Operazioni con le matrici

In questi appunti vedremo come si svolgono 4 operazioni basilari che hanno come oggetto le matrici.
In particolare vedremo come è possibile svolgere:

1) somma e differenza di matrici
2) prodotto di un numero per una matrice
3) prodotto riga per colonna di due matrici
4) Determinante di una matrice.

1) Somma e differenza di matrici

Per poter effettuare questa operazione le matrici da sommare o sottrarre devono avere le stesse identiche dimensioni, ovvero devono avere tra di loro sia lo stesso numero di righe che lo stesso numero di colonne. Se tale condizione non è valida l'operazione non si può svolgere. Come si svolge l'operazione?

E' semplice! Basta effettuare la somma o la sottrazione dei termini che nelle due matrici occupano il medesimo posto. Un esempio chiarirà le idee:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Entrambe le matrici hanno dimensione 3×2, ovvero 3 righe e 2 colonne, per cui è possibile svolgere le operazioni: $A + B$, $A - B$, $B - A$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Nell'esempio di sopra per trovare l'elemento di posto (1,1) della matrice si effettuera' la somma dei 2 elementi che occupano la stessa posizione nelle due matrici di partenza: $4 + (-3) = 4 - 3 = 1$

Si procedera' cosi' per tutti gli altri elementi delle due matrici. Svolgiamo nello stesso modo anche le due differenze:

$$A - B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -1 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Prodotto di un numero per una matrice

A differenza dell'operazione precedente il prodotto di un numero per una matrice si può sempre eseguire. Il risultato sarà una matrice avente le stesse dimensioni di quella di partenza ed in cui ogni elemento è moltiplicato per il numero considerato.

Anche in questo caso un esempio è meglio di 1000 parole. Si consideri la matrice $A_{2\times3}$ (2 righe e 3 colonne):

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

e la si voglia moltiplicare per -3:

$$-3A = -3 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +6 & -15 & -9 \\ 0 & -3 & -12 \end{bmatrix}$$

La matrice risultato si otterrà moltiplicando -3 per ognuno degli elementi della matrice A.

Combinando somma o differenza e prodotto per un numero si possono avere espressioni algebriche con le matrici. Per tali espressioni valgono le stesse regole delle espressioni con i numeri.

ovvero si svolgono prima le moltiplicazioni e poi le somme algebriche. Volendo fare un esempio consideriamo le seguenti due matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e la seguente espressione: $3B - 2A$, in essa si svolgeranno prima i prodotti ottenendo ancora due matrici 2×2 che poi si potranno sottrarre:

$$3 \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -17 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

3) Prodotto riga per colonna di due matrici

Questa è sicuramente l'operazione più complessa nella sua definizione a partire dai requisiti che le 2 matrici devono avere affinché il prodotto riga per colonna possa svolgersi. Date due matrici A e B, affinché si possa svolgere $A \cdot B$ il numero di colonne della matrice A deve essere pari al numero di righe della matrice B.

Per esempio se A è 3×3 e B è 2×3, l'operazione non può svolgersi: $A_{3\times 3} \cdot B_{2\times 3}$

per fare il prodotto questi 2 numeri devono essere uguali

Differentemente se A avesse dimensioni 3×2 il prodotto sarebbe possibile: $A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 3}$ e la matrice risultato avrebbe come dimensioni gli altri due numeri non coinvolti in questo confronto, cioè avrebbe le righe di A e le colonne di B, in altre parole sarebbe una matrice 3×3.

Ci resta da capire come si esegue questo prodotto, per farlo prendiamo 2 matrici con le dimensioni indicate:

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

il prodotto da svolgere sarà:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & & \\ & -2 & \end{bmatrix}$$

$1 \cdot 4 - 2 \cdot 0$

$1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1)$

$3 \times 2 \quad 2 \times 3$

Abbiamo capito che la matrice risultato sarà 3×3, avrà dunque 9 elementi

Partiamo dall'elemento (1,1), cioè quello che occupa il posto 1ª riga - 1ª colonna, per calcolarlo si prenderà la 1ª riga della prima matrice e la 1ª colonna della seconda matrice. Se il prodotto si può svolgere questa riga e questa colonna avranno lo stesso numero di elementi (nel nostro caso 2) si moltiplicheranno gli elementi che nella riga e nella colonna occupano lo stesso posto, dopodiché si effettuerà la somma.

