

## de membrature inflesse

la prima operazione da fare è di vedere se una sezione di un elemento strutturale è soggetta a inflessione, ad essa, in generale, si comunque associa un certo livello di sollecitazione tagliente. Tale evenienza va sempre considerata quando si eseguono le procedure di verifica di progetto.

Rispetto a queste ultime si farà riferimento a due condizioni: stato limite d'esercizio (verifica di deformabilità) e stato limite ultimo (verifica a collasso).

Deformabilità: Il massimo spostamento perpendicolare all'asse per un elemento inflesso può essere calcolato mediante la risoluzione dell'equazione differenziale della linea elastica che assume un aspetto diverso a seconda se si considera il contributo del taglio " $V_T$ " o del momento " $V_F$ ". Lo spostamento complessivo sarà la somma di tali 2 contributi:

Cominciamo ad analizzare  
il contributo del taglio. Essendo:

$$V_{TOT} = V_T + V_F$$

$$\varphi(z) = \frac{dV(z)}{dz} = \frac{\overline{X} T(z)}{G A}$$

integrandi si ottiene:

$$V(z) = \int_{z_1}^z \frac{\overline{X} T(z)}{G A} dz \quad (1)$$

Tale integrale presenterà una costante arbitraria che andrà definita mediante condizioni al contorno. Il coefficiente  $\bar{x}$  rappresenta il "fattore di taglio" la cui valutazione riferita si ottiene mediante l'integrale:

$$\bar{x} = \frac{A}{I^2} \int_{y_i}^{y''} (s_i)^2 dy$$

area della sezione  
 momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse di flessione

momento statico rispetto all'asse neutro della parte di sezione sottesa dalla base  
 "bi"

Raramente si valuta questo integrale, in favore i valori di  $\bar{x}$  si trovano tabellati. Orientativamente si forniscono i seguenti valori:

- sezione rettangolare :  $\bar{x} = 4,2$
- profili tipo IPE :  $2,2 \leq \bar{x} \leq 2,6$
- profili tipo HFA & HEB :  $2,1 \leq \bar{x} \leq 4,7$
- profili tipo HEM :  $2,1 \leq \bar{x} \leq 4,4$

Una formula approssimata che puo' essere adottata per una stima (errore tra il 5 e il 10%) di  $\bar{x}$  nel caso di sezioni a doppio T è:

Il contributo del taglio alla deformazione è sicuramente trascurabile nel caso in cui risulti  $H/L \leq \frac{1}{15} \div \frac{1}{20}$

$$\bar{x}_T = \frac{A}{A_w}$$

area dell'anima

(2)

Il contributo sempre da considerare nell'ambito del calcolo della deflessione è quello del momento. In questo caso l'equazione della linea elastica assume la forma nota:  $\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M(z)}{EI}$  la cui soluzione

risulta da una integrazione doppia del termine  $\frac{M(z)}{EI}$ .

Resistenza: La verifica di resistenza viene approcciata dalle moderne normative in termini di caratteristiche prestazionali globali della sezione, con riferimento sia al momento resistente di progetto che al taglio resistente.

Con riferimento a quest'ultimo la tensione tangenziale massima, la  $\tau_{max}$ , va calcolata mediante l'approccio semplificato alla Torsawski, tuttavia per le sezioni a doppio T o ad H con carico parallelo all'anima, il contributo di resistenza al taglio delle ali è molto modesto per cui è possibile assumere che tutto il taglio sia anebito con tensioni uniformi dall'anima:

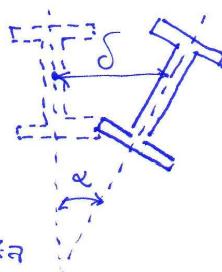
$$\tau_{max} = \frac{T}{A_w} \rightarrow \text{area dell'anima che viene amplificata leggermente per tener presente dei raccordi circolari ala-anima}$$

(3)

## Stabilità

Gli elementi inflessi presentano anche fenomeni di instabilità dell'equilibrio, denominati "instabilità laterale" o "svicolamento". Tale effetto è dovuto alla forza di compressione che agisce sull'ala superiore del profilo e che può determinare traslazione e rotazione della sezione, senza che il profilo possa esplicare pienamente le sue capacità di resistenza flessionale. I parametri che determinano l'insorgenza di tale instabilità sono: la lunghezza della trave, la distribuzione di carichi e vincoli, le rigidezze flessionali e torsionali, la differenza di quota fra il punto di applicazione del carico e la posizione di baricentro e centro di taglio. Questo ultimo punto è molto importante, in sezione a doppio T, ad esempio, il carico applicato all'ala superiore ha un effetto instabilizzante, mentre l'effetto è stabilizzante se il carico è applicato all'ala inferiore.

