

ELEMENTI DI TRIGONOMETRIA SFERICA

Concetto di circolo o cerchio massimo. \rightarrow piano passante per il centro

se si prende una retta normale ad un piano equatoriale una individuata sulla sfera i poli

\leftarrow si dice anche piano equatoriale,

Misura in steradiani: $1 \text{ sr} \cong (57,3)^\circ$ gradi quadrati;

\forall punto della superficie piano ∞ cerchi massimi per 2 punti che non siano i poli forma 1 circonferenza massima (i 2 punti e il centro individuano un piano)

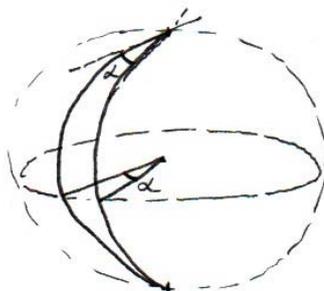
Due circonferenze massime si intersecano in 2 poli

I cerchi massimi sono analoghi alle rette nel piano, dunque è immediato pensare alla distanza tra 2 punti come arco di cerchio massimo tra essi (geodetica \rightarrow distanza più breve)

Due cerchi massimi dividono la sfera in 4 fusi sferici

Angolo sferico: si consideri due cerchi massimi, l'angolo sferico tra essi è l'angolo che si ottiene:

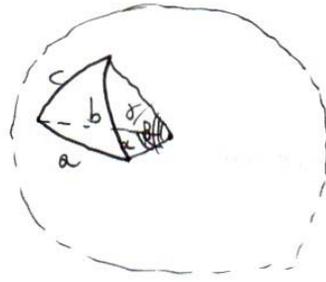
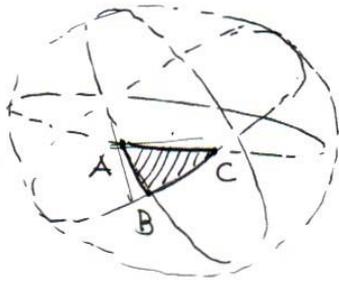
- 1) considerando la loro intersezione con un piano \perp passante per il centro
- 2) considerando le tangenti nei poli in cui si intersecano



Triangolo sferico: porzione superficie sferica delimitata da 3 circonferenze massime che si intersecano a 2 a 2.

Le 3 semicirconferenze a 2 a 2 individuano 3 angoli sferici.

(1)



per definizione
di radiante
è evidente
che risulta:

$$\begin{cases} a = \alpha \cdot r \\ b = \beta \cdot r \\ c = \gamma \cdot r \end{cases}$$

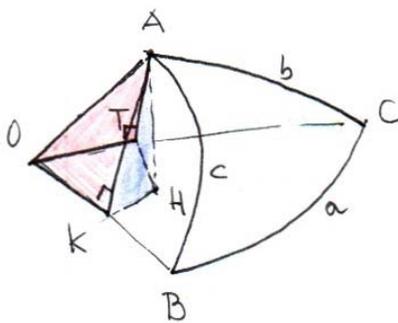
È possibile dunque
definire 3 angoli sferici
considerando i 3 diversi
fusi \hat{A} , \hat{B} e \hat{C}

si faccia attenzione
che \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} sono diversi
da α , β e γ che rappresentano
la lunghezza dei segmenti
nel caso di sfera trigonometrica
($r=1$)

I triangoli sferici
godono di una serie
di proprietà:

- ogni lato è minore di π
e al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore
- valgono le disuguaglianze triangolari
- $a+b+c < 2\pi$ ($D = 2\pi - a - b - c$ difetto sferico)
- $180^\circ \leq \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \leq 540^\circ$ ($E = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$ eccesso sferico)
- $S = E$ (area di un triangolo sferico)
- Esistono triangoli rettilateri, birettilateri,
trirettilateri, così come rettangoli, birettangoli,
trirettangoli

Trigonometria sferica:



teorema dei seni:

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin \alpha} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \beta} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \gamma}$$

Dim: si traccia da A la
normale al piano OBC, H.

per il teorema delle 3
perpendicolari si individuano
una serie di triangoli rettangoli

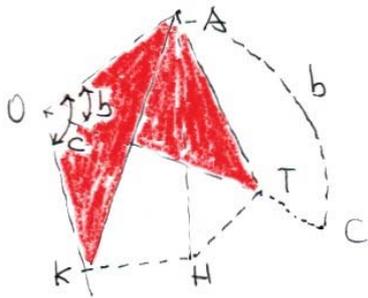
(2)

in particolare \overline{AH} si può ottenere in 2 modi diversi:

$$\overline{AH} = \overline{AT} \cdot \underbrace{\sin \hat{A}TH}_{\text{corrisponde a } \hat{C} \text{ perché}} = \overline{AK} \cdot \underbrace{\sin \hat{A}KH}_{\text{corrisponde a } \hat{\beta}}$$

\overline{AT} e \overline{TH} sono parallele alle tangenti in C, del resto formano angoli di 90° con \overline{OC} anche se su piani diversi

$$\overline{AT} \cdot \sin \hat{C} = \overline{AK} \cdot \sin \hat{\beta}$$



ora consideriamo i 2 triangoli evidenziati in rosso, calcoliamo \overline{AT} ed \overline{AK} appoggiandoci al lato OA:

$$\overline{AT} = OA \cdot \sin b$$

$$\overline{AK} = OA \cdot \sin C$$

trovandoci su di una sfera trigonometrica. ($OA = 1$)

$$\overline{AT} = \sin b$$

$$\overline{AK} = \sin C$$

sostituendo nella precedente relazione:

$$\sin b \cdot \sin \hat{C} = \sin c \cdot \sin \hat{\beta}$$

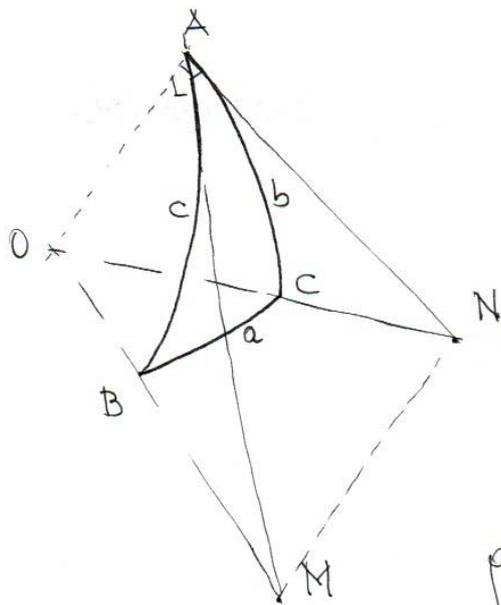
da cui la tesi.

Se la perpendicolare si traccia dagli altri due vertici si ottiene la relazione completa.

teoremi del coseno: (o di Eulero)

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \hat{A} \\ \cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \hat{\beta} \\ \cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \hat{C} \end{cases}$$

(3)



tiriamo in A le perpendicolari
 ad OA appartenenti ai
 piani delle circonferenze
 massime cui appartengono
 "b" e "c" individuando i
 punti N ed M.

I triangoli $\triangle OAN$ e $\triangle OAM$ sono
 rettangoli, per cui:

$$\begin{cases}
 \overline{AN} = \overline{OA} \cdot \tan b = \tan b \\
 \overline{AM} = \overline{OA} \cdot \tan c = \tan c \\
 \overline{NO} = \overline{OA} / \cos b = 1 / \cos b \\
 \overline{MO} = \overline{OA} / \cos c = 1 / \cos c
 \end{cases}$$

Applichiamo ora il teorema di Carnot al
 triangolo $\triangle ONM$: $\overline{MN}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{OM}^2 - 2\overline{ON} \cdot \overline{OM} \cdot \cos a =$

$$= \frac{1}{\cos^2 b} + \frac{1}{\cos^2 c} - \frac{2}{\cos b \cdot \cos c} \cdot \cos a =$$

$$= \frac{\cos^2 c + \cos^2 b - 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\cos^2 b \cdot \cos^2 c}$$

Lo stesso
 teorema lo
 applichiamo
 al triangolo
 $\triangle AMN$

$$\overline{MN}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{AM}^2 - 2\overline{AN} \cdot \overline{AM} \cdot \cos \hat{A} =$$

$$= \tan^2 b + \tan^2 c - 2 \tan b \cdot \tan c \cdot \cos \hat{A}$$

$$= \frac{\sin^2 b}{\cos^2 b} + \frac{\sin^2 c}{\cos^2 c} - 2 \cdot \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\sin c}{\cos c} \cdot \cos \hat{A}$$

(4)

$$= \frac{\sin^2 b \cdot \cos^2 C + \sin^2 C \cdot \cos^2 b - 2 \sin b \sin c \cdot \cos b \cdot \cos c \cdot \cos \hat{A}}{\cos^2 b \cdot \cos^2 C}$$

A questo punto basta uguagliare le 2 relazioni ottenendo:

$$\cos^2 C + \cos^2 b - 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos C =$$

$$= \sin^2 b \cdot \cos^2 C + \sin^2 C \cdot \cos^2 b - 2 \sin b \cdot \sin c \cdot \cos b \cdot \cos c \cdot \cos \hat{A}$$

da questa relazione attraverso semplici sviluppi si ottiene "cos a"

$$\cos a = \cos b \cdot \cos C + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \hat{A}$$

Tirando le perpendicolari dagli altri vertici si ottengono le altre due formule. Con le 3 formule è possibile ottenere gli angoli in funzione dei lati:

$$\begin{cases} \cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cdot \cos \hat{a} \\ \cos \hat{B} = -\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} + \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{C} \cdot \cos \hat{b} \\ \cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} + \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \cos \hat{c} \end{cases}$$

Si noti che in un triangolo sferico la conoscenza dei 3 angoli permette di calcolare i 3 lati, a differenza che nel caso di triangoli piani.

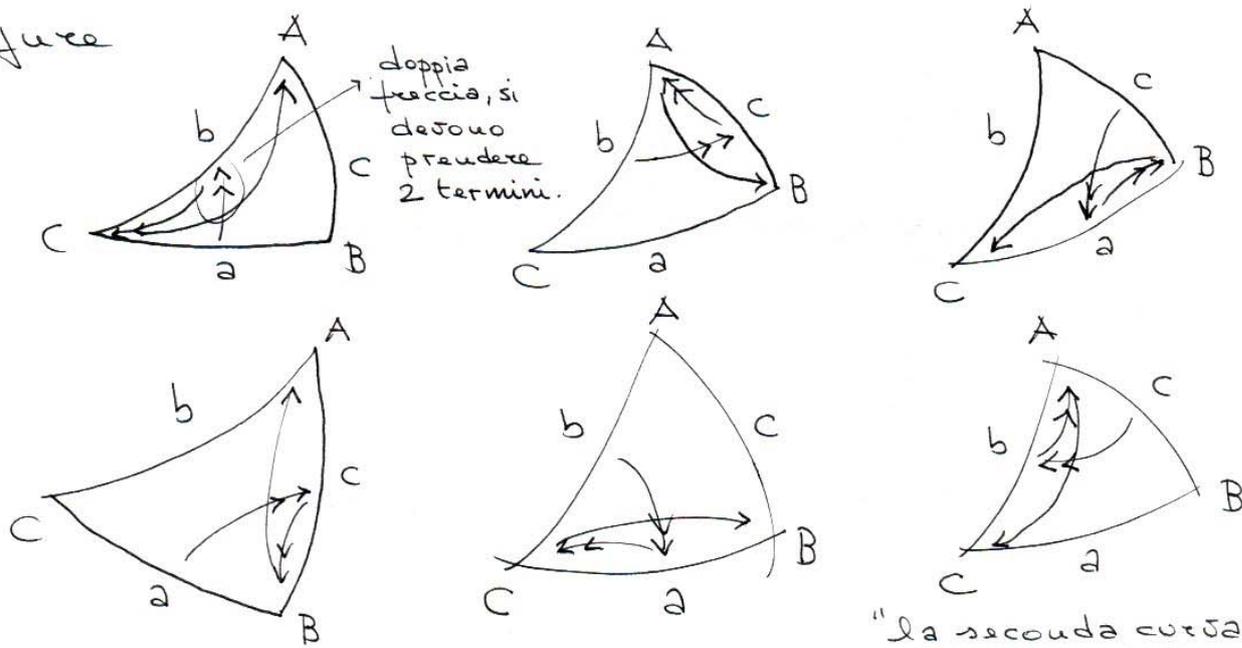
Unendo insieme i due risultati ottenuti si ottengono le 6 formule di Viete:

(5)

Per ricordarle poniamo pensare ad uno schema
fisso:

$$\cotan _ \sin _ = \cos _ \cos _ + \sin _ \cotan _$$

per inserire lati e angoli si ci rifera alle seguenti
figure

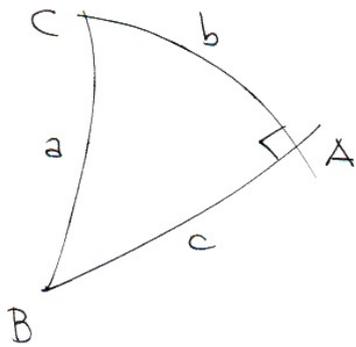


ottenendo 6 espressioni:

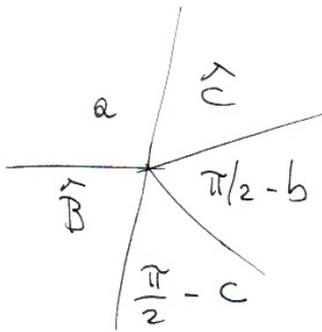
$$\left. \begin{aligned} \cotan a \cdot \sin b &= \cos b \cdot \cos \hat{C} + \sin \hat{C} \cdot \cotan \hat{A} \\ \cotan b \cdot \sin c &= \cos c \cdot \cos \hat{A} + \sin \hat{A} \cdot \cotan \hat{B} \\ \cotan c \cdot \sin a &= \cos a \cdot \cos \hat{B} + \sin \hat{B} \cdot \cotan \hat{C} \\ \cotan a \cdot \sin c &= \cos c \cdot \cos \hat{B} + \sin \hat{B} \cdot \cotan \hat{A} \\ \cotan b \cdot \sin a &= \cos a \cdot \cos \hat{C} + \sin \hat{C} \cdot \cotan \hat{B} \\ \cotan c \cdot \sin b &= \cos b \cdot \cos \hat{A} + \sin \hat{A} \cdot \cotan \hat{C} \end{aligned} \right\}$$

Le 3 tipologie di formula viste fin qui si
semplificano notevolmente nel caso in cui
uno degli angoli sterici sia retto.

In tal caso è possibile infatti utilizzare una
 regola mnemonica detta regola di Nepero.



si prende un angolo fiso e
 lo si divide in 5 parti
 si inizia dal lato opposto
 all'angolo retto e poi si
 prosegue a riempire seguendo
 lo schema del triangolo
 sostituendo agli altri 2 lati i
 complementari.



La regola dice che il coseno di un
 elemento è pari a:

- prodotto delle cotangenti dei
 termini adiacenti;
- prodotto dei seni degli
 elementi opposti

$$\cos a = \operatorname{ctg} \hat{B} \cdot \operatorname{ctg} \hat{C}$$

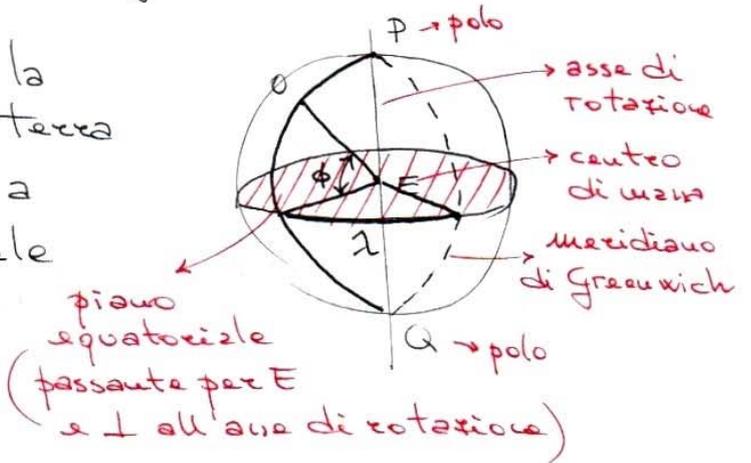
$$\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \cos b \cdot \cos c.$$

Coordinate astronomiche

Un osservatore sulla Terra è univocamente determinato mediante la sua longitudine e latitudine

paralleli : intersezione tra la superficie della terra e piani paralleli a quello equatoriale

meridiani : piani ortogonali all'equatore e passanti per l'asse di rotazione li definiscono sulla superficie



ϕ : angolo tra \overline{OE} e il piano equatoriale misurato lungo il meridiano per **O** si dice latitudine di **O** geocentrica.

λ : angolo sferico compreso tra il parallelo passante per **O** ed uno di riferimento si dice longitudine di **O**

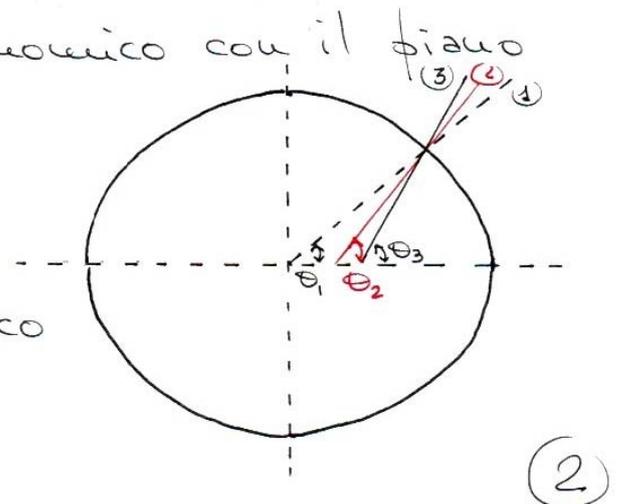
Il problema in queste definizioni è che la terra non è una sfera, è un ellissoide di rotazione oblatto, in altre parole occupa un volume ottenuto facendo ruotare un'ellisse intorno al suo asse minore.

La latitudine geocentrica è complessiva da determinare, a meno che non si abbiano collegamenti con stazioni lontane, per cui si definisce la latitudine geodetica (che è quella indicata sulle mappe), ovvero l'angolo formato tra la normale all'ellissoide e il piano dell'equatore (tale direzione normale si dice zenit geodetico). Il piano normale allo zenit geodetico si chiama orizzonte geodetico.

È necessaria una terza definizione di natura applicativa e che utilizza la direzione del filo a piombo. Tale direzione, infatti, a causa della rotazione terrestre non punta il centro di massa. (inoltre la terra non ha una distribuzione di massa uniforme). La direzione in questione è detta zenit astronomico e il piano ad essa perpendicolare, orizzonte astronomico. L'angolo formato dallo zenit astronomico con il piano equatoriale si dice

latitudine astronomica

- (1) zenit geodetico centrico
- (2) zenit geodetico
- (3) zenit astronomico



Se si vuole definire la Terra mediante un volume geometrico si deve fare riferimento al cosiddetto "geoido", ovvero la superficie equipotenziale che presenta i minimi scostamenti dal livello medio del mare. La superficie del geoido è molto complessa ed è ottenuta mediante uno sviluppo in "armoniche sferiche". In questa sede ciò che è importante sottolineare è la differenza tra le diverse latitudini di un punto: tra geocentrica e geodetica che ha una differenza massima di $11'45''$, mentre tra geodetica e astronomica non si va oltre i pochi secondi d'arco.

Passando all'osservazione del cielo, la 1^a considerazione è che utilizzando i dati di un solo osservatorio non è possibile stimare la distanza di un corpo celeste, essendo $d \gg x$ (d : distanza, x : dimensione dello strumento), di conseguenza è possibile registrare solo la direzione di osservazione.

