} & -\frac{\nu\sqrt{3}l^2}{2} \\ \text{Sym} & \frac{l^2}{4} + \frac{1-\nu}{8} \cdot 3l^2 & -\frac{\sqrt{3}\nu l^2}{4} + \frac{1-\nu\sqrt{3}l^2}{8} & \frac{l^2}{4} - \frac{1-\nu\sqrt{3}l^2}{8} & -\frac{1-\nu\sqrt{3}l^2}{4} & -\frac{l^2}{2} \\ \text{Sym} & \text{Sym} & \frac{3l^2}{4} + \frac{1-\nu}{8}l^2 & -\frac{\nu\sqrt{3}l^2}{4} - \frac{1-\nu\sqrt{3}l^2}{8} & -\frac{1-\nu l^2}{4} & \frac{\nu\sqrt{3}l^2}{2} \\ \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & \frac{l^2}{4} + \frac{1-\nu}{8} \cdot 3l^2 & \frac{1-\nu l^2}{2} & -\frac{l^2}{2} \\ \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & \frac{1-\nu l^2}{2} & 0 \\ \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & \frac{l^2}{2} \end{bmatrix}$$

Trovata la $\underline{\underline{k}}$ cerchiamo gli spostamenti del nodo 3.

$$\underline{k} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ P \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{essendo} \\ u_1 = v_1 = u_2 = v_2 = 0$$

d'equazione diventa molto più semplicemente

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2} l^2 & 0 \\ 0 & l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \cdot \frac{Et}{4A(1-\nu^2)} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui $v_3 = 0$ e $u_3 = \frac{4A(1-\nu^2)}{Et} P \cdot \frac{2}{(1-\nu)l^2} =$

$$= \frac{8P(1+\nu)}{Et \cdot l^2} \cdot (A)^{\frac{\sqrt{3}l^2}{4}} = \frac{8P(1+\nu) \cdot \sqrt{3}l^2}{4Et \cdot l^2}$$

$$u_3 = \frac{2\sqrt{3}(1+\nu)P}{Et}$$

Il campo di spostamenti ha solo la componente "u" ed è pari a:

$$u(x, y) = N_3 u_3 = \frac{ly}{lA} \cdot \frac{2\sqrt{3}(1+\nu)P}{Et} = \frac{4(1+\nu)P}{Et} \cdot \left(\frac{y}{l}\right)$$

lo spostamento orizzontale aumenta proporzionalmente alla "y" del punto.