Nelle strutture, in genere, lo svicolamento è impedito dalla presenza di una soletta, o in generale



(4)

di un viucolo rigido che evita le traslazioni laterali, ecco il motivo per il quale fenomeni di instabilità laterale non sono da temere: in fase di esercizio di una struttura e le relative verifiche si limitano quasi sempre alla sola fase di montaggio in cui, come intuibile, i carichi sono sostanzialmente ridotti.

Si riporta, a questo punto, di seguito come la normativa vigente DMOG tratta le diverse verifiche relative agli elementi inflessi.

### Stati limite di esercizio

Spostamenti verticali:

Si definisce

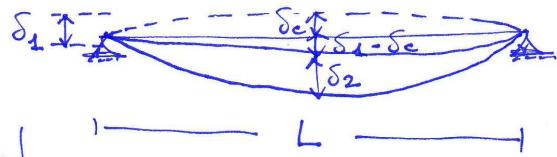
$\delta_c$ : monta iniziale della trave

$\delta_1$ : spostamento elastico dovuto ai carichi permanenti

$\delta_2$ : spostamento elastico dovuto ai carichi accidentali

$$\delta_{\text{tot}} = \delta_1 + \delta_2 ; \quad \delta_{\text{max}} = \delta_{\text{tot}} - \delta_c = \delta_1 + \delta_2 - \delta_c$$

Nel caso di coperture, solai e travi, valori limite di  $\delta_{\text{max}}$  e  $\delta_2$  sono forniti in funzione della luce "L" dell'elemento. In carezza di più precise (5)



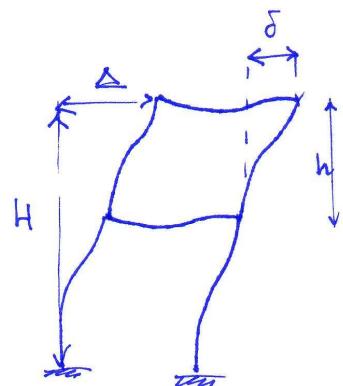
iudicazioni, si possono adottare i limiti indicati in tabella 4.2.X della norma:

Elemento	Limiti per spostamento verticale	
	$\delta_{\max}/L$	$\delta_2/L$
Coperture	1/200	1/250
Coperture praticabili	1/250	1/300
Solai	1/250	1/300
Solai o coperture che reffono intonaco o tramezzi rigidi	1/250	1/350
Solai che supportano colonne	1/400	1/500
Casi in cui lo spostamento puo' compromettere l'aspetto dell'edificio	1/250	

Nel caso di struttura a mensola (sbalzi), il valore di L va preso pari a 2 volte la lunghezza dello sbalzo.

#### - Spostamenti orizzontali

Negli edifici lo spostamento laterale delle colonne per le combinazioni caratteristiche devono limitarsi ad una frazione dell'altezza della colonna e di quella dell'edificio.



(6)

Anche qui in assenza di più precise indicazioni è possibile utilizzare le indicazioni della tab. 4.2.XI del DH 08:

Edificio	Limiti per gli spostamenti orizzontali	
	$\delta/h$	$\Delta/h$
Edifici industriali Monopiano senza carrozzone	1/150	—
Altri edifici monopiano	1/300	—
Edifici multipiano	1/300	1/500

### Resistenza allo Stato Limite Ultimo

Le verifiche di resistenza devono tenere in conto dell'azione flettente, dell'azione tagliante, ovvero della presenza contemporanea di entro le azioni.