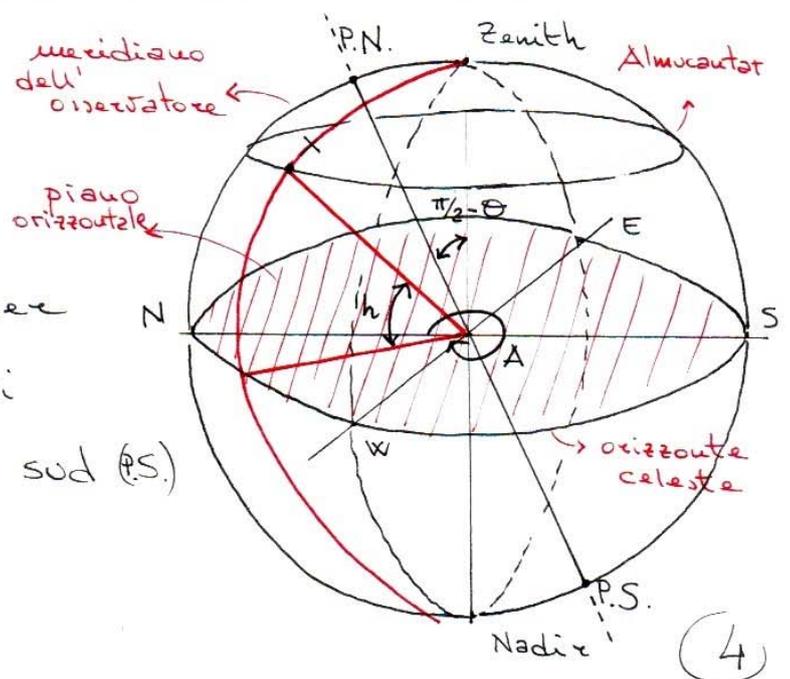
In questo senso è utile definire una immaginaria sfera di raggio arbitrario centrata nell'osservatore. Su una sua metà si proietterà

l'immagine dei corpi celesti, ed è per questo che parleremo di qui in poi di "sfera celeste". Come individuiamo la posizione di un astro sulla sfera celeste? Anche qui esistono diversi modi, partiamo con il più semplice.

Un osservatore posizionato sulla superficie terrestre utilizza un filo a piombo e una livella per posizionare il cannocchiale. In tal modo egli fa riferimento a quelle che abbiamo chiamato coordinate astronomiche (relativamente all'individuazione della posizione sulla superficie terrestre).

Il piano orizzontale, in questo contesto, verrà definito orizzonte celeste, mentre la direzione del filo a piombo individuerà due punti sulla sfera celeste che chiameremo Zenith e Nadir.

L'asse di rotazione terrestre definisce attraverso la sua parallela passante per l'osservatore i punti polo nord (P.N.) e polo sud (P.S.) celesti.



L'angolo compreso tra zenith astronomico e polo nord celeste è proprio la latitudine astronomiche $\frac{\pi}{2} - \phi$. Il circolo verticale passante per il nord celeste è detto meridiano dell'osservatore.

Se questa prima descrizione della posizione di X si utilizzano come riferimento il piano orizzontale e il meridiano dell'osservatore, definendo:

"h" : è la distanza in gradi di X dall'orizzonte celeste misurata lungo il piano passante per lo zenith, per X e per l'osservatore (altezza)

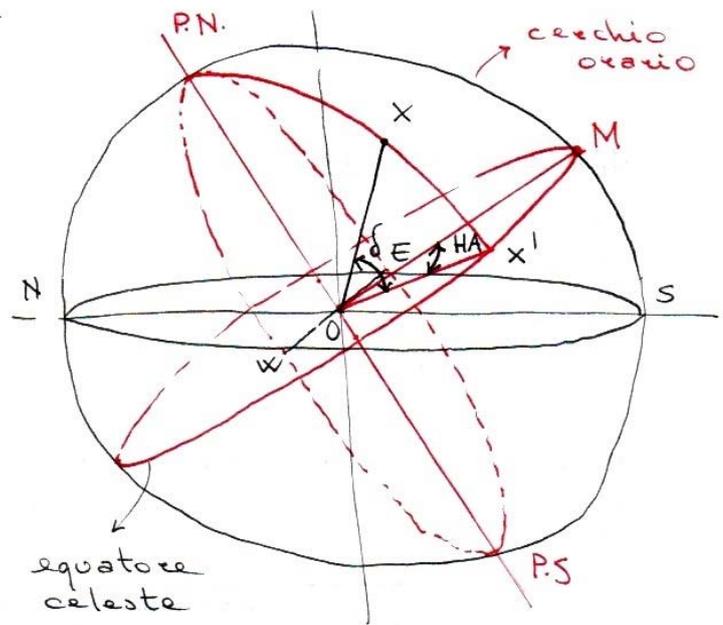
"A" è la distanza in gradi tra il meridiano di X e quello dell'osservatore presa partendo dal nord sull'orizzonte celeste e muovendosi in direzione est. (azimut)

Nota: questa ultima convenzione è tolta e sostituita da quella che parte dal sud e si muove verso ovest.

Si definisce angolo zenitale $z = \frac{\pi}{2} - h$

Il sistema di coordinate (h, A) è detto "sistema altazimutale".

Esistono tuttavia altri sistemi di coordinate, si consideri la proiezione del piano equatoriale passante per l'osservatore, esso definisce sulla sfera celeste quello che chiameremo



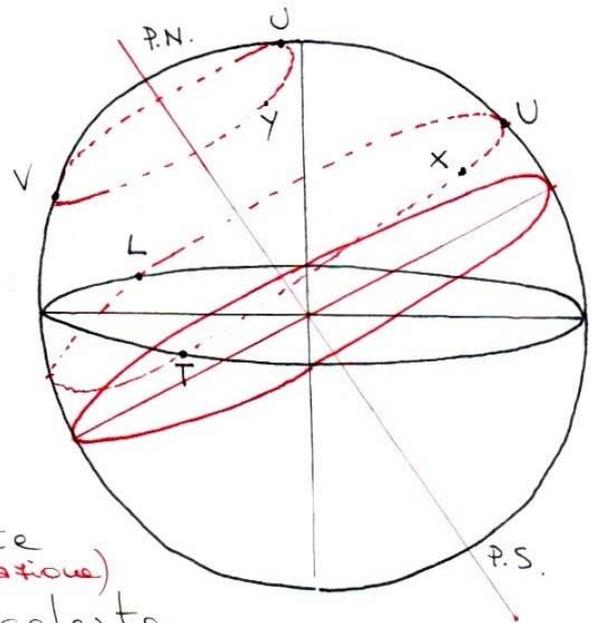
"equatore celeste". I cerchi paralleli all'equatore celeste si dicono "paralleli celesti", mentre i cerchi massimi passanti per il polo nord e sud si dicono "meridiani celesti". Il meridiano celeste dell'osservatore è detto cerchio orario, e la sua intersezione con l'equatore celeste si indica con il termine di "mezzogiorno".

A questo punto possiamo definire un nuovo sistema di coordinate che utilizza come riferimento il piano dell'equatore celeste e il cerchio orario, in particolare:

HA: distanza angolare sul piano dell'equatore celeste tra il cerchio orario e il meridiano celeste passante per X (angolo orario) preso positivo da sud verso ovest (6)

δ : distanza in gradi di X dall'equatore celeste lungo il meridiano celeste per X , presa positiva nell'emisfero nord (declinazione)
 Il grande pregio di questa variabile è di essere praticamente indipendente dalla posizione dell'osservatore

Questo sistema di riferimento che si dice "sistema orario" è più adatto a descrivere il moto delle stelle che sulla sfera celeste si muovono seguendo un parallelo celeste



(parallelo di declinazione) (la distanza dall'equatore celeste non cambia, dunque la declinazione è costante).
 La stella X sorge nel punto L , attraversa il meridiano dell'osservatore nel punto U detto di culminazione superiore e tramonta nel punto T .

La stella Y si dice circumpolare perché non scende mai sotto l'orizzonte celeste, ha quindi anche un punto di culminazione inferiore V .

La stella polare α Ursae Minoris presenta $\delta = 89^\circ 15' 50''$, per cui resta praticamente ferma (7)

al polo nord celeste (avendo magnitudine 2 e sempre stata un ottimo riferimento per i marinai)

Nell'emisfero australe la stella piu' vicina al polo sud e' α Octantis ($\delta = -88^\circ 54' 23''$) di magnitudine 5.

L'osservazione delle stelle circumpolari consente la determinazione della latitudine astronomica dell'osservatore, nonché della declinazione della stella.

E' necessario misurare l'altezza del punto di columinazione inferiore (h_{ci}) e quello del punto di columinazione superiore (h_{cs}) (le misure di altezza sono piu' semplici visto che utilizziamo le coordinate altazimu tali).

L'idea e' quella di osservare che la latitudine astronomica e' sia l'angolo tra il nord sull'orizzonte celeste e il polo nord che quello tra l'equatore celeste e lo zenith, questo consente di scrivere

$$h_{cs} = \delta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

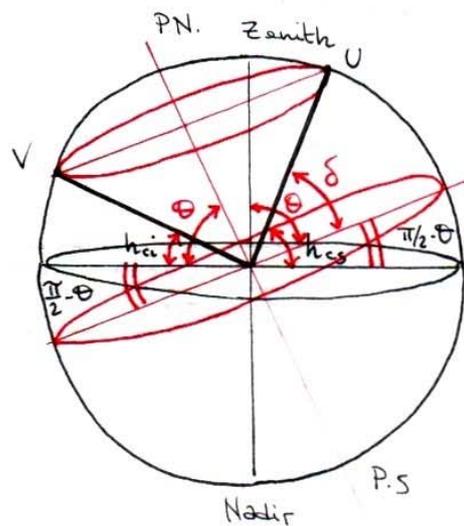
$$h_{ci} = \delta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

questo e' un sistema di 2 equazioni in 2 incognite

da cui:

$$\delta = \frac{h_{cs} + h_{ci}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{h_{cs} - h_{ci}}{2}$$



Come si sarà compreso le riserve altazimutali sono più semplici e immediate da compiere, per cui il primo problema da affrontare è il passaggio dalle coordinate altazimutali a quelle orarie, nota la latitudine Θ di osservazione.

Facendo riferimento alla figura a lato i dati sono i seguenti:

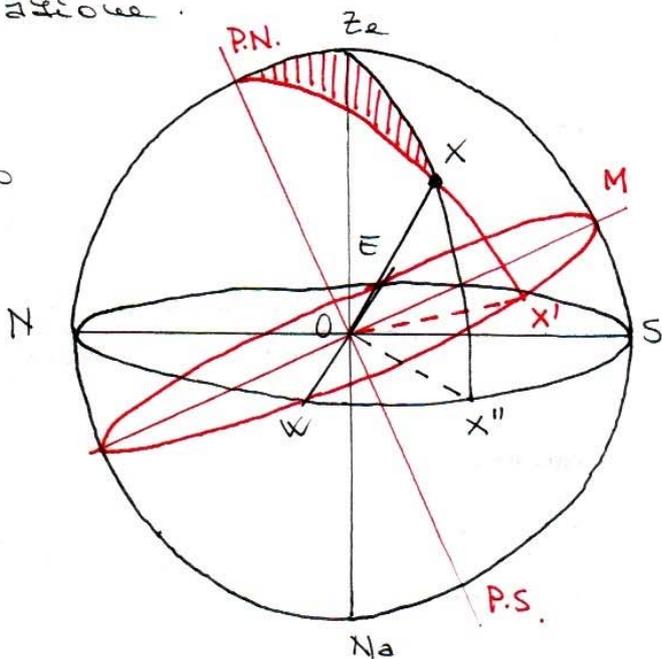
$$\begin{cases} h = X''OX \\ A = NOX'' \\ \Theta = NOZe \end{cases}$$

si vuole calcolare:

$$\delta = X'OX$$

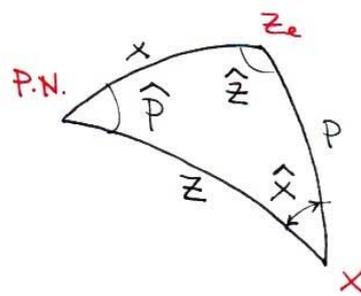
$$HA = MOX'$$

per partire con i calcoli si ragiona sul triangolo sferico P.N.-Ze-X



La prima cosa che si osserva su tale triangolo è che $\widehat{PN-Ze} = \frac{\pi}{2} - \Theta = x$, $\widehat{Ze-X} = \frac{\pi}{2} - h = p$ e che l'angolo in Ze , $\widehat{Ze} = 2\pi - A$, per cui tale triangolo è risolubile, avendo noti 3 elementi.

È possibile applicare il teorema del coseno di Gauss:



$$\cos(z) = \cos(x) \cdot \cos(p) + \sin(x) \cdot \sin(p) \cdot \cos(\hat{z})$$

sostituiamo le quantità note e abbiamo:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right) \cdot \cos(2\pi - A)$$

$$\sin(\delta) = \sin(\Theta) \cdot \sin(h) + \cos(\Theta) \cdot \cos(h) \cdot \cos(A)$$

Questa relazione consente di ottenere il valore della declinazione. Per calcolare l'angolo orario, invece si osserva come esso corrisponda a \hat{p} , per cui, nota la declinazione, e quindi i 3 lati del triangolo sferico, si può usare il teorema di Gauss:

$$\cos(p) = \cos(x) \cdot \cos(z) + \sin(x) \cdot \sin(z) \cdot \cos(\hat{p})$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cdot \cos(\hat{p})$$

$$\sin(h) = \sin(\Theta) \cdot \sin(\delta) + \cos(\Theta) \cdot \cos(\delta) \cdot \underbrace{\cos(\hat{p})}_{\cos(HA)}$$

$$\cos(HA) = \frac{\sin(h) - \sin(\Theta) \cdot \sin(\delta)}{\cos(\Theta) \cdot \cos(\delta)} =$$

→ questo termine può essere sostituito dall'espressione di sopra.

$$= \frac{\sin(h) - \sin^2(\Theta) \sin(h) - \sin(\Theta) \cos(\Theta) \cos(h) \cdot \cos(A)}{\cos(\Theta) \cdot \cos(\delta)}$$

$$= \frac{\cos^2(\Theta) \cdot \sin(h) - \sin(\Theta) \cos(\Theta) \cos(h) \cdot \cos(A)}{\cos(\Theta) \cos(\delta)} =$$

$$= \frac{\cos(\Theta) \cdot \sin(h) - \sin(\Theta) \cos(h) \cdot \cos(A)}{\cos(\delta)}$$

peraltro il calcolo del coseno di HA non basta a valutare tale quantità perché HA può variare tra 0 e 2π , è necessario calcolare anche il seno:

$$\frac{\sin \hat{p}}{\sin p} = \frac{\sin \hat{z}}{\sin z} \rightarrow \frac{\sin(HA)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right)} = \frac{\sin(2\pi - A)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}$$

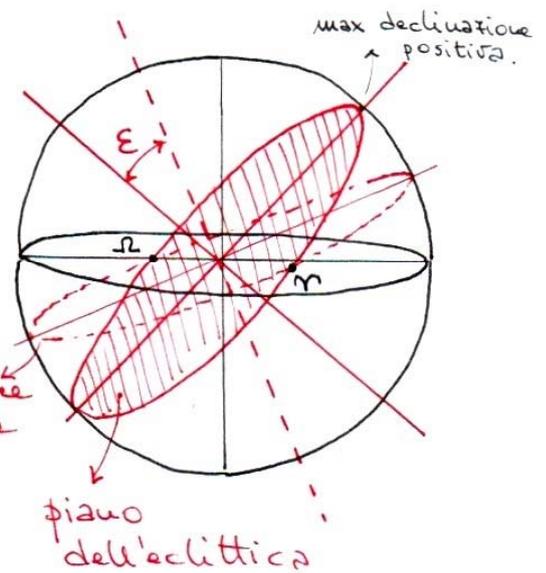
da cui: $\frac{\sin(HA)}{\cos(h)} = -\frac{\sin(A)}{\cos(\delta)}$ e quindi

$$\sin(HA) = -\frac{\sin(A) \cdot \cos(h)}{\cos(\delta)}$$

Ora è opportuna una considerazione, mentre la declinazione è un ottimo parametro per l'individuazione della posizione di un astro, così non è per l'angolo orario che dipende dal meridiano dell'osservatore. È opportuno, dunque, fissare un punto indipendente dall'osservatore sull'equatore celeste e calcolare l'angolo tra un piano fisso passante per esso e il meridiano

della stella. La convenzione è quella di utilizzare la posizione del sole all'equinozio di primavera. La terra ruota intorno al sole con una traiettoria leggermente ellittica, ma soprattutto lungo un piano che è differente da quello equatoriale, e che chiameremo piano dell'eclittica. La normale a tale piano è inclinata rispetto all'asse di rotazione terrestre (obliquità dell'eclittica), l'angolo di inclinazione risulta pari a $\epsilon = 23^{\circ}26'21''$.

Poiché la distanza terra-sole è molto maggiore delle dimensioni della terra, un qualsiasi osservatore vedrà il sole occupare un punto dell'eclittica (salvo spostamenti di pochi secondi di grado). In un anno la posizione del sole si sposta lungo l'eclittica ($\sim 1^{\circ}$ al giorno). L'equatore celeste e l'eclittica si intersecano in 2 punti detti "equinozi":



- equinozio di primavera o "punto d'Ariete" γ , spostandosi da declinazioni negative a positive (20-21/03)
- equinozio d'autunno, spostandosi da declinazioni positive a negative, Ω

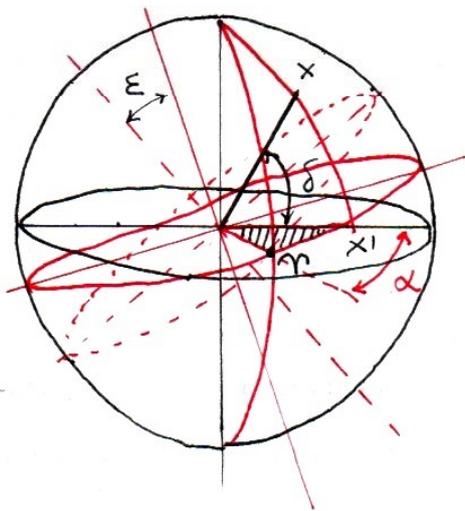
(il sole si muove in un anno lungo l'eclittica, il suo movimento giornaliero è dato dalla posizione rispetto all'orizzonte celeste del piano parallelo all'equatore celeste che passa per il punto che giornalmente occupa sull'eclittica).

Il punto γ fornisce un riferimento fisso nella sfera celeste (in realtà sia l'asse di rotazione che il piano dell'eclittica si modificano ma su scale dei tempi molto lunghe)

L'idea è così modificare il sistema di coordinate orario, utilizzando come piani di riferimento il piano equatoriale e il meridiano passante per γ . In tal modo si sostituisce all'angolo orario l'ascensione retta, ovvero l'angolo tra il meridiano passante per γ e quello passante per la stella considerato in senso antiorario.

Abbiamo così un sistema di coordinate pressoché immobile, in realtà (α, δ) ed E sono funzioni del tempo per via del fenomeno della precessione degli equinozi, ecco perché

accanto alle coordinate stellari (α, δ) si indica la data, per esempio J2000 sta per mezzogiorno del 01/01/2000.



Quando parleremo della precessione degli equinozi capiremo come modificare all'attualità o ad una data generica le coordinate (α, δ)

(si parla di ascensione retta perché si dice sfera retta quella che ha come piani di riferimento l'equatoriale e l'asse di rotazione, quella che si riferisce all'eclittica si dice "obliqua", secondo la nomenclatura introdotta da Tolomeo).

Ovviamente il sole modifica le sue coordinate stellari rapidamente, quando è nel punto di ascensione retta e declinazione sono entrambe nulle, quando appare nel punto più alto in cielo (solstizio d'estate) $\alpha(\odot) = 6h$ e $\delta(\odot) = 23^\circ 26' 21",4$

Abbiamo capito che l'angolo orario HA è una funzione del tempo, tale caratteristica può essere utilizzata per farlo diventare una misura di tempo. In particolare si definisce giorno siderale il tempo intercorrente tra 2 successive culminazioni di un punto fisso della sfera celeste

Se il punto fisso scelto è il punto d'ascensione retta, si dice tempo siderale locale l'angolo orario del punto d'ascensione. È semplice verificare che con riferimento ad un qualsiasi punto X della sfera celeste, vale la relazione:

$$HA(x) + \alpha(x) = T.S.$$

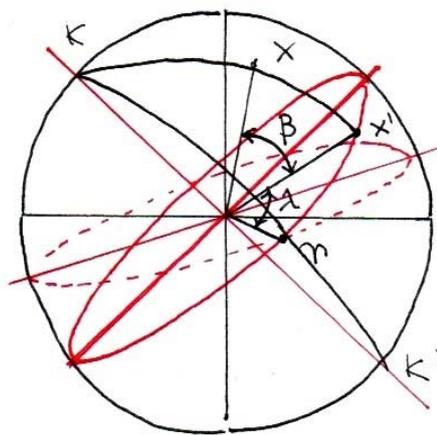
del resto per definizione
 $\alpha(\mathcal{M}) = 0$ per cui come
ovvio:

$$HA(\mathcal{M}) = T.S.$$

Per terminare il nostro excursus sui sistemi di coordinate dobbiamo parlare delle ultime 2 tipologie:

- Coordinate eclittiche:

i piani di riferimento sono quello dell'eclittica e il meridiano che passa per i poli eclittici K e K' e per il punto d'ariete.