Nel caso specifico il 1º elemento della 1ª riga di A va a moltiplicare il 1º elemento della 1ª colonna di B: $1 \cdot 4 = 4$, la stessa cosa si fa per i secondi elementi: $-2 \cdot 0 = 0$, dopodiché i due risultati si sommano: $4 + 0 = 4$. Dunque nel posto (1,1) della matrice risultato ci sarà 4. Supponiamo di voler calcolare l'elemento (3,2) del risultato, si considererà allora la 3ª riga di A e la 2ª colonna di B, ripetendo le stesse operazioni: primo elemento per primo elemento, secondo elemento per secondo elemento, e poi la somma:

$$1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) = -2 + 0 = -2$$

Eseguendo lo stesso ragionamento per tutti gli elementi si otterrà:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 12 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Svolgiamo un altro esempio, supponiamo stavolta che A e B siano:

$$\underset{2\times 3}{A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \underset{3\times 1}{B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

A·B si può svolgere e il risultato è una matrice 2×1

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad -4 \quad 3} \\ \boxed{2 \quad -1 \quad 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 - 4\cdot(-4) + 3\cdot 2 \\ 2\cdot 1 - 1\cdot(-4) + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 8 \end{bmatrix}$$

si sono espressi tutti i calcoli da svolgere.

Si noti che il prodotto riga per colonna non è commutativo, anzi in generale se si prova ad invertire l'ordine delle matrici il prodotto può non potersi proprio svolgere. Proviamo infatti a fare:

$$\underset{3\times 1 \;\; 2\times 3}{B \cdot A}$$

il numero di colonne di B è diverso dal numero di righe di A, per cui il prodotto non si può fare

4) Determinante di una matrice

Per determinante di una matrice si intende una funzione che data una matrice quadrata restituisca un numero. La prima osservazione da fare è che se la matrice non è quadrata il determinante non può calcolarsi. Noi ci limiteremo ai casi più semplici: matrice 2×2 e matrice 3×3.

Partiamo dal caso 2×2, prendendo la seguente matrice:

diagonale secondaria

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

diagonale principale

in questa matrice si possono individuare 2 diagonali, quella che parte dall'elemento (1,1) si dice "principale", l'altra invece "secondaria".

Il determinante si svolge semplicemente facendo il prodotto dei termini sulle 2 diagonali e poi sottraendo al risultato relativo alla diagonale principale quello della diagonale secondaria:

$$\det(A) = 1\cdot 2 - 3\cdot(-2) = 2+6 = 8$$

La regola è molto semplice, facciamo qualche altro esempio:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = 3 \cdot 1 - \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) =$$
$$= 3 + \frac{1}{6} = \frac{18+1}{6} = \frac{19}{6}$$

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(C) = (-4) \cdot (-1) - 2 \cdot 2 =$$
$$= 4 - 4 = 0$$

Il fatto che $\det(C) = 0$ non è casuale, ciò capita infatti tutte le volte che una riga o una colonna si può ottenere moltiplicando l'altra per un numero. Nel caso specifico la 1ª riga si può ottenere moltiplicando la 2ª riga per -2.

Passiamo al caso leggermente più complesso di matrice 3×3, in tal caso la tecnica di risoluzione prende il nome di metodo di Sarrus.
Vediamo come si applica con un esempio, si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

la si riscriva ora riportando come 4ª e 5ª colonna le prime 2 ripetute

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -2 & 3 \end{array}$$

diagonali secondarie

diagonali principali

in tale tabella si possono definire 3 diagonali principali ognuna di 3 elementi e 3 diagonali secondarie ognuna di 3 elementi. Si moltiplicheranno i termini di ogni diagonale, prendendo con il loro segno i risultati ottenuti sulle diagonali principali e cambiando di segno quelli ottenuti dalle diagonali secondarie. Come ultima operazione le 6 quantita' ottenute si sommano:

$$\mathrm{Det}(A) = \underbrace{\left(1\cdot 1\cdot 2 + 4\cdot(-1)(-2) - 2\cdot 0\cdot 3\right)}_{\text{diagonali principali}} - \underbrace{\left(-2\cdot 1\cdot(-2) + 3\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 4\right)}_{\text{diagonali secondarie}} = (2+8-0)-(4-3+0) =$$

$$= 10 - 1 = 9$$

Anche qui facciamo almeno un altro esempio:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 4 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\det(B) = \left(2\cdot(-2)\cdot 3 - \cancel{1\cdot 1\cdot 0} + 4\cdot(-3)\cdot 1\right) - \left(\cancel{0\cdot(-2)}\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot(-3)(-1)\right) = (-12-12)-(2+9) = -24-11 =$$

$$= -35$$