Si comincia ad analizzare la situazione più favorevole, ovvero quella di sezioni a doppio T o ad H soggette a flessione con piastra banda compresa non sufficientemente vincolata lateralmente nei confronti dei fenomeni di instabilità. In tal caso la verifica va compiuta mediante la relazione:

$$\text{Mmassimo flettente di calcolo} \leq \text{Mmomento resistente per instabilità}$$

$H_{ED} \leq H_{b,Rd}$

(7)

Nel caso di trave non vincolata lateralmente, il momento di progetto è pari a:

$$M_{b,rd} = \chi_{LT} W_y \frac{f_y k}{f_{M3}}$$

In questa espressione:  $W_y$  è il modulo di resistenza della sezione che va considerato pari a:

- $\left\{ \begin{array}{l} W_{pl,y} \text{ modulo plastico per sezioni classe 1 e 2} \\ W_y \text{ modulo elastico per sezioni classe 3} \\ W_{eff,y} \text{ modulo elastico della sezione efficace per sezioni classe 4} \end{array} \right.$

$\chi_{LT}$  è il fattore di riduzione per instabilità fletto-torsionale, che per profili laminati o composti saldati, è pari a:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \beta \bar{I}_{LT}^2}} \leq \begin{cases} 1.0 \\ \frac{1}{\bar{I}_{LT}} \cdot \frac{1}{f} \end{cases}$$

con

$$\phi_{LT} = 0.5 \left[ 1 + \alpha_{LT} \left( \bar{I}_{LT} - \bar{I}_{LT,0} \right) + \beta \bar{I}^2 \right]$$

Il coefficiente di snellentezza adimensionale è dato dalla formula  $\bar{I}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_y k}{M_{cr}}}$

$\rightarrow$  momento critico elastico di instabilità torsionale, calcolato

con sezione linda e i reitogni torsionali nel caso di momento flettente uniforme (8)

$\lambda_{LT}$  è il fattore di imperfezione, ottenuto mediante la tabella 4.2.VII. I valori di  $\bar{\lambda}_{LT,0} = \beta$  si possono assumere rispettivamente pari a 0,2 (in ogni caso tenersi sotto 0,4) e 1 (in ogni caso tenersi sopra 0,75)

Il fattore  $\varphi$  considera, infine, la reale distribuzione del momento flettente (nel calcolo di  $M_{cr}$  si era supposto momento uniforme) tra i ritegni torsionali. Esso è definito dalla formula:

$$\varphi = 1 - 0,5 (1 - k_c) [1 - 2,0 (\bar{\lambda}_{LT} - 0,8)^2]$$

si assumono i valori contenuti  
in tabella 4.2.VIII

Ci resta da definire il valore di  $M_{crit}$ . In questa sede non si espongono gli aspetti teorici della questione limitandosi a dire che il DM08 non fornisce alcuna indicazione su come calcolarlo. Un riferimento utile in questo caso è quello dell'Eurocodice 3 che riporta la seguente espressione

$$M_{crit} = C_s \frac{\pi^2 EI_z}{(KL)^2} \cdot \left( \sqrt{\left(\frac{k}{k_w}\right)^2 \cdot \frac{I_w}{I_z} + \frac{(KL)^2 GI_F}{\pi^2 EI_z} + (C_2 z_0)^2} - C_2 z_0 \right)$$

in tale formula:

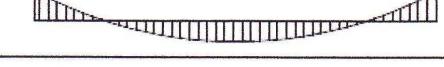
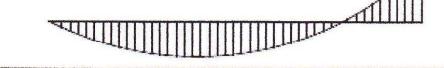
" $z_0$ " è la distanza fra il punto di applicazione del carico e il centro di taglio della sezione;

(9)

**Tabella 4.2.VII** Definizione delle curve d'instabilità per le varie tipologie di sezione e per gli elementi inflessi.

Sezione trasversale	Limiti	Curva di instabilità da Tab. 4.2.VI
Sezione laminata ad I	$h/b \leq 2$	b
	$h/b > 2$	c
Sezione composta saldata	$h/b \leq 2$	c
	$h/b > 2$	d
Altre sezioni trasversale	-	d

**Tabella 4.2.VIII** Coefficiente correttivo del momento flettente per la verifica a stabilità delle travi inflesse.

Distribuzione del momento flettente	Fattore correttivo $k_c$
$M_{sx}$  $M_{dx}$ $\Psi = M_{dx}/M_{sx} = 1$	1,0
$M_{sx}$  $M_{dx}$ $-1 \leq \Psi \leq 1$	$\frac{1}{1,33 - 0,33\Psi}$
	0,94
	0,90
	0,91
	0,86
	0,77
	0,82

(40)

" $k_w$ " è un coefficiente di lunghezza efficace nei confronti dell'injabbaento ad un estremo. Si assumono i seguenti valori:

$k_w = 0,5$  elemento incastato - incastato

$k_w = 1,0$  senza di incasti

$k_w = 0,7$  un estremo incastato e l'altro libero.