L'ampiezza dell'arco $\mathcal{M}x'$ si dice longitudine eclittica λ (presa positiva nel verso del moto annuale del sole).

L'ampiezza dell'arco $x'x$ si dice latitudine eclittica β (presa positiva per latitudini nord)

Perche' si introduce questo sistema di coordinate?

Perche' è molto utile nella descrizione del moto di pianeti e asteroidi del sistema solare.

- Coordinate galattiche

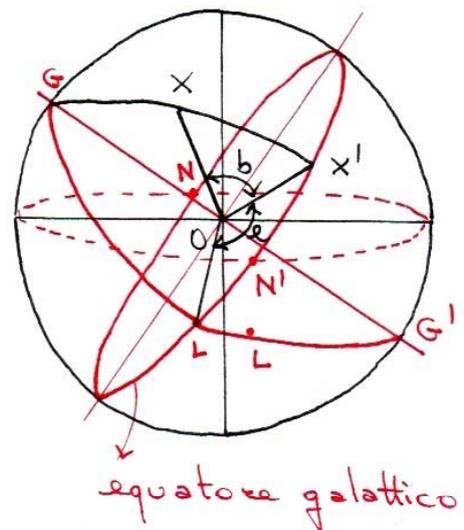
Si fa riferimento al piano equatoriale della Via Lattea che tuttavia occupa uno spessore di $\sim 10-15^\circ$ intorno ad un circolo massimo

Nel 1959 l'Unione Astronomica Internazionale ha definito il piano galattico come il piano medio di distribuzione di idrogeno gassoso rilevata tramite emissione di onde radio $\lambda = 21 \text{ cm}$ (corrispondente alla transizione iperfine dello stato fondamentale dell'idrogeno neutro), il baricentro di tale distribuzione è stato definito centro galattico.

Individuato l'equatore galattico si dicono N ed N' le intersezioni con l'equatore celeste, siano G il polo nord galattico, G' il sud galattico ed L il punto sulla sfera corrispondente al centro galattico.

Il sistema ha origine O nel sole e utilizza 2 piani di riferimento:

- il piano equatoriale galattico, passante per O, G e G'
- il piano meridiano galattico passante per L



Le coordinate sono:

la longitudine galattica " l " definita come $\widehat{LOX'}$ (prima del 1959 si considerava come origine il meridiano galattico passante per N)

la latitudine galattica " b " misurata in direzione nord o sud, con valori tra

0° e 90° lungo il meridiano a cui appartiene il punto X, corrisponde all'angolo $X'OX$.

Per differenziare il vecchio e il nuovo sistema, si aggiunge I e II all'apice delle lettere "l" e "b".

Schema riassuntivo

<u>sistema</u>	<u>coordinate</u>
1) altazimutale	A (azimut), h (altezza)
2) orario	HA (angolo orario), δ (declinazione)
3) equatoriale	α (ascensione retta), δ (declinazione)
4) eclittico	λ (longitudine ec.), β (latitudine ec.)
5) galattico	l (longitudine gal.), b (latitudine gal.)

Misure di tempo

Gli antichi dividevano il tempo in 12 ore "solari" e 12 "notturne" con la conseguenza che in base alle stagioni la durata cambiava. Questo problema venne superato solo nel XIII° secolo con l'invenzione dell'orologio meccanico, mentre il "secondo" fu introdotto nel XVII° secolo con l'invenzione dell'orologio a pendolo.

La base delle misurazioni di tempo è sempre stata la rotazione della Terra intorno al suo asse, sia perché si tratta di un moto pressoché uniforme, sia perché era facile valutare due passaggi successivi dello stesso punto sulla sfera celeste.

I punti utilizzati a tale scopo in astronomia sono 3:

- il punto zenitale o punto d'azimut γ
- il centro del disco apparente del sole (sole vero)
- il sole medio, punto immaginario la cui posizione è calcolata per via numerica.

Con riferimento a tali 3 punti si hanno 3 definizioni di tempo diverse:

- tempo siderale: si parla di giorno siderale con riferimento all'intervallo di tempo tra due successivi transiti del punto vernale al meridiano dell'osservatore. Si dice tempo siderale, l'angolo orario HA del punto vernale: $TS = HA(M)$ con lo zero

Il problema è che non c'è nulla nella sfera celeste

presso quando M passa al meridiano dell'osservatore.

che indichi il punto vernale, tuttavia si può usare una qualsiasi stella e traslare l'angolo orario del valore di ascensione retta:

$$TS = HA + \alpha$$

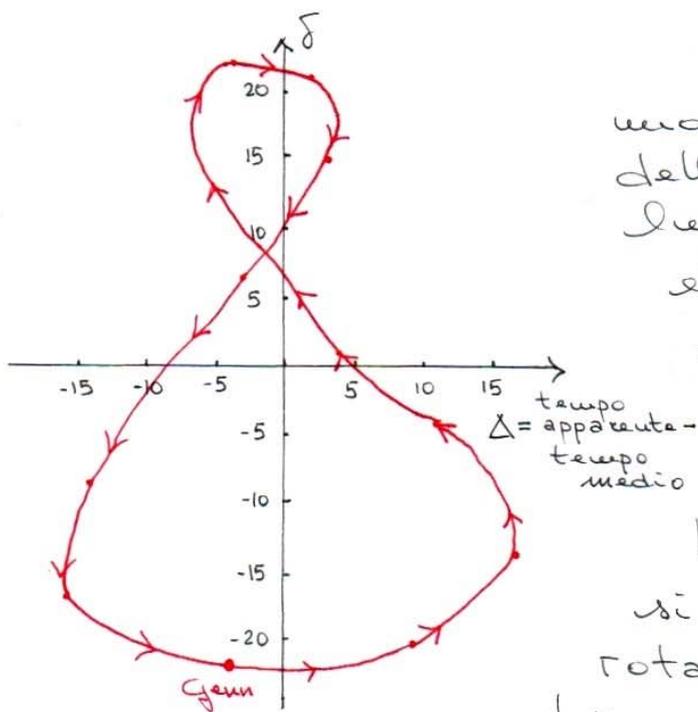
- tempo solare vero: si parla di giorno solare vero l'intervallo di tempo tra due successive culminazioni del sole. Tale misura per via del moto del sole lungo l'eclittica è più lungo del giorno siderale (il sistema è corrotante con la linea di congiunzione terra-sole).

Il problema del giorno solare vero è che la sua durata durante l'anno non è costante, ecco perché si è introdotta una terza misura.

(2)

- tempo solare medio: si definisce un fittizio "sole medio" che percorre l'equatore terrestre a velocità angolare costante, allineandosi con il sole vero nell'intervallo di percorrenza di un giro completo in un anno (questa misura è alla base degli orologi meccanici ed elettronici, quella di sole "vero" si misura con la meridiana)

È utile il seguente grafico che mostra la differenza tra tempo solare apparente e medio al variare della declinazione del sole:



Il disallineamento Δ è la somma di due contributi, uno dovuto alla variazione della velocità della terra lungo la sua traiettoria ellittica, l'altro dovuto ad "E" obliquità dell'eclittica.

Le 3 misure viste finora si basano sul moto di rotazione terrestre, tuttavia esso non può essere considerato un moto uniforme, per esempio la forza mareale dovuta alla luna rallenta il moto di rotazione, per non parlare della densità dell'atmosfera e dei terremoti che cambiano

il momento d'inerzia della Terra.

Sarà una misura più "oggettiva", e si è scelto un valore di $9,19 \cdot 10^9$ il periodo della radiazione emessa dal Cesio 133 a $T=0K$.

Tale definizione è coerente con il giorno medio misurato nel 1900, si parla di TAI "Tempo Atomico Internazionale".

Il "Tempo Universale Coordinato" (UTC) segue la definizione di secondo del TAI con la differenza che per sincronizzarlo con il tempo solare medio, alla fine di ogni anno, se lo si ritiene opportuno si aggiunge 1 sec. intercalare.

In astronomia non si utilizza la divisione in giorni, mesi ed anni, piuttosto si indicano i giorni consecutivi a partire da una data fissata individuata nel 1583 da Scaliger al 01/01 del 4713 A.C. (inizio di 3 cicli: indizione, metonico e solare), tale data è precedente a qualsiasi evento storico significativo.

Si parla di data giuliana JD, partendo da tale riferimento dalle 12:00 di Greenwich (oggi siamo intorno al 2458900).

Una versione diversa è quella della MJD:

$MJD = JD - 2400000.5$ (si tolgono le prime 2 cifre e si fa coincidere lo zero con la mezzanotte)

(4)

Un altro problema da considerare è la finitezza della velocità della luce (misurato per la 1^a volta da Römer 1675 con le variazioni delle eclissi di Io satellite di Giove) il quale evidenzia la soggettività del concetto di simultaneità (lo stesso evento non è registrato simultaneamente da osservatori diversi nel sistema solare). Per questo si definisce la data giuliana eliocentrica (HJD) che è la data giuliana misurata da un osservatore virtuale posto al centro del sole, essa si può calcolare come:

$$HJD = JD - \frac{r}{c} \cos(\beta) \cdot \cos(\lambda - \lambda_{\odot})$$

← distanza Terra-Sole
← latitudine eclittica
← longitudine eclittica del Sole
← longitudine eclittica

Ultimo riferimento da citare è il BJD, data giuliana barietrica, relativo ad un osservatore virtuale posto nel baricentro del sistema solare. La differenza con HJD è dell'ordine massimo di 4 secondi per questo in genere si utilizza HJD che è più semplice da calcolare.

Precessione degli equinozi

Già lpparco nel 125 A.C. si era accorto che la posizione delle stelle non coincidevano con quelle registrate da Timocharis 150 anni prima.

Le declinazioni non erano cambiate, mentre le ascensioni rette avevano subito uno spostamento di 2° , come se il punto Tereale si fosse spostato sull'eclittica in modo retrogrado ($50''$ per anno, questo fenomeno viene denominato "precessione degli equinozi").

A provocare tale fenomeno sono i momenti torcenti dovuti alle forze di attrazione di Sole e Luna che modificano la direzione dell'asse di rotazione terrestre. In particolare l'asse terrestre rispetto alla normale all'eclittica compie due moti: di precessione e di nutazione (oltre agli effetti degli altri pianeti che sono responsabili di una lentissima modifica dell'obliquità dell'eclittica, che passa da 22° a 24° in circa 41000 anni).

Il moto di precessione consiste nella rotazione in senso orario dell'asse di rotazione terrestre intorno alla normale all'eclittica con un periodo di quasi 26000 anni. Ciò determina la rotazione del piano equatoriale e spostamento retrogrado del punto di ariete di circa $50'',29$ per anno (tra 12000 anni al posto della stella polare ci sarà Vega)

Questo fenomeno cambia e si deforma le posizioni in cielo delle costellazioni, e quelle visibili, oggi nella posizione occupata una volta dall'Ariete ci sono i Pesci, e così via...

Dunque declinazione e ascensione retta di una stella cambiano nel tempo, i cataloghi stellari sono così datati e i dati riportati all'attualità. Nello specifico in un arco di 20 anni si possono usare le seguenti relazioni:

$$\alpha = \alpha(2000) + (3^s 075 + 1^s 336 \cdot \sin(\alpha) \cdot \tan(\delta)) \cdot y$$

→ si ricorda che α si misura con convenzione tipo tempo

$$\delta = \delta(2000) + 26'' 04 \cdot \cos(\alpha) \cdot y$$

Questo fenomeno è anche responsabile della necessità di introdurre l'anno bisestile, infatti l'anno tropico (il periodo intercorrente tra 2 equinozi) è più breve dell'anno sidero di una frazione:

$$\frac{50'' 36}{360^\circ} = \frac{1}{25735}$$

e cioè l'anno sidero non corrisponde ai canonici 365 giorni. L'idea è quella di introdurre un giorno in più ogni 4 anni, non quelli multipli di 100, sì, invece, quelli multipli di 400.

Per mantenere l'equinozio fisso al 21 marzo, papa Gregorio nel 1582 saltò 10 giorni del mese di ottobre (oggi le correzioni vengono fatte sui secondi intercalari).

In fine si noti che l'intervallo tra 2 culminazioni successive di una stella è più lungo di quello del punto N , si parla così di giorno stellare (7)

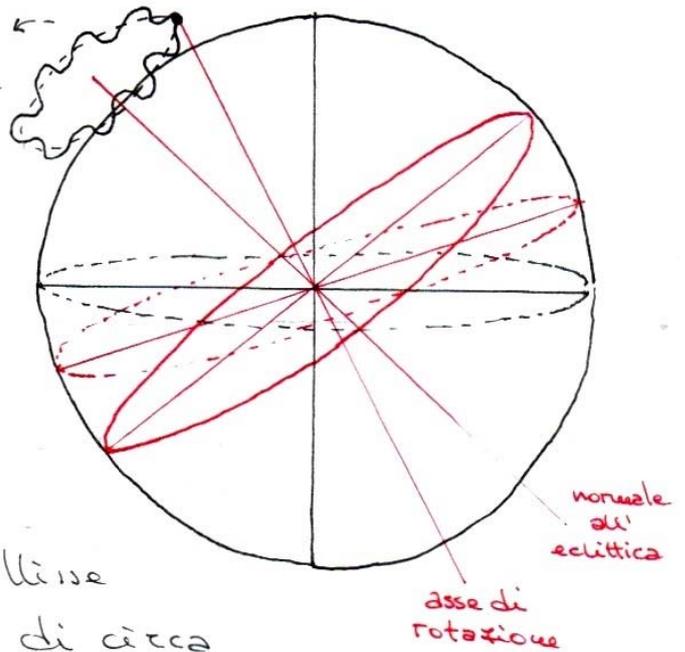
(8,4 millesimi di secondo più lungo di un giorno sidereo).

Un ultimo moto dell'asse terrestre da prendere in considerazione è quello di nutazione, piccole oscillazioni intorno alla posizione media.

Questo moto "aggiuntivo" è legato alla non costanza delle azioni lunari-solari, la cui componente più marcata ha un periodo di 18,6 anni la quale fa effettuare al polo nord un'ellisse con asse maggiore e minore di circa $18''$ e $14''$ rispettivamente. (rivoluzione dei nodi lunari, infatti il piano orbitale lunare è inclinato di circa $5,14^\circ$ rispetto all'eclittica, l'intersezione dei 2 piani individua due punti detti nodi lunari che per via della complessa interazione tra terra-luna-sole effettuano una rotazione completa in 18,6 anni).

Predire il moto di nutazione in maniera precisa è molto complesso anche per via degli eventi sismici che avvengono in maniera imprevedibile al medesimo livello di precisione.

effetto
della somma
di precessione
e nutazione



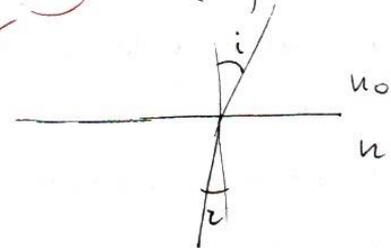
Errori sistematici in astronomia.

Esistono nelle osservazioni astronomiche alcuni errori di carattere sistematico che vanno corretti; il primo è sicuramente quello legato alla rifrazione. La radiazione elettromagnetica viene rifratta quando attraversa l'atmosfera (strato molto sottile e molto poco denso di aria \rightarrow 30 km se liquefatti starebbero in 22 metri), la velocità diminuisce rispetto al vuoto e risultano valide 2 leggi:

1) raggio incidente, raggio rifratto e normale al piano di separazione si trovano nello stesso piano;

2) legge di Snell $(n_0 \sin(i) = n \sin(r))$

indici di rifrazione



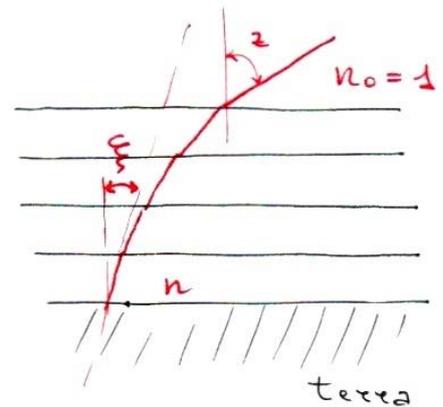
In base a tale legge se si ha un insieme di strati con indici di rifrazione diversi, l'angolo di uscita dipende solo dall'angolo di ingresso al 1° strato e dagli indici di rifrazione del primo e ultimo strato (se sono uguali il raggio esce parallelo con lo stesso angolo con cui è entrato)

A questo punto indichiamo con "z" l'angolo

(1)

che il raggio proveniente da una stella forma con la direzione zenitale dell'osservatore e ξ l'angolo zenitale apparente.

Poiché lo strato di atmosfera è intorno ai 100 km, molto più piccolo del raggio terrestre per $z \leq \frac{\pi}{4}$ si può modellare



l'atmosfera come una serie di strati con densità ed indice di rifrazione n crescenti con la quota. Detto "n" l'indice di rifrazione allo strato inferiore si avrà

$$\sin(z) = n \cdot \sin(\xi)$$

volendo evidenziare la correzione R da apportare, si avrà:

$$\sin(R + \xi) = n \cdot \sin(\xi)$$

$$\sin R \cdot \cos \xi + \cos R \cdot \sin \xi = n \cdot \sin \xi$$

essendo $R \ll 1$
 $\sin R \cong R$
 $\cos R \cong 1$

$$R \cdot \cos \xi + \sin \xi = n \cdot \sin \xi$$

$$R \cdot \cos \xi = (n - 1) \sin \xi$$

$$R = (n - 1) \tan \xi$$

questa relazione fornisce la deviazione in radianti se si esprime in secondi di arco, si ha:

$$R = \underbrace{206265}_{K} \cdot (n - 1) \cdot \tan \xi$$

K "costante di rifrazione"

(2)

A 1013 mbar e 10°C l'indice di rifrazione dell'aria è circa 1,0003 per lunghezza d'onda $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ e si ottiene $k = 58",2$, da cui

$$R_{st} = 58",2 \cdot \tan(\xi)$$

chiaramente il valore di "k" e quindi anche di "R" dipende dalle condizioni ambientali all'atto della misura.

Esiste la cosiddetta "legge di Gladstone" che lega R ad R_{st} :

$$\frac{R}{R_{st}} = \frac{0,279 P}{273 + T}$$

\rightarrow pressione in mbar
 \rightarrow temperatura in gradi °C

Per valori dell'angolo zenitale compresi tra 45° e 75° si può usare per la correzione standard la relazione:

$$R_{st} = \underbrace{A}_{58",16} \cdot \tan(\xi) - \underbrace{B}_{0",067} \cdot \tan(\xi^3)$$

per angoli maggiori di 75° si utilizzano tabelle empiriche

Quando l'altezza è molto piccola l'angolo di rifrazione cambia drasticamente, il che

da al Sole una forma ovale all'alba e al tramonto, addirittura

per $h = 0^\circ$ la rifrazione supera il diametro apparente, per cui si vede il sole anche se è sotto l'orizzonte

h	angolo rifr.
0°	35'21"
1°	24'45"
2°	18'24"
⋮	⋮
30°	1'41"

Una mia domanda forse spontanea: come possiamo calcolare "k" mediante misure?
 Si può sfruttare la declinazione superiore e inferiore di una stella circumpolare, nota la latitudine Θ della stazione.