" $k_u$ " è un coefficiente di lunghezza efficace rispetto alla rotazione di un estremo nel piano. Segue le stesse regole di  $k_w$  solo che per quest'ultimo si ci riferiva a vincoli di tipo torsionale, mentre in questo caso il vincolo è di natura flessionale.

" $I_t$ " è la costante di torsione, ovvero la rigidezza torsionale

" $I_z$ " è il momento d'inerzia rispetto all'asse debole

" $L$ " distanza fra i punti della trave che presentano vincolo laterale

" $C_1$ " e " $C_2$ " coefficienti dipendenti dalle condizioni di carico e di vincolo degli estremi. Si guardino le tabelle 4.7 e 4.8 seguenti per un quadro esauritivo di tali valori.

" $I_w$ " è la costante di injabbaento, che nel caso di profili doppio T o H senza incividimenti si può calcolare come:  $I_w = I_z \cdot \frac{(h-t_f)^2}{4}$  (91)

Tabella 4.7 Prospetto F1.1 dell'EC3. Valori dei coefficienti  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  corrispondenti ai valori del coefficiente  $k$ : momento all'estremità.

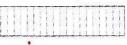
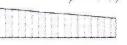
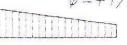
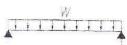
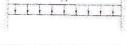
Condizioni di carico e di vincolo	Diagramma del momento flettente	Valori di $k$	Valori dei coefficienti		
			$C_1$	$C_2$	$C_3$
	$\psi = +1$ 	1,0 0,7 0,5	1,000 1,000 1,000	— — —	1,000 1,113 1,144
	$\psi = +3/4$ 	1,0 0,7 0,5	1,141 1,270 1,305	— — —	0,998 1,565 2,283
	$\psi = +1/2$ 	1,0 0,7 0,5	1,323 1,473 1,514	— — —	0,992 1,556 2,271
	$\psi = +1/4$ 	1,0 0,7 0,5	1,563 1,739 1,788	— — —	0,977 1,531 2,235
	$\psi = 0$ 	1,0 0,7 0,5	1,879 2,092 2,150	— — —	0,939 1,473 2,150
	$\psi = -1/4$ 	1,0 0,7 0,5	2,281 2,538 2,609	— — —	0,855 1,340 1,957
	$\psi = -1/2$ 	1,0 0,7 0,5	2,704 3,009 3,093	— — —	0,676 1,059 1,546
	$\psi = -3/4$ 	1,0 0,7 0,5	2,927 3,009 3,093	— — —	0,366 0,575 0,837
	$\psi = -1$ 	1,0 0,7 0,5	2,752 3,063 3,149	— — —	0,000 0,000 0,000

Tabella 4.8 Prospetto F1.2 dell'EC3. Valori dei coefficienti  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  corrispondenti ai valori del coefficiente  $k$ : casi di carico trasversale.

Condizioni di carico e di vincolo	Diagramma del momento flettente	Valori di $k$	Valori dei coefficienti		
			$C_1$	$C_2$	$C_3$
		1,0 0,5	1,132 0,972	0,459 0,304	0,525 0,980
		1,0 0,5	1,285 0,712	1,562 0,652	0,753 1,070
		1,0 0,5	1,365 1,070	0,553 0,432	1,730 3,050
		1,0 0,5	1,565 0,938	1,267 0,715	2,640 4,800
		1,0 0,5	1,046 1,010	0,430 0,410	1,120 1,890

(12)

Nel caso di condizione di carico con momento agli estremi e carico trasversale portante per il centro di taglio ( $z_g=0$ ) , l'espressione del momento critico si semplifica in:

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 E I_z}{(KL)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{k}{k_w}\right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(KL)^2 G I_t}{\pi^2 E I_z}}$$

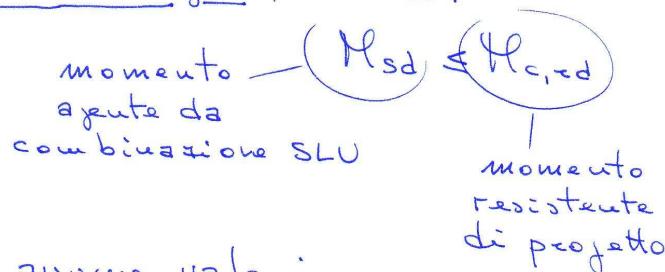
Se inoltre non sono presenti incastri agli estremi:  
( $k=k_w=1$ )

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 E I_z}{(KL)^2} \cdot \sqrt{\frac{I_w}{I_z} + \frac{L^2 G I_t}{\pi^2 E I_z}}$$

Si precisa che nel caso di snellenza non elevata, questo tipo di instabilità è influente sulla capacità portante dell'elemento inflesso. Se  $\Gamma_{LT} \leq 0,4$  la verifica flesso-torsionale può essere omessa.

In quest'ultimo caso si esegue una verifica di resistenza "classica":

Nel caso tipico di flessione intorno ad un asse viene richiesto che, in assenza di taglio, risulti:



Il momento resistente assume valori differenti in funzione della classe della sezione:

sezione classe 1 e 2 :  $M_{c,r,d} = \frac{W_{pl} \cdot f_y}{f_{MO}}$

si calcola con riferimento alla sezione linda. (15)

sezione classe 3 :

$$M_{c,Rd} = W_{el} \cdot f_y / f_{M0}$$

sezione classe 4 :

$$M_{c,Rd} = W_{eff} \cdot f_y / f_{M1}$$

In presenza di taglio, va effettuata prima una verifica a taglio propria e poi va verificato se il livello di taglio è tale da penalizzare la verifica a flessione.

Nel primo caso si deve verificare che l'azione tagliente in ogni sezione non superi la resistenza a taglio plastica di progetto:

$$V_{sd} \leq V_{rd} = \frac{A_v f_y}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{f_{M0}}$$

area resistente  
a taglio

Il valore dell'area resistente a taglio si calcola come segue:

Sezione	Formula
Profili a doppio T e H con carico parallelo all'anima	$A_v = A - 2bt_p + (t_w + 2r)t_p$ ala anima
Profili laminati a C con carico parallelo all'anima	$A_v = A - 2bt_p + (t_w + r)t_p$
Sezioni saldate a doppio T, H o a cassone con carico parallelo all'anima	$A_v = \sum (d \cdot t_w)$ altezza anima
Sezioni saldate a doppio T ed H con carico parallelo alle ali	$A_v = A - \sum (d \cdot t_w)$
Profili cavi rettangolari di spessore uniforme con carico parallelo ad H	$A_v = \frac{Ah}{b+h}$

(14)

Sezione

Profilati cavi rettangolari di spessore uniforme con carico parallelo a "b"

Formula

$$A_w = \frac{Ab}{b+h}$$

Sezioni cave circolari e tubi in spessore uniforme

$$A_w = 2A/\pi$$

Piatti e barre finite

$$A_D = A$$

Oltre a questa verifica, c'è bisogno di valutare anche l'instabilità per taglio nel caso si ritienga l'anima particolarmente snella, ovvero siano verificate le seguenti diseguaglianze:

- nel caso di anima non irridita

$$\frac{d}{t_w} > 69 \cdot \sqrt{\frac{235}{f_y}} - \text{in } \frac{N}{mm^2}$$

- nel caso di anima irridita

$$\frac{d}{t_w} > 30 \cdot \sqrt{\frac{235}{f_y}} \cdot \sqrt{K_x}$$

$K_x$  è un coefficiente detto di "imbottramento per tensioni tangenziali", funzione dell'interasse netto tra gli irridimenti intermedi "a" e l'altezza dell'anima "d". I seguenti valori sono sufficienzi:

- anime munite di irridimenti trasversali agli appoggi, ma senza irridimenti intermedi

$$K_x = 5,34$$

- anime munite di irridimenti trasversali agli appoggi e intermedi con  $a/d < 1$

$$K_x = 4 + \frac{5,34}{(\frac{a}{d})^2}$$

- anime munite di irridimenti trasversali agli appoggi e intermedi con  $a/d \geq 1$

$$K_x = 5,34 + \frac{4}{(\frac{a}{d})^2}$$

(15)

Infine, nel caso in cui  $V_{sd}$  superi il 50% di  $V_{rd}$ , la verifica a flessione va fatta considerando un momento resistente  $M_{V,Rd}$  ridotto da tenuta conto della presenza del taglio.