In assenza di rifrazione la stella si vedrebbe nei punti C e D, con

$$\overline{PC} = \frac{\pi}{2} - \delta$$

se si chiamano ξ_A e ξ_B le distanze zenitali osservate, le correzioni sono:

$$AC = k \cdot \tan(\xi_A) \quad BD = k \cdot \tan(\xi_B)$$

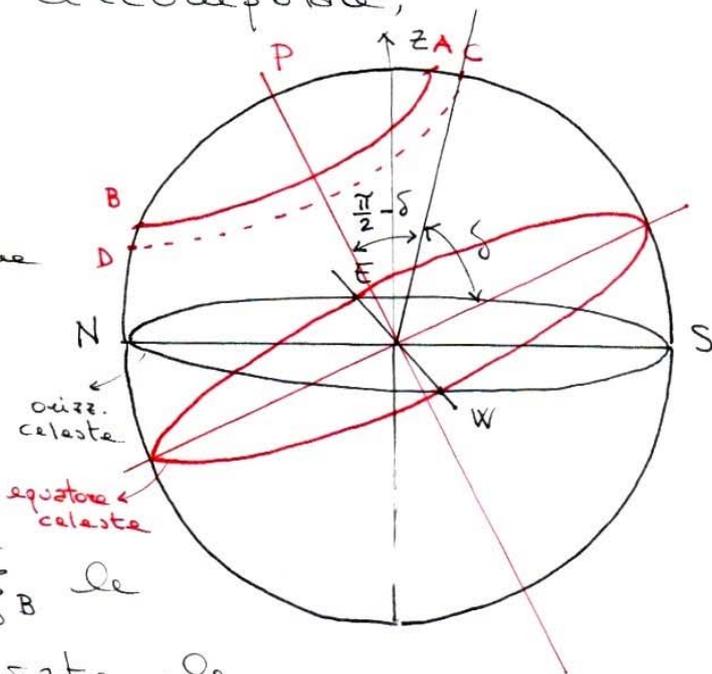
per cui:

$$z_C = z_A + AC = \xi_A + k \cdot \tan(\xi_A)$$

$$z_D = z_B + BD = \xi_B + k \cdot \tan(\xi_B)$$

L'angolo di inclinazione tra orizzonte celeste ed equatore celeste dipende dalla latitudine dell'osservatorio, in particolare:

$$PZ = \frac{\pi}{2} - \Theta, \text{ questa relazione consente di scrivere } z_C \text{ e } z_D \text{ in altro modo alternativo}$$



$$z_C = P_C - P_Z = \frac{\pi}{2} - \delta - \left(\frac{\pi}{2} - \Theta \right) = \Theta - \delta$$

$$z_D = z_P + P_D = \frac{\pi}{2} - \Theta + \frac{\pi}{2} - \delta = \pi - \Theta - \delta$$

*è uguale
a PC*

Uguagliando i termini si ha:

$$\begin{cases} \Theta - \delta = \xi_A + k \cdot \tan(\xi_A) \\ \pi - \Theta - \delta = \xi_B + k \cdot \tan(\xi_B) \end{cases}$$

*se Θ è noto con
precisione, questo
diventa un sistema
affidabile di 2
equazioni in 2
incognite: δ e k*

Se Θ non è noto è
necessario analizzare

il moto di 2 stelle circumpolari,
cosicché da ottenere 4 equazioni nelle incognite
 Θ, δ, δ' e k .

Così come R si corregge in base a temperatura
e pressione è necessaria una espressione che
 tenga conto della variabilità in base alla
lunghezza d'onda λ :

$$\frac{R(\lambda)}{R_{0,5}} = 0,978 \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

a causa di questa

legge una stella dovrebbe

apparire come un cerchio costituito da file di
punti monocromatici con l'immagine blu ($0,4 \mu\text{m}$)
spostata verso lo zenit rispetto alla rossa.

⑤

Moti propri

Tutti i corpi celesti per quanto possono essere lontani si spostano nel cielo, per cui anche le costellazioni nei secoli hanno lievemente cambiato forma.

Detta \vec{v} la velocità di un astro, ciò che possiamo osservare è solo la sua componente trasversale v_T . Si dice moto proprio " μ " lo spostamento angolare nell'unità di tempo:

$$\mu = \frac{v_T}{d}$$

↓
distanza della terra.

Halley fu il primo a studiare il moto proprio, supponendo che la velocità v_T sia dello stesso ordine di grandezza intuiti che la misura di μ potesse essere una misura indiretta di distanza.

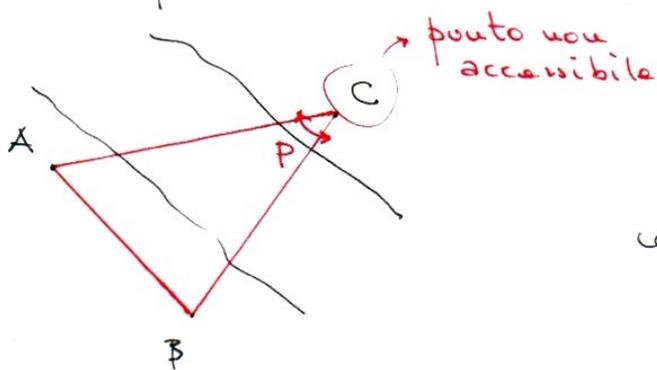
(61 Cygni ha $\mu = 5''/\text{anno}$, stella vicina).

Parallasse geocentrica.

Finora abbiamo sempre utilizzato sistemi di riferimento topocentrici (ovvero con origine sulla superficie terrestre), tuttavia mentre per le stelle considerare un'origine o un'altra con riferimento alla Terra ha poca importanza, così non è quando si intende

studiare il moto degli oggetti nel sistema solare, luna e sole in primis. Da qui la necessità di riferire le loro coordinate ad un riferimento di tipo geocentrico. Giusto per avere un'idea dell'ordine di grandezza coinvolto, la differenza per la posizione della luna risultante a due distinte misure topocentriche può arrivare al grado, per i pianeti più vicini nell'ordine dei minuti d'arco, per il sole di pochi secondi d'arco. Resta quindi una certa importanza riuscire ad effettuare il passaggio di riferimento: da topocentrico (nota la posizione) a geocentrico o viceversa.

Questo problema è strettamente connesso a quello storico della misura della distanza terra-luna e terra-sole (1 UA). Poiché luna e sole non sono accessibili, l'idea è quella di sfruttare un noto problema di trigonometria.



L'idea è quella di misurare AC indirettamente, misurando \overline{AB} e i 2 angoli \hat{CAB} e \hat{ABC}

(7)

L'angolo in C, punto inaccessibile, è definito "angolo di parallasse", ϕ , ed è pari a:

$$\phi = \pi - (\widehat{CAB} + \widehat{ABC})$$

(è il cambio di direzione della vista dell'osservatore che guarda C passando da A a B)

Risolvendo il triangolo

$\triangle ABC$ si ha:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\phi)} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\widehat{ABC})}$$

da cui:

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AB} \cdot \sin(\widehat{ABC})}{\sin(\phi)}$$

per una misura accurata \overline{AB} non deve essere

Analizziamo ora questo problema con riferimento alla visore di parallasse tra un osservatore

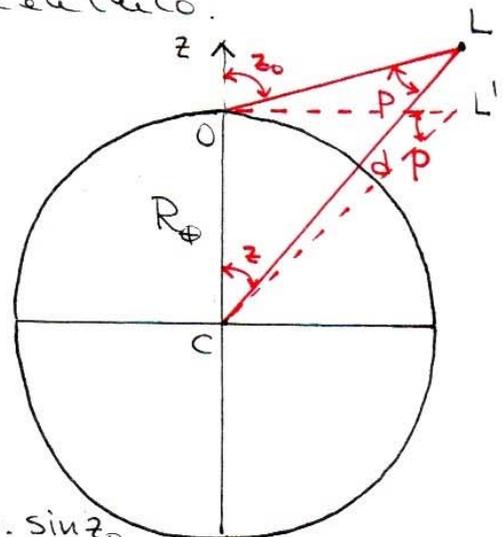
eccentricamente piccolo rispetto ad \overline{AC} il che per le misure terra-luna o terra-sole è un problema.

topocentrico e un altro geocentrico.

Chiamiamo "d" la distanza della luna dal centro della Terra e z_0, z le distanze zenitali misurate dai 2 osservatori. Si avrà:

$$\frac{d}{\sin(\pi - z_0)} = \frac{R_{\oplus}}{\sin \phi} \rightarrow \sin \phi = \frac{R_{\oplus}}{d} \cdot \sin z_0$$

ma poiché $d \gg R_{\oplus} \rightarrow \phi \approx 0 \rightarrow \sin \phi \approx \phi$



si ha:

$$p = \frac{R_{\oplus}}{d} \cdot \sin(z_0) = P \cdot \sin(z_0)$$

↳ questa grandezza si indica con P ,
e si definisce "parallasse orizzontale
geocentrica", essa è la parallasse
in corrispondenza del sorgere
dell'astro all'orizzonte

L'angolo " p " è quello che ci permette noto le
coordinate topocentriche di passare a quelle
geocentriche: $z = z_0 - p$, e quindi identificare
un oggetto, oppure noto l'oggetto mediante il
catalogo delle coordinate geocentriche, puntare
correttamente il telescopio: $z_0 = z + p$.

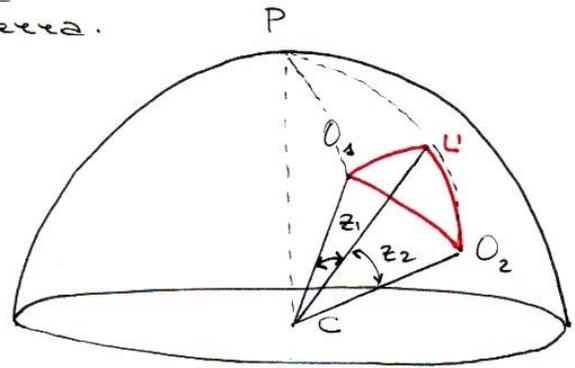
Per calcolare " p " si tenga conto che P è tabolata
sugli almanacchi astronomici per tutti gli
oggetti del sistema solare.

Evidentemente con questo approccio è possibile
calcolare la distanza dell'oggetto misurato z_0
e noto z . Da tali due valori è possibile calcolare
 $p = z_0 - z$, e da questa (senza altre informazioni
su P) calcolare $d = \frac{R_{\oplus}}{P} \sin(z_0)$

È evidente che per effettuare questo ultimo
calcolo abbiamo bisogno di " z " coordinata
zenitale geocentrica, se non l'abbiamo

è possibile lavorare utilizzando due osservatori in 2 punti distinti della Terra.

Sia O_1 un osservatore di latitudine Θ_1 e longitudine φ_1 , ed O_2 un osservatore di



latitudine Θ_2 e longitudine φ_2

Tali due osservatori guardano un astro L e registrano le coordinate altazimutali $(z_{0,1}, A_1)$ e $(z_{0,2}, A_2)$. Sia L' il punto in cui il segmento CL interseca la superficie terrestre.

Chiamiamo z_1 l'angolo $O_1 \hat{C} L'$ che è l'angolo zenitale di un osservatore geocentrico il cui zenith coincide con quello di O_1 . La parallasse sarà allora:

$$\phi = z_{0,1} - z_1, \text{ ovviamente lo stesso procedimento}$$

si potrebbe seguire dall'osservatore O_2 ottenendo lo stesso risultato:

$$\phi = z_{0,2} - z_2$$

Individuiamo alcuni archi mediante le coordinate geografiche:

$$PO_1 = \frac{\pi}{2} - \Theta_1 \quad O_2 \hat{P} O_1 = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$PO_2 = \frac{\pi}{2} - \Theta_2$$

Relativamente al triangolo $O_1 \hat{P} O_2$ sferico, conosciamo due lati e un angolo e possiamo così risolverlo l'arco $O_1 O_2$.

$\cos O_1 O_2 = \cos PO_1 \cdot \cos PO_2 + \sin PO_1 \cdot \sin PO_2 \cdot \cos \hat{O}_2 \hat{P} O_1$,
 con la versione relativa agli angoli è possibile calcolare anche $P \hat{O}_2 O_1$ e $P \hat{O}_1 O_2$.

Ora concentriamoci sul triangolo $O_1 L' O_2$, gli angoli $P \hat{O}_1 L'$ e $P \hat{O}_2 L'$ sono angoli misurati visto che rappresentano gli azimut dell'oggetto L visto dagli osservatori O_1 ed O_2 . Avendo risolto il triangolo $O_1 \hat{P} O_2$ sono noti $P \hat{O}_1 O_2$ e $P \hat{O}_2 O_1$, per cui possiamo calcolare:

$$L' \hat{O}_1 O_2 = P \hat{O}_1 O_2 - P \hat{O}_1 L' = \hat{C}$$

$$L' \hat{O}_2 O_1 = P \hat{O}_2 O_1 - P \hat{O}_2 L' = \hat{B}$$

Del triangolo $O_1 L' O_2$ dunque conosciamo due angoli ed il lato $O_1 O_2$, possiamo così calcolare

$b = L' O_1 = z_1$ con la formula delle 4 parti:

$$\cot b = \frac{\cos a \cdot \cos \hat{C} + \sin \hat{C} \cdot \cot \hat{B}}{\sin a}$$

Nota z_1 si ha $\phi = z_{01} - z_1$ il che risolve il problema in oggetto

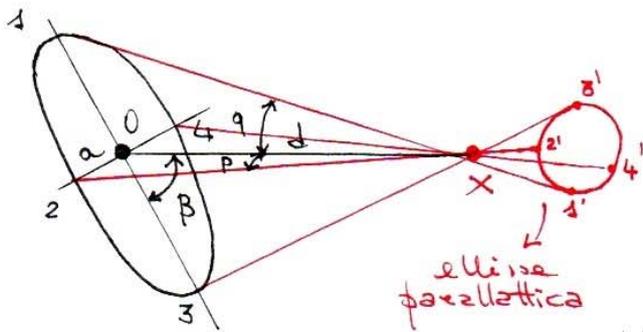
Da un punto di vista storico il metodo della parallasse consentì ad Ipparco e poi ad Aristarco di Samo di misurare la distanza Terra-Luna.

Cassini e Richer misurarono nel XVII° secolo la parallasse di Marte all'opposizione (si ebbe così una prima idea delle dimensioni del sistema solare), tale misura fu fondamentale perché le leggi di Keplero consentono in maniera molto semplice di ottenere i rapporti tra i diversi raggi delle orbite, per cui nota la distanza di un pianeta si porta tutto in scala e si ottiene anche la distanza Terra-Sole (1 AU)

Oggi si utilizzano tecniche più dirette, come la misura dell'eco di un segnale radar, o il riflesso degli specchi lasciati sulla Luna ad un fascio laser. Oggi sappiamo che la Luna dista mediamente 384400 km e che $1 \text{ AU} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$

E le distanze delle stelle? Purtroppo considerare come baseline il raggio terrestre non è sufficiente, ecco allora che si passa alla distanza Terra-Sole e alla parallasse annua.

Consideriamo il piano dell'eclittica, la traiettoria della Terra che considereremo circolare intorno al sole e una stella X. (12)



La stella X ha latitudine eclittica β che è l'angolo di cui è inclinata la traiettoria della terra rispetto alla direzione OX.

Il piano \perp ad OX interseca l'eclittica nei punti 2 e 4.

Quando la terra è in 2 o in 4 la posizione della stella risulta spostata di un angolo $\beta \approx a/d$

Quando la terra si trova in 1 lo spostamento è dato dall'angolo $q = \angle X'OX$, applicando il teorema dei seni al triangolo $O\hat{\Delta}X$ si potrà scrivere:

$$\frac{d}{\sin \hat{\Delta}} = \frac{a}{\sin \hat{q}} \rightarrow \sin \hat{\Delta} = \frac{d}{a} \cdot \sin q$$

Analizzando il triangolo in questione:

$$\hat{\Delta} = \pi - \hat{O} - q = \pi - \pi + \beta - q = \beta - q$$

$$\sin \hat{\Delta} \approx \sin(\beta) \text{ essendo } "q" \ll \beta$$

$$\sin q \approx q$$

$$\frac{d}{a} = \frac{1}{p}$$

$$\text{sostituendo: } \sin(\beta) = \frac{q}{p}$$

dunque gli spostamenti dell'immagine viste dalla terra presentano rapporto costante dipendente da β

(si noti che se $\beta = \frac{\pi}{2}$ l'ellisse parallelica diventa circonferenza)

Questi sono gli spostamenti osservati nelle posizioni estreme, in generale potremmo dire che

$$q = p \cdot \sin(\varepsilon') \quad \text{dove } \varepsilon' \text{ è l'angolo STS (Sole-Terra-Stella)}$$

dunque la stella sembra descrivere in cielo una ellisse con semiasse maggiore "p" e minore "q", p è detta parallasse annua, e la sua conoscenza ci permette agevolmente di calcolare "d":

$$d = \frac{a}{p}$$

In realtà il moto osservato è quello di una cicloide perché all'ellisse va aggiunto il moto proprio della stella.

Giusto per avere un'idea ci tollo 300 anni dopo la formulazione della teoria per avere la prima misura di parallasse stellare (61 Cygni $p = 0''.12$). Il valore max mai osservato è quello di Proxima Centauri ($p = 0''.76$)

Il concetto di parallasse consente di definire una nuova misura di distanza, ovvero il "parsec": distanza a cui un corpo celeste presenta una parallasse pari ad $1''$.

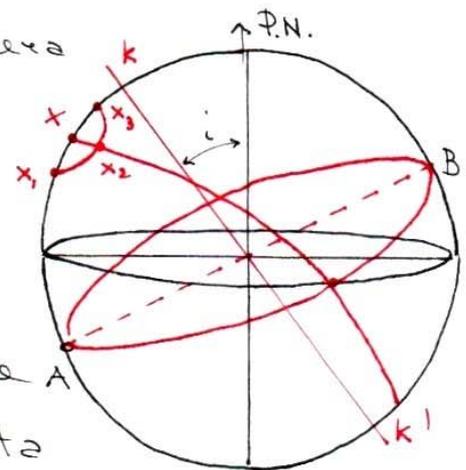
Per come è definito $1 \text{ parsec} = 206265 \text{ AU}$
 $\approx 3,26 \text{ anni luce}$

Per Proxima Centauri, la stella più vicina al sole, risulta $d = \frac{1}{0",76}$ parsec = 1,32 pc = 4,29 ly

Con questa unità di misura la parallasse consente di definire anche le distanze. Grazie al satellite Gaia, oggi misuriamo fino ai 20 microsecondi per la parallasse, il che ci consente di misurare distanze fino a $\frac{1}{20 \cdot 10^{-6}} = 50 \cdot 10^3$ pc = 50 kpc (giusto per avere un'idea il sole dista dal centro della nostra galassia tra 8 e 8,5 kpc, quindi riusciamo a caratterizzare l'intera nostra galassia).

Cerchiamo ora di capire l'effetto della parallasse annua sull'osservazione di una stella nella sfera celeste, lo facciamo facendo capo alle osservazioni di Bradley (1725) della stella "γ Draconis".

Diciamo subito che tale stella era praticamente allo zenith rispetto all'osservatorio, per cui nella sostanza tutte le correzioni dovute alla rifrazione. Le coordinate della stella indicata con X erano $\alpha \approx 18h$, $\delta \approx 51^\circ$



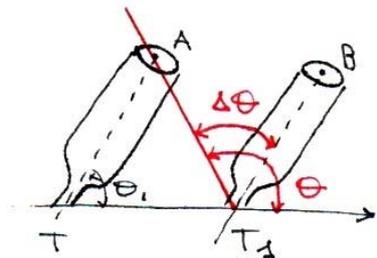
A causa della parallasse annua la stella dovrebbe apparire spostata verso il sole di $XX_1 = XX_3 = p \sin \beta$ in corrispondenza dei solstizi

modificando leggermente la sua declinazione, diversamente in corrispondenza degli equinozi la declinazione doveva risultare invertita (cambia di "p" l'ascensione retta).

Bradley osservò tale sfasamento (si tratta di circa $40''$ d'arco) ma con 3 mesi di sfasamento rispetto alle previsioni. Tale sfasamento venne confermato da misure effettuate su altre stelle.

Bradley stesso capì che si trattava di una conseguenza del moto terrestre:

infatti nell'intervallo Δt in cui la luce va dalla lente al fondo del telescopio, il telescopio stesso si è spostato, il telescopio sta puntando in Θ_1 mentre la luce della stella proviene dalla direzione Θ (un po' come quando si corre e la pioggia sembra provenire da una fonte posta contro il senso di marcia). Applicando il teorema dei seni al triangolo ATT_1 si ha:



$$\frac{\sin \Theta_1}{c \cdot \Delta t} = \frac{\sin(\Delta \Theta)}{v \cdot \Delta t} \rightarrow \sin(\Delta \Theta) = \frac{v}{c} \sin \Theta_1$$

\rightarrow velocità
 moto terrestre

essendo $\Delta \Theta$
 molto piccolo:

$\Delta\theta = \frac{v}{c} \sin\theta_s$ se si vuole esprimere tutto in secondi d'arco si avrà:

$\Delta\theta = \underbrace{206265 \cdot \frac{v}{c}}_k \sin(\theta_s) \rightarrow$ direzione apparente dell'astro
si indica con k e si chiama "costante di aberrazione annua". Sostituendo i valori numerici si ha: $k = 20''{,}496$

Poiché questo effetto è legato al moto della terra esiste anche una aberrazione legata al moto di rotazione terrestre, si dice "aberrazione diurna" e l'effetto è molto ridotto $k' = 0''{,}32 \cdot \cos\theta$ con $\theta =$ latitudine dell'osservatore

L'aberrazione annua ha rappresentato un'ulteriore prova della rotazione della terra intorno al Sole.

Fotometria

La radiazione elettromagnetica è caratterizzata da lunghezza d'onda e frequenza, pseudette legate tra loro dalla relazione $\lambda \nu = c$

Si passa dalle onde radio $1 \text{ mm} < \lambda < 25 \text{ m}$, all'infrarosso, al visibile $0.4 \mu\text{m} < \lambda < 0.7 \mu\text{m}$, all'ultravioletto, ai raggi X e γ ($< 2 \mu\text{m}$).

La classificazione di tali onde dipende essenzialmente dal modo con cui interagisce con la materia. Per quanto riguarda la radiazione astronomica, è da considerare l'effetto filtro dell'atmosfera.

È particolare per l'infrarosso (ma è captabile solo ad alta quota) e praticamente tutte le onde radio e il visibile, il resto è bloccato.

Consideriamo ora un telescopio avente lente con superficie A , che risulta sensibile ad una certa finestra di lunghezza d'onda $\Delta\lambda$, centrata in λ_0 .

Si dice fusso integrato su di una finita banda l'energia raccolta da un rivelatore per unità

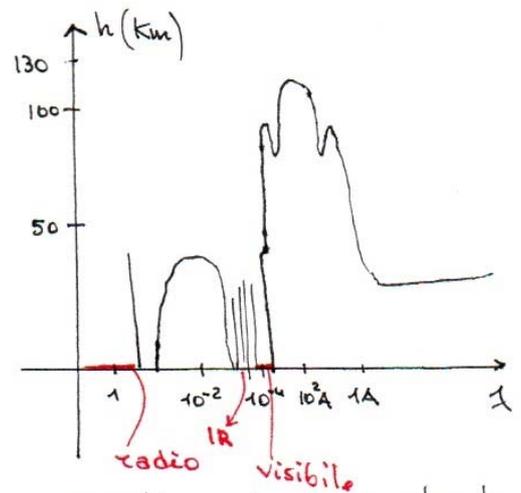


grafico che riporta la quota a cui il flusso è dimezzato

di superficie e di tempo:

$$p = \frac{1}{A} \frac{\delta E_{\text{oss}}}{\delta t}$$

Passando dall'operatore alla sorgente si dice luminosità la quantità di energia emessa dalla sorgente nell'unità di tempo:

$$L = \frac{\delta E_{\text{em}}}{\delta t}$$

(si noti che per "p" spesso si utilizza il sistema cgs: $1 \text{ erg/cm}^2 \cdot \text{s} = 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$)

Se la stella emette in modo isotropo il flusso raccolto da un rivelatore a distanza "d" sarà pari a:

$$p = \frac{L}{4\pi d^2}$$

è utile definire anche un flusso specifico che rappresenta il flusso emesso per unità di frequenza $f_\nu \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{Hz}} \right]$, o analogamente per unità di lunghezza d'onda

$f_\lambda \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{nm}} \right]$. Se volessimo rappresentare la funzione $f_\nu(\nu)$ ci

troveremo di fronte ad una serie di difficoltà:

- 1) è necessario caratterizzare la risposta del rivelatore;
- 2) radiazioni con frequenze diverse sono assorbite diversamente dall'atmosfera

Definiamo efficienza dell'apparato di misura:

$$\text{Eff}_\nu = \frac{\text{energia rivelata}}{\text{energia incidente}} < 1 \quad \text{e dipende da } \nu$$

Qualsiasi elevatore, dunque, non fornisce mai f_w (flusso specifico che raggiunge l'alta atmosfera), per via della presenza di 3 effetti:

T_v coefficiente di trasmissione dell'atmosfera;

t_w coefficiente di trasmissione del filtro;

Eff_w efficacia del telescopio

$$f_{banda} = \int_0^{\infty} f_w T_v t_w Eff_w dw$$

L'integrale si fa da 0 a ∞ , ma in realtà passa solo la banda definita dal coefficiente t_w

Per caratterizzare

un filtro si utilizza un

valore centrale (frequenza media

ovvero lunghezza d'onda efficace) ed una larghezza rispetto alla quale f_w si riduce alla metà del

valore di picco (FWHM = "full width at half maximum").

Fino quando si utilizzavano le lastre fotografiche vi erano i filtri della serie di Johson (U, B e V),

Cousins aggiunse i filtri R ed I per lunghezze d'onda maggiori, con l'avvento dei dispositivi CCD

(ad accoppiamento di carica) vennero ridefiniti

tutti i filtri che oggi prendono il nome di

filtri di Bessel

Gli astronomi greci avevano diviso le stelle in 6 classi in base a come esse apparivano all'occhio umano cercando di dividere le bande di flusso apparente in modo omogeneo (la 1^a grandezza era la più brillante). Studi effettuati nel XX^o secolo hanno mostrato che tale distinzione è proporzionale al logaritmo dell'intensità.

Per tale motivo storico oggi le misure dei flussi si effettuano in "magnitudini", grandezza legata al logaritmo del flusso integrato "F". Il motivo di una definizione così "storica" è quella di continuare ad utilizzare misure fatte in passato.

La magnitudine apparente è definita per differenza:

$$m_1 - m_2 = -k \cdot \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right)$$

serve a
dare valore più basso
a stelle più luminose

studi fotometrici
hanno evidenziato
che stelle di 1^a
magnitudine hanno
flusso circa 100 volte
maggiore di quelle di 6^a.

Ciò consente di definire k:

se $F_2/F_1 = 100$ deve essere $m_1 - m_2 = 5$

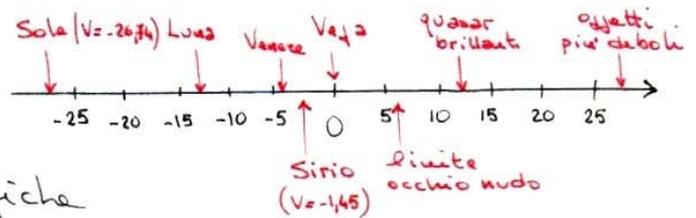
$$5 = +k \cdot \log_{10}(100) \rightarrow 5 = k \cdot 2 \rightarrow k = 2,5$$

(4)

da cui:
$$m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log_{10} \left(\frac{f_1}{f_2} \right)$$

c'è da definire lo zero di tale scala che è preso in maniera tale che Vega abbia magnitudine apparente nulla in tutte le bande (nella banda del "visivo" tale zero corrisponde ad un flusso integrato pari a $3,03 \cdot 10^{-9} \text{ W/m}^2$)

La fotometria
astronomica fino al
1950 utilizzata



unicamente lastre fotografiche

con precisione di 0,1 mag,

con l'avvento dei fotometri fotoelettrici e poi dei rivelatori CCD uniti a tecniche di correzione degli errori sistematici si possono rilevare

variazioni di 10^{-5} mag.

Effetti dell'atmosfera sulla fotometria

Anche la radiazione che attraversa l'atmosfera nella banda ottica interagisce con le particelle di polvere, con le goccioline d'acqua, con le molecole di aria.

Evidentemente tale interazione è tanto maggiore, quanto maggiore è lo spessore di atmosfera

da attraversare. E' necessario, dunque, "ripulire" il flusso oneroso da questo effetto di estinzione per risalire al valore che si osserverebbe in assenza di atmosfera.

A svolgere questa funzione, nel calcolo del flusso integrato, è il coefficiente di trasmissione dell'atmosfera T_{ν} . Per esso si assume valida la legge di Bouguer-Lambert-Beer:

$$T_{\nu} \propto e^{-\int_0^{\infty} k_{\nu} \rho dl}$$

\swarrow *proporzionale* \searrow *coefficiente di assorbimento* \rightarrow *densità lungo la linea di vista.*

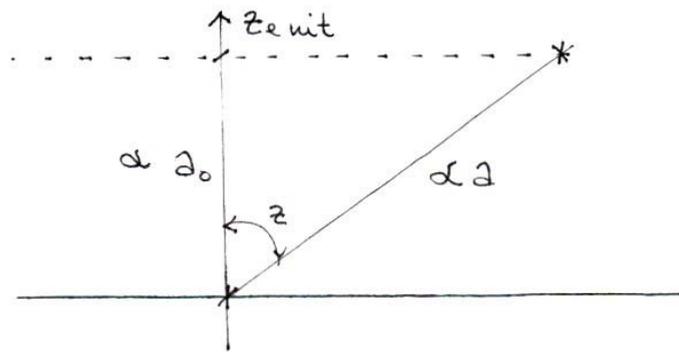
Tutto l'integrale all'esponente viene anche indicato con "a". Tale integrale assumerà un valore maggiore quanto maggiore è il cammino della radiazione nell'atmosfera. Il valore minimo si ha così per le stelle allo zenit, e viene indicato con "a₀", che prende il nome di profondità ottica di assorbimento.

Si definisce massa d'aria il rapporto:

$$X = \frac{a}{a_0} \quad (> 1)$$

se consideriamo l'atmosfera un insieme di strati piani e paralleli il calcolo di X è (6)

banale:



$$a = \frac{a_0}{\cos z} \rightarrow \frac{a}{a_0} = \frac{1}{\cos z} \rightarrow \boxed{X = \sec(z)}$$

Questa approssimazione è utile per valori di "z" fino a $\pi/3$, per valori maggiori una approssimazione migliore è data da:

$$X(z) = \sec(z) \cdot \left\{ 1 - 0,0012 (\sec(z)^2 - 1) \right\}^9$$

Un modo per eliminare l'effetto di estinzione atmosferica è quello di misurare la magnitudine della stessa stella a valori diversi di z. Ciò che risulta è la relazione:

$$M(z) = m_0 + k_E \cdot X(z)$$

si noti che per stelle allo zenit $\sec(z) = 1$, per cui

$$m_{zenit} = m_0 + k_E$$

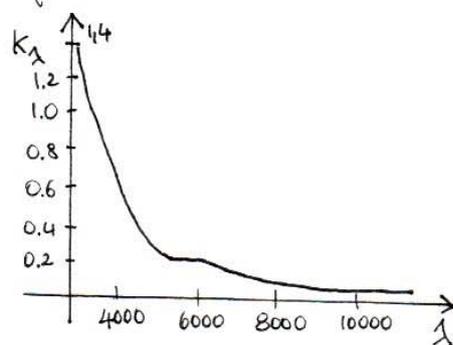
magnitudine apparente che si misurerebbe dallo spazio.
 coefficiente d'estinzione

che è il valore di magnitudine minimo possibile che si ricorda corrisponde al massimo flusso

Il problema di questa relazione è la stima del coefficiente d'estinzione (che dipende

dalle condizioni dell'atmosfera e quindi può variare da notte a notte), l'idea più semplice è interpolare con una retta i dati ottenuti per altezze h diverse ($z = \frac{\pi}{2} - h$), il coefficiente angolare di tale retta sarà K_E , l'intercetta con l'asse "m", sarà m_0 .

C'è da segnalare anche che il coefficiente di estinzione risulta essere una funzione della lunghezza d'onda K_λ ed è maggiore per le lunghezze d'onda minori (osservatorio di Cerro Tololo in Cile, 2005)



L'atmosfera non è composta da aria "ferma", ma in essa si mescolano moti turbolenti che determinano fluttuazioni dell'indice di rifrazione le quali evitano di sfruttare l'ottica di un telescopio. Gli effetti di tale turbolenza sono:

- variazione di intensità (scintillazione)
- variazioni di posizione (agitazione)
- allargamento dell'immagine (perdita di contrasto)

Le stelle distano alcuni parsec ed in genere hanno diametri dell'ordine del milione di km

ci vorrebbero di conseguenza apparire con un diametro angolare diverso e nell'ordine dei millisecondi d'arco. La turbolenza fa sì che tutte le stelle, indipendentemente da distanza e dimensioni, appaiano di dimensioni pari a qualche secondo d'arco (la turbolenza sparpaglia i raggi in un'area più grande). Lungo l'immagine delle stelle hanno una legge di distribuzione dell'intensità che prende il nome di "Point Spread Function" (PSF) e ha una forma di tipo gaussiano, anche in questo caso è possibile definire il FWHM che definisce quello che si chiama "seeing" di una stella. Tale valore in siti eccellenti varia tra $0",3$ e $0",9$.

Il seeing viene utilizzato per quantificare la turbolenza, esso peggiora per distanze zenitali maggiori e all'aumentare della massa d'aria secondo la legge:
$$S = S_0 \cdot X^{3/5}$$

Il "seeing" è un fenomeno che si ha anche in assenza di atmosfera (telescopi spaziali), in virtù del fenomeno della diffrazione, per la legge di Rayleigh:
$$PSF = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Sulla terra, dunque, anche i telescopi con D molto grandi sono limitati dal "seeing", esiste la possibilità attraverso l'ottica adattiva, una serie di pistoncini che deformano uno specchio in tempo reale, di limitare tale impatto e ottenere prestazioni limitate dai soli effetti di diffrazione.

Cataloghi astronomici

I primi sono da far risalire ad Ipparco, Aristarco e Tolomeo. Contributi furono dati da Bayer, Flamsteed e con i cataloghi delle variabili di Argelander. E' solo con le campagne moderne e i telescopi che arrivano ad altissime magnitudini che le stelle iniziano ad essere catalogate con nome del catalogo e coordinate equatoriali. Di seguito alcuni dei cataloghi più importanti:

HD: Henry Draper catalog (1924), 350000 stelle fino a magnitudine 10

SAO: Smithsonian Astrophysical Observatory Star Catalog (1966), incentrato sulle stelle che hanno moto proprio

USNO: US Naval Observatory: 100000000 di stelle fino a magnitudine 21

GSC: Guide Star Catalog: 20000000 di oggetti fino a magnitudine 15

HIP - Tycho - Tycho 2 : contengono i risultati della missione Hipparcos, l'ultimo contiene 2500000 stelle con precisione da 10 a 40 mas (millesimi di secondo arco).

Missione Gaia : ha ottenuto dati su circa 1000000000 di stelle con precisioni 200 volte maggiori di Hipparcos. Ha raccolto anche informazioni astrofisiche sulla luminosità nelle diverse bande spettrali, il che consente di studiare la formazione e la dinamica della Via Lattea.

Per quanto concerne gli oggetti non stellari, si cita:

catologo Messier (1774) : 110 oggetti di vario tipo tutti alla portata di piccoli telescopi

NGC : New General Catalogue (Dreyer 1880) : 8000 oggetti del profondo cielo : nebulose, ammassi, galassie

IC : Index Catalogue, supplemento del NGC con altri 5000 oggetti

PGC : Principal Galaxies Catalogue (1989), 43000 galassie ampliato nel 2003 a 983000

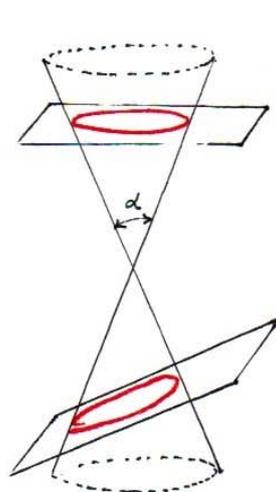
Primi elementi di meccanica celeste

Tutte le particelle che si muovono all'interno del campo gravitazionale generato da un punto materiale percorrono una "curva conica".

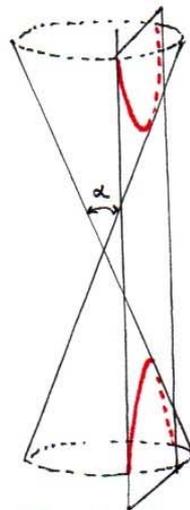
Per curva conica si intende una generica curva ottenuta dall'intersezione della superficie di un cono con un piano:

di lato sono rappresentate le possibili eventualità.

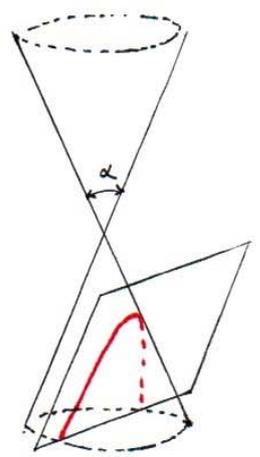
Tutte le coniche sono descritte da un'equazione quadratica nel piano cartesiano:



circumferenza ed ellisse
(piano \perp all'asse o inclinato di un angolo $< \alpha$)



iperbole
(piano inclinato di un angolo $> \alpha$)



parabola
(piano inclinato esattamente di un angolo α)

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

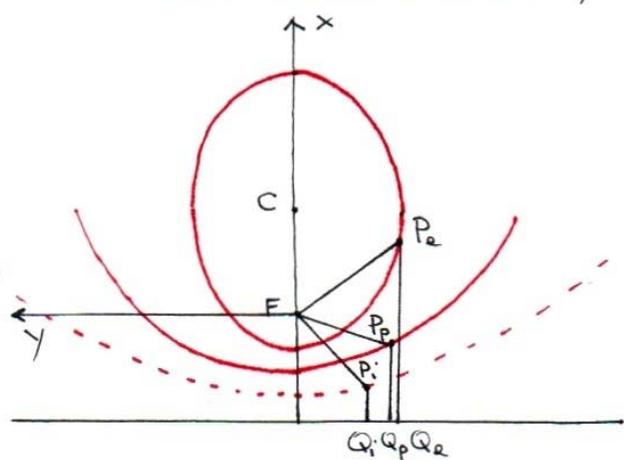
Se si esegue una rotazione di assi per eliminare il termine xy e una traslazione per eliminare i termini lineari, l'equazione in oggetto può presentarsi due diverse forme:

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

"e" si dice eccentricità della conica.

- Per $e=0$ si ha una circonferenza di raggio "a".
- Per $0 < e < 1$ si ha un'ellisse di semiasse maggiore "a" e semiasse minore $b = a \cdot \sqrt{1-e^2}$
- Per $e > 1$ si ha un'iperbole con due rami distinti
- Per $e = 1$ l'espressione degenera e l'equazione diventa la seconda forma: 2) $y = ax^2$

Una caratterizzazione geometrica di quanto detto si può avere utilizzando un punto detto fuoco ed una direttrice, si dice "e" il rapporto



tra la distanza di un punto dal fuoco fatto quella della direttrice.

Il luogo geometrico per cui "e" è costante assume forma diversa

a seconda del valore di tale parametro

$$e = \frac{\overline{P_e F}}{\overline{P_e Q_e}} < 1 \quad \text{ellisse}$$

$$e = \frac{\overline{P_p F}}{\overline{P_p Q_p}} = 1 \quad \text{parabola}$$

$$e = \frac{\overline{P_i F}}{\overline{P_i Q_i}} > 1 \quad \text{iperbole}$$

in questa descrizione non c'è la circonferenza che si ottiene per $e=0$, ovvero mandando la

direttrice all'infinito.