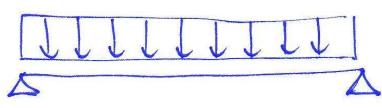
Nel caso di sezioni ad ali uguali, con flessione intorno all'asse forte, risulta:

$$M_{V,Rd} = \left( W_{pl} - \frac{\rho A_v^2}{4 \cdot t_w} \right) \cdot \frac{f_y}{f_{y0}}$$

in cui "g" è un fattore riduttivo

$$g = \left( \frac{2 V_{sd}}{V_{rd}} - 1 \right)$$

### Esempio applicativo



$$g = 900 \text{ kg/m}$$

profilo IPE 270

$$g = 600 \text{ kg/m}$$

acciaio S235

$$L = 6 \text{ m}$$

Presenza di una solletta che evita fenomeni di instabilità laterale

Profilo IPE 270 - acciaio S235

$$\text{Ala: } c/t_f = \frac{135}{2 \cdot 10,2} = 6,6 \leq 10$$

$$\text{Anima: } d/t_w = \frac{(270 - 2 \cdot 10,2 - 2 \cdot 15)}{6,6} = 33,3 \leq 72$$

Il profilo è di classe 1

Nelle verifiche di deformazione si considererà il peso della trave (35 kg/m), mentre si trascurerà il contributo del taglio, avendo  $\frac{L}{H} = 22 \geq 15/20$

(46)

$$\delta_{\max} = \frac{5}{384} \frac{q L^4}{E I_{\max}} = \frac{5}{384} \cdot \frac{(0,35+9,00+6,00) \cdot 600^4}{2400000 \cdot 5790} = 2,13 \text{ cm} \leq 2,4 \text{ cm}$$

$L/250$

$$\delta_2 = \frac{5}{384} \frac{600 \cdot 600^4}{2400000 \cdot 5790} = 0,83 \text{ cm} \leq 2,0 \text{ cm} = L/300$$

Le verifiche di deformabilità sono soddisfatte.

Verifiche di resistenza: si eseguono quelle classiche essendo non possibile il fenomeno di instabilità laterale.

$$V_{sd} = \frac{qL}{2} = \frac{(1,3 \cdot q_f + 1,3q + 1,5q)L}{2} = \frac{(1,3 \cdot (0,35 + 9) + 1,5 \cdot 6) \cdot 600}{2} = 6630 \text{ kg}$$

$$M_{sd} = \frac{qL^2}{8} = \frac{(1,3(q_f + q) + 1,5q)L^2}{8} = \frac{(1,3 \cdot 9,35 + 1,5 \cdot 6) \cdot 600^2}{8} = 994000 \text{ kg cm} = 9940 \text{ kg m}$$

Calcolo resistenza a taglio:

$$V_{Rd} = \frac{A_D f_y}{\sqrt{3} \cdot \gamma_{M0}} = \left[ A - 2b t_f + (t_w + 2r) t_f \right] \frac{f_y}{\sqrt{3} \gamma_{M0}} = \\ = \left[ 45,94 - 2 \cdot 13,5 \cdot 1,02 + (0,66 + 2 \cdot 1,5) \cdot 1,02 \right] \cdot \frac{2350}{\sqrt{3} \cdot 1,05} = 28600 \text{ kg}$$

Come è possibile verificare non solo  $V_{sd} \leq V_{Rd}$ , ma è anche minore del 50% di  $V_{Rd}$ , per cui non c'è riduzione da applicare a  $M_{pl,rd}$ :

$$M_{pl,rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}} = 10830 \text{ kg m} > \frac{OK}{M_{sd}}$$

(1)