L'equivalenza tra queste 2 descrizioni si ottiene banalmente ponendo un sistema di riferimento

(e)

nel fuoco e con asse "x" perpendicolare alla direttrice. Detta "d" la distanza tra fuoco e direttrice i punti che per un "e" fissato appartengono al luogo geometrico rispettano l'equazione:

$$e^2(d-x)^2 = x^2 + y^2 \quad \text{che è chiaramente l'equazione di una quadrica}$$

Per l'ellisse e l'iperbole esiste un'altra caratterizzazione che fa riferimento alla costante della sezione e della differenza della distanza dei punti da due fuochi.

Troviamo ora ad esprimere l'equazione di una conica in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

Il vettore \vec{e} si può definire mediante il versore che ne indica direzione e verso.

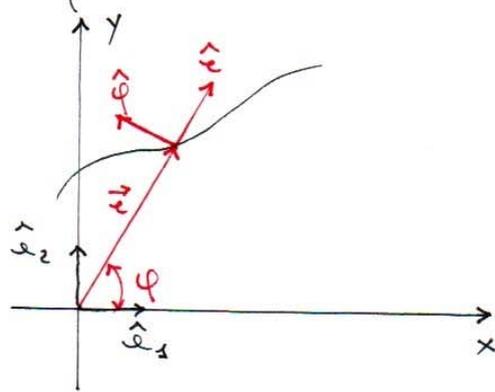
$$\vec{e} = r \cdot \hat{e} = r \cdot \cos \varphi \hat{e}_1 + r \sin \varphi \hat{e}_2$$

$$\hat{\varphi} = \frac{d\hat{e}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} (\cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2) = -\sin \varphi \cdot \hat{e}_1 + \cos \varphi \cdot \hat{e}_2$$

si noti che $\hat{e} \cdot \hat{\varphi} = 0$

effettuare la derivata rispetto a "φ" comporta una rotazione del versore di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario. Infatti:

(3)



$$\frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi} = -\cos\varphi \hat{e}_1 - \sin\varphi \hat{e}_2 = -\hat{e}$$

Questa espressione ci consente di scrivere la derivata nel tempo in maniera più efficace:

$$\frac{d\hat{\varphi}}{dt} = \frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \cdot \hat{e} \quad \text{da cui} \quad \hat{e} = -\frac{1}{\frac{d\varphi}{dt}} \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dt}$$

Scriviamo ora il vettore velocità:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{e}_1 + \frac{dy}{dt} \hat{e}_2 \quad \text{la sua espressione può essere posta anche in coordinate polari}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d(r \cdot \hat{e})}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot \hat{e} + r \cdot \frac{d\hat{e}}{dt} =$$

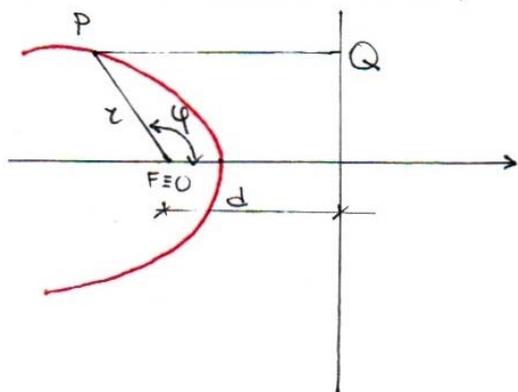
$$= \frac{dr}{dt} \cdot \hat{e} + r \cdot \frac{d\hat{e}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \underbrace{\frac{dr}{dt} \cdot \hat{e}}_{\text{componente radiale della velocità}} + \underbrace{r \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \hat{\varphi}}_{\text{componente tangenziale della velocità}}$$

componente radiale della velocità

componente tangenziale della velocità

Ci chiediamo ora come si possa scrivere l'equazione di una conica in coordinate polari.

Consideriamo un riferimento con origine nel fuoco e direzione dello zero degli angoli perpendicolare alla direttrice.



l'equazione in generale

$$e = \frac{\overline{FP}}{\overline{PQ}}$$

$$\overline{FP} = r$$

$$\overline{PQ} = d - r \cdot \cos\varphi$$

(4)

da cui: $e = \frac{r}{d - r \cdot \cos \varphi}$ da cui è possibile ricavare $r(\varphi)$

$$e d - e r \cos \varphi = r$$

$$r(1 + e \cos \varphi) = e \cdot d \rightarrow r = \frac{e d}{1 + e \cdot \cos \varphi}$$

Nel caso dell'ellisse $r(0) + r(\pi)$ rappresenta la somma delle distanze di 2 vertici dal fuoco, ovvero il semiasse maggiore "2a"

$$r(0) + r(\pi) = 2a$$

$$\frac{e \cdot d}{1 + e} + \frac{e \cdot d}{1 - e} = 2a \rightarrow e \cdot d(1 - e) + e \cdot d(1 + e) = 2a(1 - e^2)$$

$$e \cdot d - \cancel{e^2 d} + e \cdot d + \cancel{e^2 d} = 2a(1 - e^2)$$

$$\cancel{2} \cdot e \cdot d = \cancel{2} a (1 - e^2) \rightarrow d = a \frac{(1 - e^2)}{e}$$

sostituendo questo valore di "d" nella equazione $r(\varphi)$ si ottiene:

$$r = \cancel{e} \cdot \frac{a(1 - e^2)}{\cancel{e}} \cdot \frac{1}{1 + e \cdot \cos \varphi} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos \varphi}$$

questa è l'equazione che richiameremo più spesso da ora in poi.

La distanza del centro dell'ellisse dalla direttrice si può scrivere come:

$$\begin{aligned} CD &= CF + FD = \\ &= e \cdot a + d = e \cdot a + a \frac{(1 - e^2)}{e} = \frac{a}{e} \end{aligned}$$

(5)

se $CF=0$ l'ellisse diventa una circonferenza e risulta $e \cdot a = 0 \rightarrow e = 0$.

L'equazione polare in tal caso diventa:

$$r(e \rightarrow 0) = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{e \cdot d}{1 + e \cdot \cos \varphi} = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos \varphi} = a$$

(e è costante al variare di φ)

Nell'equazione:

$$r = \frac{e \cdot d}{1 + e \cdot \cos \varphi}$$

si indica con "p" parametro della conica.
anomalie vera

Si nota inoltre, guardando l'equazione, che per $e < 1$ φ può assumere tutti i valori tra 0 e 2π , mentre per $e > 1$ perché il denominatore non diventi nullo l'angolo può variare tra $-\varphi_0$ e φ_0 ($\varphi_0 = \arccos(-\frac{1}{e})$) e il luogo geometrico è un'iperbole.

Leggi di Keplero

Dare una spiegazione di natura cinematica al moto apparente dei corpi celesti è stato un grosso problema nel passato, un elemento inspiegabile in maniera semplice era il fatto che i pianeti esterni invertivano il loro moto da diretto a retrogrado.

La spiegazione, oggi nota, è che la Terra, che occupa un'orbita interna, li supera in velocità, il che era non semplice da spiegare considerando una combinazione di moti circolari.

Keplero fu il primo ad interpretare in maniera corretta le osservazioni accurate di Tycho Brahe e a formulare le famose tre leggi che spiegano il moto dei pianeti:

- 1) ogni pianeta si muove su di una traiettoria ellittica in cui un fuoco è occupato dal Sole
- 2) la velocità areale dei pianeti è costante il che porta il moto a compiersi con velocità minore all'afelio rispetto al perielio (apsidi) (orbita)
- 3) il rapporto a^3/T^2 tra il cubo del semiasse maggiore e il quadrato del periodo è costante per tutti i pianeti

La traiettoria della Terra è praticamente circolare essendo $e = 0,0047$, il pianeta con l'orbita più eccentrica è Mercurio con $e = 0,2$

Essendo la distanza tra fuoco e centro di un'ellisse pari ad " $a \cdot e$ ", le distanze tra gli apsi e il fuoco (distanza massima e minima del pianeta dal sole) risultano pari rispettivamente ad $a \cdot (1+e)$ ed $a \cdot (1-e)$, quando il pianeta interseca il semiasse minore la distanza dal fuoco è esattamente pari ad " a ".

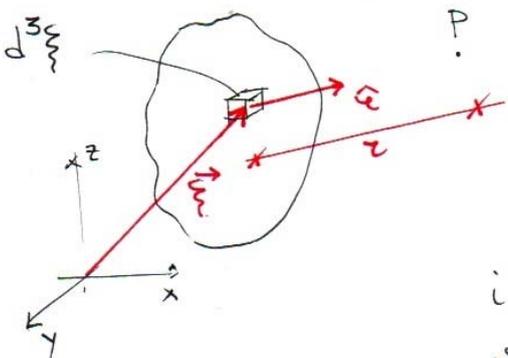
Come è possibile spiegare le leggi di Keplero?

È necessario approcciarsi alla teoria della

gravitazione.

La modellazione più accurata della gravità a cui siamo pervenuti è la teoria della "relatività generale" di Einstein, tuttavia in questa sede faremo riferimento alla sua approssimazione newtoniana basata su tre assunzioni:

- vale il principio di sovrapposizione, ovvero il campo generato da un insieme di masse è la somma vettoriale dei campi generati da ogni singola massa. Supponiamo così che un elemento di materia " dm " generi in un punto \vec{x} un vettore campo $d\vec{g}$, essendo " dm " espresso attraverso una funzione densità di massa $dm = \rho(t, \vec{\xi}) d^3\xi$. Per calcolare il campo totale $\vec{g}(\vec{x})$ è necessario un integrale di volume - sul dominio occupato dalla massa
- l'espressione del campo elementare è fornita dalla seguente relazione:



$$d\vec{g} = -G \cdot \rho(t, \vec{\xi}) \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} d^3\xi$$

→ segno perché la forza è sempre attrattiva.

il vettore \hat{r} è la posizione relativa di P rispetto al volume $d^3\xi$:

il campo gravitazionale in un punto si calcolerà come:

$$\vec{g} = -G \int \rho(t, \vec{\xi}) \frac{(\vec{x} - \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^3} d^3\xi$$

si ricorda che avendo la forma del campo del tipo " $\frac{1}{r^2}$ ", essa è di tipo conservativo e quindi prevede la presenza di un potenziale. Il campo può essere ottenuto anche attraverso l'operatore gradiente applicato a tale potenziale:

$$\vec{g}[\vec{x}, t] = -\nabla_{\vec{x}} \underbrace{\phi(\vec{x}, t)}_{\text{potenziale gravitazionale,}}$$

definito a meno di una costante, in genere si pone $\phi = 0$ a distanza infinita.

Per il campo gravitazionale vale l'analogo del teorema di Gauss per il campo elettrico, ovvero:

$$\text{div}(\vec{g}) = -4\pi G \rho$$

$$-\text{div}(\text{grad}(\phi)) = -4\pi G \rho \quad \text{da cui:}$$

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho$$

questa equazione è nota come "equazione di Poisson"

- per capire come si muove una particella di massa " m " immersa in un campo gravitazionale si assume che su di essa agisca una forza

$$\vec{F} = m \vec{g}$$

dove la massa che è presente in questa relazione (massa inerziale) è concettualmente distinta dalla proprietà che genera il campo (massa gravitazionale), tuttavia tra le due masse c'è perfetta identità. Si tratta dell'unico campo in cui la proprietà che caratterizza gli effetti è la stessa di quella che determina la causa (cio' non avviene nel campo elettrico dove la causa, la forza, è dovuta alla carica, mentre l'effetto, il moto, è dovuto alla massa). Una conseguenza di questa identità è l'evidenza che oggetti posti nello stesso campo gravitazionale presentano la stessa accelerazione anche nel caso di masse inerziali diverse.

Questa identità è una versione del principio di equivalenza che rappresenta il punto di partenza della teoria della relatività generale.

Altra considerazione è che si calcola l'azione al tempo "t" utilizzando la distribuzione di massa al medesimo istante, cio' non è vero nella teoria della relatività in cui nessuna informazione può viaggiare ad una velocità maggiore di quella della luce

Inoltre si tenga presente che il principio di sovrapposizione non è valido in relatività generale, infatti in tale situazione tutte le energie devono contribuire alla gravità inclusa quella del campo stesso, il che rende la gravità "non lineare".

Giacché le stesse ipotesi alla base della relatività generale sono molto distinte dalla teoria newtoniana, è d'uopo quindi chiedersi in quali condizioni l'approssimazione newtoniana possa essere usata.

Considerando che il campo gravitazionale ha le dimensioni di una velocità al quadrato (energia per unità di massa), la condizione di validità può esprimersi:

$$|\phi| \ll c^2$$

noi conosciamo l'espressione del potenziale gravitazionale che è pari a:

$$|\phi| = \frac{GM}{r} = v^2$$

↳ velocità di una particella in orbita a distanza "r"

Una misura dell'importanza degli effetti relativistici è così:

$$\frac{|\phi|}{c^2} = \frac{GM}{rc^2} = \frac{v^2}{c^2}$$

per poter utilizzare la teoria newtoniana

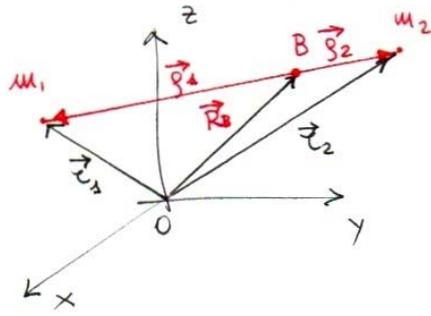
$$\frac{v^2}{c^2} \ll 1 \rightarrow \frac{GM}{rc^2} \ll 1 \rightarrow r \gg \left(\frac{GM}{c^2} \right)$$

↳ questa quantità moltiplicata per 2, rappresenta quello che si chiama raggio di Schwarzschild (11)

Quando si considera la massa del sole il raggio di Schwarzschild è nell'ordine dei 3 km che risulta essere una lunghezza molto minore delle dimensioni del sistema solare.

Il problema dei due corpi

Supponiamo due masse che interagiscono tra loro con una forza derivante da un potenziale $V(r)$, dove " r " è la distanza tra le masse.



Questa massa ha 3 gradi di libertà, per cui il sistema presenta 6 gdl e quindi 6 coordinate lagrangiane indipendenti. Conviene scegliere come lagrangiane le 3 coordinate di posizione del baricentro e le 3 componenti del vettore posizione di m_2 rispetto ad m_1 : $(\vec{R}_B, \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

La Lagrangiana del sistema, ovvero la differenza tra energia cinetica e potenziale, può essere espressa rispetto ai 6 gdl come:

$$\mathcal{L} = T\left(\frac{d\vec{R}_B}{dt}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right) - V(r)$$

Troviamo l'espressione dell'energia cinetica che può essere vista come la somma del moto del baricentro come se in essa fosse concentrata l'intera massa e il moto delle due masse intorno al baricentro:

(1)

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{d\vec{R}_B}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d\vec{p}_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d\vec{p}_2}{dt} \right)^2$$

i vettori \vec{p}_1 e \vec{p}_2 , tuttavia possono essere espressi in funzione delle masse e del vettore \vec{r}

come:

$$\vec{p}_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{p}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

da cui:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{d\vec{R}_B}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{d\vec{R}_B}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

sostituendo nella Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{d\vec{R}_B}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - V(r)$$

la 1^a operazione da fare su \mathcal{L} è che \vec{R}_B o è costante oppure varia linearmente con il tempo, in altre parole le sue coordinate sono cicliche (a livello più basso il sistema è isolato, per cui $\vec{R}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{0}$, quindi B o sta fermo o svolge un moto rettilineo uniforme).

Se ci scordiamo del 2^o termine i 2 termini che restano rappresentano la Lagrangiana di una singola particella in un campo di forze centrali fisso, la cui posizione

(2)

\vec{r} è data dal vettore \vec{e} e la cui massa è pari

a:
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$
 massa ridotta.

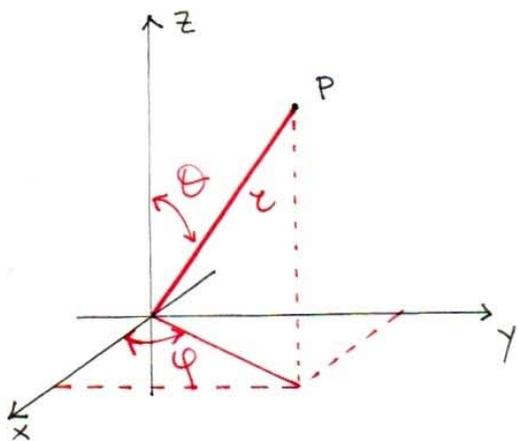
dunque il problema dei 2 corpi interagenti per via di una forza centrale si può ricondurre a quello di un'unica particella.

La Lagrangiana si può dunque scrivere:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{d\vec{e}}{dt} \right)^2 - V(r)$$

dunque essa presenta simmetria sferica dipendendo solo da \vec{e} ,

per cui appare utile esprimere tale quantità in coordinate sferiche



$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = r \cdot \cos(\theta) \end{cases}$$

Le componenti del vettore $\frac{d\vec{e}}{dt}$ sono $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$

calcoliamo separatamente tali componenti:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta \cos \varphi + r \sin \theta (-\sin \varphi) \frac{d\varphi}{dt} + r \cdot \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta \sin \varphi + r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \frac{d\theta}{dt} + r \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{de}{dt} \cdot \cos \Theta + e \cdot (-\sin \Theta) \frac{d\Theta}{dt}$$

Il termine $\left(\frac{d\vec{e}}{dt}\right)^2$ è il prodotto scalare di $\frac{d\vec{e}}{dt}$

per se stesso, ovvero:

$$\left(\frac{d\vec{e}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\vec{e}}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d\vec{e}}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{de}{dt}\right)^2 \sin^2 \Theta \cos^2 \varphi + e^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \varphi \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + e^2 \cos^2 \Theta \cdot$$

$$\cdot \cos^2 \varphi \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 - 2e \frac{de}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \sin^2 \Theta \sin \varphi \cos \varphi + 2e \frac{de}{dt} \cdot$$

$$\frac{d\Theta}{dt} \sin \Theta \cos \Theta \cos^2 \varphi - 2e^2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\Theta}{dt} \sin \Theta \cos \Theta \sin \varphi \cos \varphi$$

$$+ \left(\frac{de}{dt}\right)^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \varphi + e^2 \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 \cos^2 \Theta \sin^2 \varphi + e^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \sin^2 \Theta \cos^2 \varphi + 2e \frac{de}{dt} \frac{d\Theta}{dt} \sin \Theta \cos \Theta \sin^2 \varphi +$$

$$+ 2e \frac{de}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \sin^2 \Theta \sin \varphi \cos \varphi + 2e^2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\Theta}{dt} \cdot$$

$$\cdot \sin \Theta \cos \Theta \sin \varphi \cos \varphi + \left(\frac{de}{dt}\right)^2 \cos^2 \Theta + e^2 \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 \cdot$$

$$\sin^2 \Theta - 2e \frac{de}{dt} \frac{d\Theta}{dt} \cos \Theta \sin \Theta$$

$$\left(\frac{d\vec{e}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{de}{dt}\right)^2 + e^2 \cdot \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 +$$

$$+ e^2 \sin^2 \Theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

→ sostituendo nella
lagrangiana

mettendo
opportunosamente
in evidenza e
applicando la relazione
fondamentale della
trigonometria,
questa espressione si
semplifica.

(4)

$$L = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] - V(r)$$

definita la funzione Lagrangiana, detti "q_i" i singoli gradi di libert  (r, θ, φ),   possibile per ognuno di essi scrivere la rispettiva equazione di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

La prima che conviene analizzare   quella rispetto a θ:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \text{in cui:}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2r^2 \dot{\theta} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 2r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad \text{che porta a:}$$

$$\frac{d}{dt} (2r^2 \dot{\theta}) - 2r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 0$$

$$4r \dot{\theta} + 2r^2 \ddot{\theta} - 2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0$$

(r²(t)   una funzione composta)

La 1^a osservazione da fare   che se θ(t=0) = π/2 e θ̇(0) = 0 si ha che θ̇(t) = 0  t il che significa che il moto si svolge nel piano equatoriale (x-y). Questa eventualit  si pu  sempre ottenere, basta infatti porre l'asse "z" (asse polare) in corrispondenza con la direzione del vettore r̄(0) × v̄(0). (5)

Dunque si può scegliere sempre il sistema di riferimento in modo che sia $\Theta(t) = \frac{\pi}{2} \omega t$.
 Sostituiamo dunque tale valore nella lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) - V(r)$$

Passiamo ora a ragionare su " φ ". Si può verificare che φ è una coordinata ciclica per \mathcal{L} e che

$$L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \quad \text{è una costante del moto}$$

(si tratta della componente del momento angolare lungo l'asse polare " z ". Tale componente è anche l'unica essendo il moto nel piano $x-y$)

Tale proprietà consente di

dimostrare la 2^a

legge di Keplero, infatti

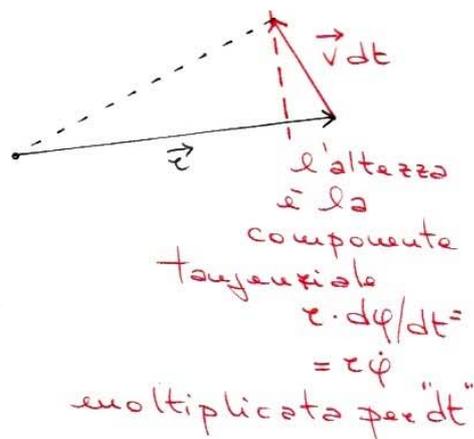
l'area elementare dA

sarà pari a:

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot r \dot{\varphi} dt$$

$$\text{da cui } \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{2\mu} = \text{cost}$$

dunque la velocità areolare è costante ed è pari al momento angolare diviso due volte la massa ridotta.



Si osserva che per dimostrare tale legge si è usata solo la "centralità" del potenziale, e va dunque vale anche per potenziali diversi da quelli del tipo $1/r$.

Resta ora solo da trattare l'equazione di Eulero-Lagrange rispetto ad "r":

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0$$

in cui, riferendosi all'espressione in cui abbiamo tolto θ , risulta:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{2} \mu \cdot 2 \cdot \left(\frac{dr}{dt} \right) = \mu \dot{r}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 2r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{dV}{dr}$$

sostituendo tali termini si avrà:

$$\mu \ddot{r} - \underbrace{\mu r \dot{\varphi}^2} + \frac{dV}{dr} = 0$$

dalla costanza del momento angolare

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} \text{ da cui } \dot{\varphi}^2 = \frac{L^2}{\mu^2 r^4}$$

sostituendo e spostando due termini a destra:

$$\mu \ddot{r} = - \frac{dV}{dr} + \frac{L^2}{\mu r^3}$$

Abbiamo ora un ultimo integrale primo del moto che possiamo utilizzare, ovvero l'energia, visto che il campo è conservativo.

Per sfruttare tale integrale primo è necessario moltiplicare per \dot{r} l'equazione a cui siamo giunti:

$$\mu \ddot{r} \dot{r} = \dot{r} \left(-\frac{dV}{dr} + \frac{L^2}{\mu r^3} \right)$$

$$\mu \dot{r} \ddot{r} = -\dot{r} \frac{d}{dr} \left(V(r) + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} \right)$$

tutti i termini di questa equazione possono essere scritti come derivata rispetto al tempo.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \right) =$$

$$= -\cancel{\dot{r}} \frac{d}{dt} \frac{d}{dr} \left(V(r) + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} \right)$$

integrale di $\frac{1}{r^3}$ è $\frac{1}{2r^2}$

da cui

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V(r) + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V(r) + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} = \text{cost.} = E \quad (\text{energia totale})$$

Questa espressione rappresenta una equazione differenziale a variabili separabili:

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 = E - V(r) - \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} \quad \text{da cui:}$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} \right)} \quad \text{e quindi}$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} \right)}} \quad \text{integrando}$$

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V(r)) - \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2}}} dr$$

questa relazione
è, a tutti gli
effetti, una legge
oraria, purtuttavia
nel caso del potenziale
newtoniano $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$

l'integrale si sviluppa in
termini di arcocoseni iperbolici
e dà vita ad una funzione che non
è invertibile analiticamente.

La soluzione $r(t)$ del problema di Keplero si
ottiene in maniera più efficiente con uno schema
numerico che vedremo più avanti.

È possibile tuttavia prima valutare la traiettoria
combinando le espressioni trovate per $\dot{\varphi}$ ed \dot{r} :

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{d\varphi/dt}{dr/dt} = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{L}{\mu r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E + G\frac{\mu M}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2})}}$$

su questa quantità
eseguiremo 3 operazioni:

- 1) definiamo l'energia per
unità di massa $\bar{E} = E/\mu$
- 2) definiamo il momento angolare per
unità di massa $\bar{L} = L/\mu$
- 3) eseguiamo un cambio di variabile
 $u = \frac{1}{r} \rightarrow du = -\frac{1}{r^2} dr$

$$\frac{dr}{dt}, \text{ dove } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M}$$

Queste 3 operazioni permettono di scrivere $d\varphi/dr$ in modo differenziale e più compatto:

$$d\varphi = \underbrace{\frac{L}{\mu}}_{\bar{L}} \cdot \underbrace{\frac{dr}{r^2}}_{-du} \cdot \frac{1}{\sqrt{\underbrace{2E}_{\bar{E}} + \underbrace{2GM}_{\bar{L}} \underbrace{u}_{\frac{1}{r}} - \underbrace{\frac{L^2}{\mu^2}}_{\bar{L}^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{r^2}}_{u^2}}} =$$

$$= - \frac{\bar{L} du}{\sqrt{2\bar{E} + 2GMu - \bar{L}^2 u^2}} =$$

sommiamo e sottraiamo $\left(\frac{GM}{\bar{L}}\right)^2$ in modo che questi termini entrino in un quadrato

$$= - \frac{\bar{L} du}{\sqrt{2\bar{E} + \left(\frac{GM}{\bar{L}}\right)^2 - \left(\bar{L}u - \frac{GM}{\bar{L}}\right)^2}} =$$

e ora arriva l'idea cruciale, che è quella di provare a fare in modo che dentro la radice resti "1" meno una quantità al quadrato, per cui dentro la radice quadrata si mette in evidenza $2\bar{E} + \left(\frac{GM}{\bar{L}}\right)^2$:

$$= - \frac{\bar{L} du}{\sqrt{\left(2\bar{E} + \left(\frac{GM}{\bar{L}}\right)^2\right) \left(1 - \frac{\left(\bar{L}u - \frac{GM}{\bar{L}}\right)^2}{2\bar{E} + \left(\frac{GM}{\bar{L}}\right)^2}\right)}} =$$

$$= - \frac{\bar{L} du}{\sqrt{(2\bar{E} + (\frac{GM}{\bar{L}})^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\bar{L}u - \frac{GM}{\bar{L}}}{\sqrt{2\bar{E} + (\frac{GM}{\bar{L}})^2}}\right)^2}}$$

si pone così:

$$y = \frac{\bar{L}u - \frac{GM}{\bar{L}}}{\sqrt{2\bar{E} + (\frac{GM}{\bar{L}})^2}} \rightarrow dy = \frac{\bar{L} du}{\sqrt{2\bar{E} + (\frac{GM}{\bar{L}})^2}}$$

con questa sostituzione si ottiene facilmente:

$$d\varphi = - \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{che integrata fornisce}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos(y) \quad \text{da cui} \quad y = \cos(\varphi - \varphi_0)$$

proseguendo a ritroso per calcolare "e" avremo:

$$\frac{\frac{\bar{L}}{r} - \frac{GM}{\bar{L}}}{\sqrt{2\bar{E} + (\frac{GM}{\bar{L}})^2}} = \cos(\varphi - \varphi_0) \quad \text{da cui si ricava "r"}$$

$$e = \frac{\frac{\bar{L}^2}{GM}}{1 + \sqrt{2\bar{E} \left(\frac{\bar{L}}{GM}\right)^2 + 1} \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

quello che
vogliamo capire
ora è che
questa equazione
rappresenta
una conica.

Ricordiamo che l'equazione
di una conica in coordinate

$$\text{polari } \bar{r} : \quad \bar{r} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cdot \cos \varphi}$$

se si orienta opportunamente l'asse "x" (direzione perielio)

possiamo scrivere che $\varphi_0 = 0$, per cui

confrontando le 2 equazioni si osserva che

l'eccentricità è data da:

$$e = \sqrt{2\bar{E} \left(\frac{L}{GM}\right)^2 + 1}$$

se essa è minore di 1, l'orbita sarà chiusa.

Tutto ciò dipende dal segno di \bar{E} ; se:

- $\bar{E} < 0$ orbita chiusa
- $\bar{E} > 0$ orbita iperbolica
- $\bar{E} = 0$ orbita parabolica

Nel caso dei pianeti e del sole $\bar{E} < 0$ il che dimostra la 2ª legge di Keplero

Si tiene a precisare che sia la stella che il pianeta svolgono una traiettoria ellittica rispetto al loro baricentro, ovviamente la traiettoria della stella sarà più piccola di un fattore m_2/m_1 .

La trattazione finora svolta consente di calcolare l'eccentricità con riferimento alle condizioni iniziali e capire, quindi, se il corpo orbiterà intorno al Sole o è destinato a sfuggire al sistema solare compiendo una traiettoria iperbolica.

Sopponendo che la traiettoria sia ellittica

il parametro della conica: $p = a(1 - e^2) = \frac{L^2}{GM}$

da cui possiamo calcolare il semiasse maggiore utilizzando l'espressione dell'eccentricità:

$$a = \frac{L^2/GM}{1 - e^2} = \frac{\cancel{L^2}/GM}{\cancel{1 - 2\bar{E} \frac{L^2}{G^2 M^2} - 1}} = - \frac{GM}{2\bar{E}}$$

dunque "a" ed "e" si individuano note energie e momento angolare, chiaramente le due relazioni possono essere invertite ottenendo:

$$\bar{E} = - \frac{GM}{2a}$$

$$L = \sqrt{GMa(1 - e^2)}$$

ovviamente queste 2 relazioni sono valide per orbite ellittiche.

Passiamo avanti ora e notiamo che l'equazione del moto legata alla costanza dell'energia coinvolge solo "r" e le sue derivate, si tratta, insomma, della stessa equazione che avremmo ottenuto in un problema di moto rettilineo in cui il punto materiale di massa μ fosse soggetto ad una

forza efficace: $\vec{f}' = \vec{f} + \frac{L^2}{\mu r^3} \vec{e}$ da cui deriva un potenziale efficace:

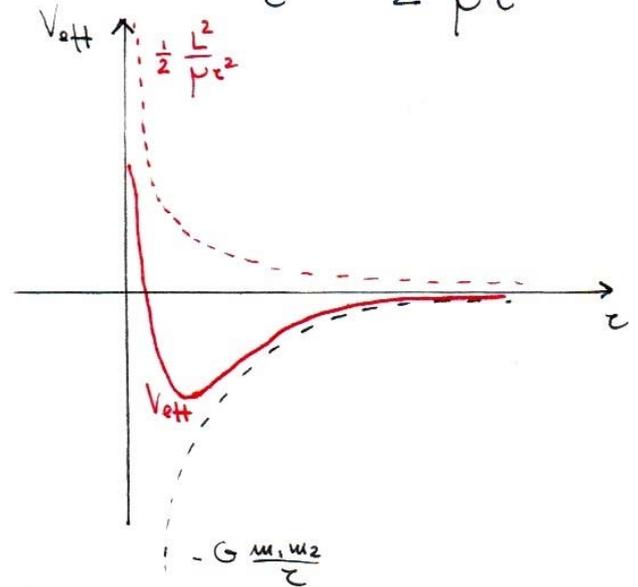
$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2}$$

Nel nostro caso la forza è quella gravitazionale

$$\vec{p} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{e} \quad \text{e il corrispondente potenziale}$$

efficace risulta:
$$V_{\text{eff}}(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2}$$

In tale termine il momento angolare svolge il ruolo di una vera e propria barriera per evitare che il punto materiale collassi sulla stella (si ricorda che il sistema



tende al minimo del potenziale).

Quello che può accadere è che il corpo celeste si collochi sul fondo della buca di potenziale, in tal caso $v = \text{cost}$ e la traiettoria sarà circolare, oppure che oscilli intorno a tale minimo, nel qual caso avrà un afelio e un perielio e la traiettoria sarà ellittica.

Se la particella ha un'energia > 0 essa si avvicina alla barriera di potenziale e ne viene riflessa allontanandosi all'infinito (traiettoria iperbolica) (14)

Nelle pagine precedenti abbiamo dimostrato prima la seconda e poi la prima legge di Keplero, possiamo ora mostrare la terza.

Sappiamo che la velocità areolare è costante e

$$\text{vale: } \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{\bar{L}}{2}$$

è possibile così calcolare l'area dell'ellisse e di conseguenza il periodo del moto

$$A = \pi \cdot a \cdot b$$

$$T = \frac{A}{dA/dt} = \frac{2\pi a b}{\bar{L}}$$

ricordiamo ora l'espressione del momento angolare per unità di massa in funzione di "a" ed "e" e l'espressione del semiasse minore in funzione di quello maggiore:

$$\bar{L} = \sqrt{GMa(1-e^2)}$$

$$b = a \cdot \sqrt{1-e^2}$$

si avrà:

$$T = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{GMa(1-e^2)}} = \frac{2\pi a^2 \cdot \sqrt{1-e^2}^{\cancel{1}}}{\sqrt{GMa} \cdot \sqrt{1-e^2}^{\cancel{1}}}$$

elevando al quadrato: $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$ da cui

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

questa relazione ci porta a scoprire che la

3^a legge è vera in maniera (15) approssimata, perché cambia m_2 tra i diversi pianeti (però per Giove la correzione è $\frac{1}{1047}$)

La 3^a legge di Keplero è un efficiente strumento per il calcolo delle masse dei pianeti, a patto che di tale pianeta si possa osservare il moto di un satellite che gli ruota intorno.

- M_{\odot} massa del Sole
- M_P massa del pianeta P ;
- M_S massa del satellite
- T_P tempo di rivoluzione del pianeta intorno al sole
- T_S tempo di rivoluzione del satellite intorno al pianeta.

scriviamo la 3^a legge

per i due moti di rivoluzione:

$$\frac{a_P^3}{T_P^2} = G \frac{(M_P + M_{\odot})}{4\pi^2}$$

$$\frac{a_S^3}{T_S^2} = G \frac{(M_S + M_P)}{4\pi^2}$$

dividiamo membro a membro le due equazioni

$$\left(\frac{a_P}{a_S}\right)^3 \cdot \left(\frac{T_S}{T_P}\right)^2 = \frac{(M_P + M_{\odot})}{(M_S + M_P)} = \frac{M_{\odot} \left(\frac{M_P}{M_{\odot}} + 1\right)}{M_P \left(\frac{M_S}{M_P} + 1\right)}$$

sia $\frac{M_P}{M_{\odot}}$ che $\frac{M_S}{M_P}$ risultano essere quantità $\ll 1$

per cui con buona approssimazione possiamo

scrivere:

$$\frac{M_P}{M_{\odot}} = \left(\frac{a_S}{a_P}\right)^3 \cdot \left(\frac{T_P}{T_S}\right)^2$$

questa relazione permette la misura indiretta della massa di un

pianeta osservando il suo moto di rivoluzione e quello di un suo satellite (16)

Solo Mercurio e Venere non hanno satelliti noti, la loro massa è stata determinata studiando la perturbazione della loro orbita dovuta agli altri pianeti. Più tardi si sono inviate delle sonde su Venere ed è stato possibile utilizzare tali sonde come satelliti.

L'espressione che si è trovata fornisce la massa dei pianeti in funzione di quella del Sole, utilizzando i valori dei semiasse maggiori e dei periodi è possibile calcolare $G M \approx G M_{\odot}$, tuttavia con questo approccio non si può calcolare alcun valore di m_p se non si conosce G .

Tale costante fu determinata da Cavendish nel 1798 utilizzando una bilancia di torsione e dei corpi molto massivi, nonostante altri metodi (interferometria) siano stati adottati, ancora oggi la bilancia di torsione resta il metodo più affidabile. Il valore universalmente accettato oggi

è: $G = 6,67408 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}$ con una incertezza di $4 \cdot 10^{-5}$ che è tuttora la più grande relativa alle costanti fondamentali.

Come ovvio l'incertezza su G , si trasferisce sulle masse dei pianeti, tuttavia nei problemi di gravitazione compare sempre GM che può essere valutata con errore arbitrariamente piccolo. Noto G si possono calcolare tutte le masse in kg.

$$M_{\odot} = 1,988 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \quad M_{\oplus} = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg},$$

$$M_{\text{Giove}} = 1,898 \cdot 10^{27} \text{ kg} \dots$$

Velocità orbitale

Si consideri l'espressione dell'energia:

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2}$$

$$-\frac{GM}{2a} = \frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{GM}{r} + \frac{r^2 \dot{\varphi}^2}{2}$$

dividiamo per μ
ottenendo \bar{E} e ricordiamo
che per una traiettoria
ellittica $\bar{E} = GM/2a$,
mentre per definizione
 $L = r^2 \dot{\varphi}$

raggruppando
questi 2 termini

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{GM}{2} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Ora ricordiamo che le componenti del vettore velocità in coordinate polari sono:

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\varphi} \hat{e}_{\varphi} \quad \text{per cui:}$$

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

il termine tra parentesi
è proprio la velocità
orbitale al quadrato.

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Questa relazione consente di calcolare il modulo del vettore velocità al variare della posizione sull'orbita, inoltre se di un corpo conosciamo la coordinata radiale e il modulo della velocità si può calcolare il semiasse maggiore

$$a = \frac{r}{\frac{2}{r} - \frac{v^2}{GM}}$$

è importante notare che il semiasse maggiore dipende solo dal modulo della velocità, per cui cambiando direzione e verso si cambia solo l'orientamento dell'ellisse.

È possibile che da tale calcolo si ottenga $a < 0$, ciò vuol dire che la velocità è troppo alta per avere una traiettoria chiusa. La condizione limite è:

$$\frac{2}{r} - \frac{v^2}{GM} = 0 \rightarrow v^2 = \frac{2GM}{r} = v_f^2$$

Un corpo con $v = v_f$ avrà una traiettoria parabolica, mentre $v > v_f$ corrisponde ad una traiettoria iperbolica.

questa è detta velocità di fuga e corrisponde ad energia meccanica nulla.

La traiettoria circolare corrisponde alla condizione $r = a$ da cui:

$$r = \frac{GM r}{2GM - v^2 r} \rightarrow 2GM - v^2 r = GM$$

$$v^2 r = GM \quad \text{che implica:} \quad v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Abbiamo studiato come varia "v" al variare della coordinata

donque in assenza di altre forze la velocità circolare decresce con la radice della distanza

distanza "r", ora proviamo

a capire come varia al variare dell'anomalia φ ,

basta sostituire $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cdot \cos \varphi}$ (equazione del luogo geometrico)

nell'ultima relazione:

$$v^2 = GM \left(\frac{2+2e \cos \varphi}{a(1-e^2)} - \frac{1}{a} \right) =$$

$$= \frac{GM}{a(1-e^2)} (1+2e \cos \varphi + e^2)$$

Sostituendo $\varphi=0$ e $\varphi=\pi$ è possibile immediatamente calcolare la velocità al periastro e apoastro:

$$v_p^2 = \frac{GM}{a(1-e)(1+e)} \cdot (1+e)^2 = \frac{GM}{a} \cdot \left(\frac{1+e}{1-e} \right) \quad (\varphi=0)$$

$$v_a^2 = \frac{GM}{a(1+e)(1-e)} \cdot (1-e)^2 = \frac{GM}{a} \cdot \left(\frac{1-e}{1+e} \right) \quad (\varphi=\pi)$$

Facendo prodotto e rapporto tra tali 2 equazioni si ottiene:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1+e}{1-e}, \quad v_p \cdot v_a = \frac{GM}{a}$$

Si tenga molto bene presente che la velocità che compare in tutte queste espressioni è

quella relativa tra le due masse, la velocità rispetto al baricentro per le due masse va ottenuta moltiplicando per $\frac{m_2}{m_1+m_2}$ nel caso della 1ª massa e di $\frac{m_1}{m_1+m_2}$ nel caso della 2ª massa.

Problema di Keplero

Eravamo arrivati alla risoluzione del problema di Keplero con una relazione $t(r)$ che non poteva essere invertita. Per questo motivo conviene procedere in maniera differente, introducendo due parametri: anomalía media e anomalía eccentrica.

Chiamiamo "T" il periodo misurato, e " τ " l'istante di tempo in cui il corpo passa al perielio.

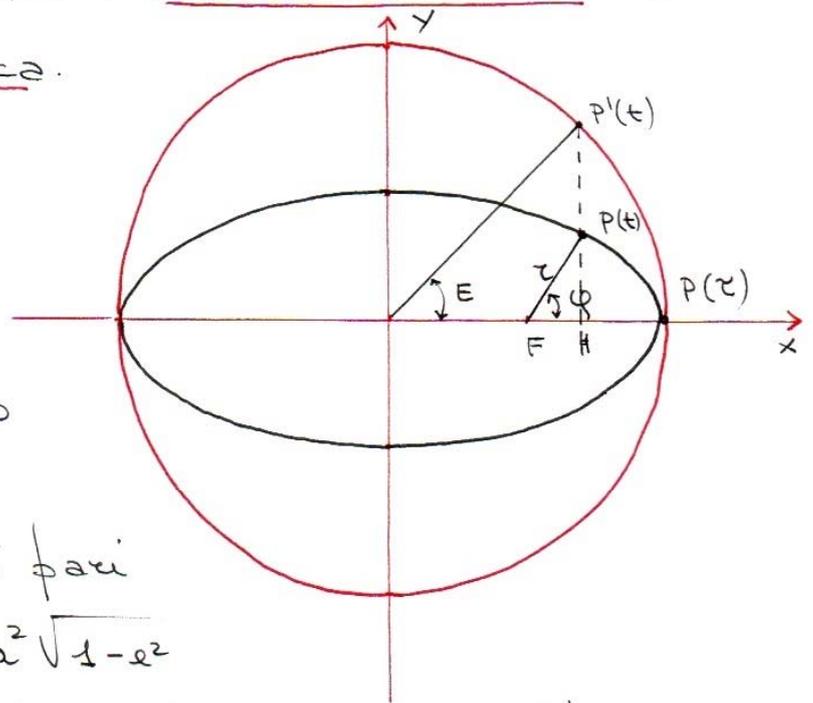
L'area dell'ellisse è pari

$$A = \pi \cdot a \cdot b = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$$

essendo la velocità areale costante, l'area spazzata è proporzionale al tempo

$$\frac{A(P(t)FP(\tau))}{t-\tau} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T}$$

↘ $s(t-\tau)$



$$S(t-\tau) = \pi a^2 \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{(t-\tau)}{T}$$

moltiplichiamo e
dividiamo per 2
ottenendo:

$$= \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{2} \cdot \frac{2(t-\tau)}{T} =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{2\pi (t-\tau)}{T} \rightarrow \text{questa quantità si definisce anomalia media } M[t-\tau]$$

Quello che bisogna fare ora è "semplicemente" esprimere $S(t-\tau)$ in funzione di "e" e "φ".

Nel caso l'orbita fosse circolare il problema sarebbe banale visto che l'area di un settore circolare ha un'espressione immediata:

$$S(t-\tau) = \frac{1}{2} r^2 \cdot \varphi(t)$$

ma nel caso della circonferenza $r = \text{cost.}$ e $\varphi(t)$ corrisponde proprio all'anomalia media.

Per un'orbita ellittica la situazione è decisamente più complessa e, seguendo le indicazioni di Keplero, conviene introdurre un parametro ausiliario che chiameremo anomalia eccentrica e che altri non è che l'anomalia considerando il centro dell'ellisse e la proiezione P' sulla circonferenza di raggio $r=a$

Il punto P presenta coordinate rispetto al fuoco

$$x = a \cdot \cos(E) - a \cdot e \rightarrow \text{traslazione del sistema da C ad F}$$

$$y = a \cdot \sqrt{1-e^2} \sin(E) \rightarrow \text{fattore di contrazione delle "y" sull'ellisse.}$$

Possiamo così calcolare la lunghezza del raggio vettore:

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(a \cos E - ae)^2 + a^2(1-e^2)\sin^2 E} = \\
 &= \sqrt{\underline{a^2 \cos^2 E} + \underline{a^2 e^2} - 2a^2 e \cos E + \underline{a^2 \sin^2 E} - \underline{a^2 e^2 \sin^2 E}} = \\
 &= \sqrt{a^2 + a^2 e^2 \cos^2 E - 2a^2 e \cos E} = a \sqrt{1 - 2e \cos E + e^2 \cos^2 E} \\
 &= a \sqrt{(1 - e \cos E)^2} = a(1 - e \cos E)
 \end{aligned}$$

Le coordinate "x" e "y" si possono scrivere anche con riferimento all'anomalia vera:

$$\begin{cases}
 x = r \cdot \cos(\varphi) = a \cdot \cos(E) - a \cdot e \\
 y = r \cdot \sin(\varphi) = a \cdot \sqrt{1-e^2} \sin(E)
 \end{cases}$$

dalla 1^a di queste equazioni abbiamo:

$$\cos(\varphi) = \frac{a(\cos(E) - e)}{r} = \frac{1}{1 - e \cos(E)} (\cos(E) - e)$$

questa relazione si può invertire e calcolare $\cos(E)$

$$\cos(\varphi) - e \cos(E) \cos(\varphi) = \cos(E) - e$$

$$\cos(E) \cdot (1 + e \cos(\varphi)) = e + \cos(\varphi) \quad \text{da cui:}$$

$$\cos(E) = \frac{e + \cos(\varphi)}{1 + e \cdot \cos(\varphi)}$$

serve ora trovare una relazione che legghi l'anomalia eccentrica E con quella media M

(equazione di Eulero)

L'idea è quella di esprimere l'area $P(\tau)FP(t)$ in 2 modi diversi:

- in funzione dell'anomalia media:

$$S[t-\tau] = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot M[t-\tau]$$

- in funzione dell'anomalia eccentrica:

si osserva che l'area cercata è pari alla differenza tra il settore ellittico $P(t)CP(\tau)$ e il triangolo $P(t)CF$.

L'osservazione cruciale

qui è che: $\overline{PH} = \sqrt{1-e^2} \cdot \overline{P'H}$

e quindi anche:

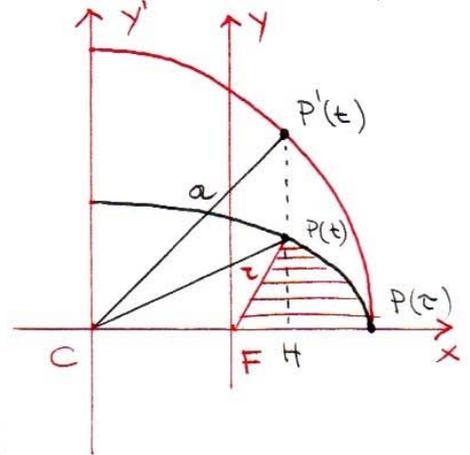
$$A_{\widehat{PCF}} = \sqrt{1-e^2} \cdot A_{\widehat{P'CF}}$$

inoltre essendo tutti i valori

di y ridotti di $\sqrt{1-e^2}$ risulta anche

$$A_{\widehat{PCP\tau}} = \sqrt{1-e^2} \cdot A_{\widehat{P'CP\tau}}$$

queste 2 relazioni consentono di calcolare le aree con riferimento alla circonferenza e non all'ellisse.



$$S[t-\tau] = A_{\widehat{PCP\tau}} - A_{\widehat{P'CF}} =$$

$$= \sqrt{1-e^2} \left(A_{\widehat{P'CP\tau}} - A_{\widehat{P'CF}} \right) =$$

$$= \sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} \underbrace{ae}_{CF} \cdot \underbrace{a \sin(E)}_{P'H} \right)$$

ricordando che $b = a\sqrt{1-e^2}$ si ottiene:

$$S(t - \tau) = \frac{1}{2} a \cdot b (E - e \cdot \sin E)$$

Confrontando le due espressioni si ottiene che:

$$M = E - e \cdot \sin(E)$$

Ora è possibile implementare il procedimento numerico per la risoluzione del problema.

- 1) per un generico tempo "t", noto il tempo τ di passaggio al perielio si calcola l'anomalia media:

$$M = 2\pi \frac{(t - \tau)}{T}$$

- 2) si risolve l'equazione di Keplero per il calcolo di E, si tratta di un'equazione trascendente che i calcolatori risolvono facilmente

- 3) Si sostituisce il valore di E nell'equazione

$$\cos \varphi = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

e si calcola φ

(si tenga presente che l'arcocoseno fornisce sempre valori tra 0 e π , tuttavia se $\pi < E \leq 2\pi$ evidentemente in tale intervallo si trova anche φ)

noto " φ ", attraverso l'equazione della conica, che deve essere nota inizialmente, anche per calcolare T, si può calcolare " τ ".

Ultima situazione da analizzare è quella della risoluzione del problema di Keplero nel caso di orbita non periodica. In tal caso la terza legge di Keplero non può essere utilizzata, tuttavia si può procedere con uno schema numerico simile a quello utilizzato per la traiettoria ellittica.

Nel caso di traiettoria iperbolica si definisce un'anomalia iperbolica H che si calcola, in funzione del tempo, risolvendo numericamente la seguente equazione di Keplero:

$$(1) \quad e \cdot \sinh H - H = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} (t - \tau)$$

istanza di passaggio al periastro

"a" distanza del periastro dal centro del riferimento canonico.

Ottenuta H , la posizione del corpo celeste è ottenuta in coordinate polari centrate nel fuoco:

$$(2) \quad r = a (e \cosh H - 1)$$

$$(3) \quad \tan \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \cdot \tanh \frac{H}{2}$$

Al periastro si ha $H=0 \rightarrow r = a(e-1)$ come deve essere per un'iperbole.

Le 3 equazioni che risolvono il problema per un'iperbole, si trasformano come segue per una parabola, definendo P anomalia (26)

parabolica:

$$(1) \quad P + \frac{P^3}{3} = \sqrt{\frac{GM}{2\mu_p^3}} (t - \tau)$$

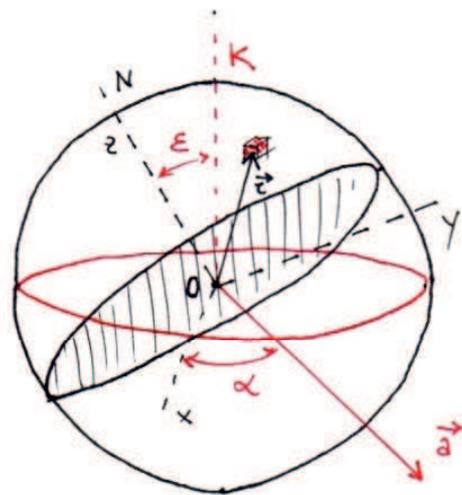
$$(2) \quad r = \underbrace{r_p}_{\text{distanza del perielio dal fuoco}} (1 + P^2)$$

$$(3) \quad \tan \frac{\varphi}{2} = P$$

Estensione del problema dei 2 corpi

Finora si è fatta l'ipotesi che i 2 corpi siano puntiformi, si tratta di una ipotesi semplificativa visto che la forza gravitazionale delle parti più lontane dalla sorgente del campo è minore rispetto a quella agente sulle parti più vicine. Tale effetto deforma il globo terrestre, si pensi alle maree, il che porta alla dissipazione di parte dell'energia rotazionale. Inoltre i "campi mareali" determinano momenti torcenti che ci permettono di dare una spiegazione del fenomeno della precessione degli equinozi.

Consideriamo la Terra con l'asse "z" rivolto al polo nord, l'asse "x" diretto verso il punto di intersezione tra l'equatore e l'eclittica, l'addoss il primo entra nell'eclittica superiore e l'asse "y" normale ai primi due. Indichiamo con \vec{a} il vettore che congiunge la Terra al Sole in un generico istante del suo moto. Calcoliamo la forza subita da



un generico elemento di massa ρd^3x in
dividato come posizione dal vettore \vec{r} :

$$d\vec{F} = G M_{\odot} \frac{\vec{a} - \vec{r}}{|\vec{a} - \vec{r}|^3} \rho d^3x =$$

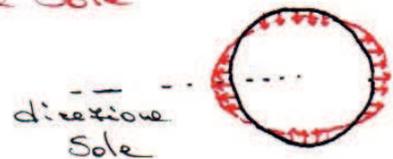
sviluppiamo in serie
per piccoli valori di " r "

$$= G M_{\odot} \rho d^3x \left(\frac{\vec{a}}{a^3} - \frac{\vec{r}}{a^3} + \frac{3\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{r})}{a^5} \right)$$

termine
finora considerato

termini al 1° ordine
corrispondenti ad una
elongazione in direzione
del Sole

Questo effetto è presente
anche nel caso Terra-Luna
per cui, un osservatore solidale
con la Terra, sperimenta qui
giorno due basse e due alte maree (in realtà la
periodicità di questo effetto è di circa 25 ore).
Possiamo calcolare il momento angolare relativo
al moto di rotazione della Terra come:



$$\vec{L} = I_{\parallel} \omega_d \hat{z} \quad \omega_d = \frac{2\pi}{1 \text{ day}} \quad I_{\parallel} = \int \rho (x^2 + y^2) d^3x$$

Il momento angolare di un corpo in rotazione
si modifica in virtù del momento delle forze
agenti. Se la forza fosse centrata, oppure se la
Terra fosse perfettamente sferica, il momento
sarebbe nullo. È la forma di ellissoide
oblato a creare un momento.

Il momento della forza sul singolo elemento sarà $d\vec{M} = \vec{e} \times d\vec{F}$ ovviamente il termine di grado zero dello sviluppo non dà vita ad alcun momento, quello di compressione produce $\vec{e} \times \vec{e} = \vec{0}$, è significativo quello di elongazione:

$$d\vec{M} = G M_0 \rho d^3x \left[\frac{3(\vec{e} \times \vec{a})(\vec{a} \cdot \vec{e})}{a^5} \right]$$

Per poter "fare di conto" è necessario esprimere i vettori \vec{e} ed \vec{a} :

il vettore \vec{a} si proietta prima lungo \hat{x} poi sul piano $\hat{y}-\hat{z}$

$$\vec{e} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

$$\vec{a} = a (\cos \alpha \hat{x} + \sin \alpha \cos \epsilon \hat{y} + \sin \alpha \sin \epsilon \hat{z})$$

Svolgiamo il prodotto scalare

e vettoriale: $\vec{a} \cdot \vec{e} = a x \cos \alpha + a y \sin \alpha \cos \epsilon - a z \sin \alpha \sin \epsilon$

$$\vec{e} \times \vec{a} = a \left[(-y \sin \alpha \sin \epsilon - z \sin \alpha \cos \epsilon) \hat{x} + (z \cos \alpha + x \sin \alpha \sin \epsilon) \hat{y} + (x \sin \alpha \cos \epsilon - z \cos \alpha) \hat{z} \right]$$

Invece di buttarci in una marea di calcoli è opportuno ora ragionare, poiché la forma della Terra è simmetrica rispetto a tutti e 3 gli assi, facendo l'integrale si eliminano tutti i termini che contengono almeno una tra le 3 coordinate con esponente dispari. Inoltre a noi interessa il momento medio per ogni valore di α tra 0 (3)

e 2π (ci interessa in altre parole che non si annulli l'integrale su α variabile tra 0 e 2π), dunque si eliminano tutti i termini che contengono esponenti dispari di $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$.

Detto ciò è facile verificare che si salvano solo 2 termini:

$$d\vec{H} = \frac{GM_0}{a^3} \int d^3x [-y^2 + z^2] \sin^2 \alpha \sin \epsilon \cos \epsilon \hat{x}$$

se si aggiunge e sottrae x^2 a questo termine aiutando ad integrare si fanno comparire due momenti d'inerzia ($I_{\parallel} \rightarrow x^2 + y^2$ e $I_{\perp} \rightarrow x^2 + z^2$):

$$\vec{H} = 3 \frac{GM_0}{a^3} [I_{\perp} - I_{\parallel}] \sin^2 \alpha \sin \epsilon \cos \epsilon \hat{x}$$

Il vettore momento angolare, in virtù delle caratteristiche di \vec{H} , tenderà a ruotare in senso orario se visto dal nord dell'eclittica.

si noti che il momento è solo lungo \hat{x} e che per la forma della Terra $I_{\parallel} > I_{\perp}$, dunque il momento è opposto a \hat{x}

Si noti che il momento non ha valore costante, ma varia con " α ", è massimo quando è massimo $\sin^2 \alpha \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ovvero ai due solstizi, e si annulla agli equinozi.

Per ottenere la precessione media annua media su " α ":

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}$$

che dopo sostituzione porta a:

$$\langle \vec{\mathcal{M}} \rangle = \frac{3GM_{\odot}}{2a^3} [I_{\perp} - I_{\parallel}] \sin \epsilon \cos \epsilon \hat{x}$$

L'equazione che consente lo studio della dinamica di un sistema in rotazione in un riferimento inerziale \bar{e} :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}$$

noi però abbiamo capito che il sistema ruota di una velocità

angolare che è proprio quella di precessione che vogliamo

calcolare, per cui l'equazione

nel sistema non inerziale diventa:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega}_p \times \vec{L} = \vec{M}$$

poiché il sistema di riferimento $x-y-z$

segue nel suo moto il

settore \vec{L} , ovviamente il

1° termine di questo settore è

nullo, inoltre $\vec{\omega}_p$ è diretto normale

al piano dell'eclittica, per cui l'angolo tra

$\vec{\omega}_p$ ed \vec{L} è proprio ϵ :

$$-\omega_p L \sin \varepsilon = \langle M \rangle \rightarrow \omega_p = \frac{-\langle M \rangle}{I_{\parallel} \omega_d \sin \varepsilon} \quad \text{sostituendo}$$

$$\omega_p = -\frac{3GM_{\odot}}{2a^3} \cdot \frac{1}{I_{\parallel} \omega_d \sin \varepsilon} \cdot (I_{\perp} - I_{\parallel}) \sin \varepsilon \cos \varepsilon$$

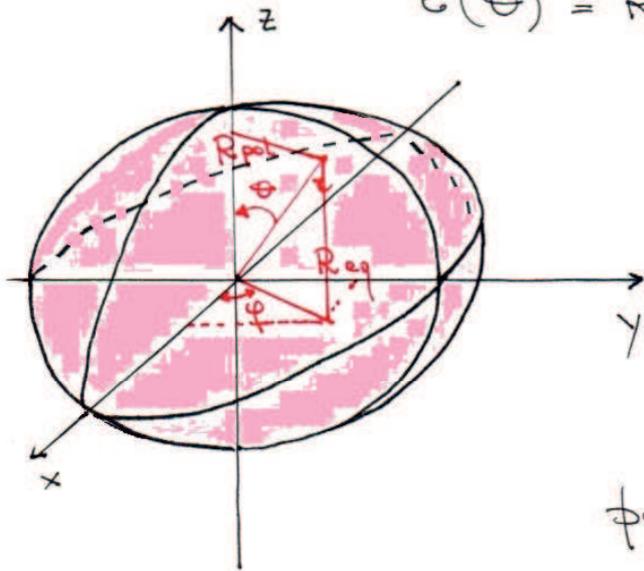
$$\omega_p = \frac{3GM_{\odot}}{2a^3 \omega_d} \left(1 - \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} \right) \cos \varepsilon$$

il problema in questa relazione è il calcolo dei momenti d'inerzia

Esiste, tuttavia, una relazione tra momenti d'inerzia ed ellitticità. In particolare l'equazione di un ellissoide omogeneo in coordinate sferiche è:

$$r(\theta) = R(1 - f \cos^2 \theta)$$

con θ angolo polare
ed:
 $f = 1 - \frac{R_{pol}}{R_{eq}}$



Per poter scrivere i termini di inerzia si noti che la distanza dall'asse "z" del generico punto \vec{r} :

$$d_z = r \sin \theta = \frac{r \sin \theta}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

mentre quella dall'asse y

$$d_y = r \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta}$$

$\sqrt{x^2 + z^2}$

Nel fare gli integrali va tenuto conto dello jacobiano della trasformazione sferica:

(6)

$$r = r^2 \sin \theta$$

gli integrali si scriveranno
dunque:

$$I_{//} = \int \int \int r^4 \sin^3 \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \text{svolgendo gli integrali su "r" e "φ":}$$

$$= \frac{2\pi \rho R^5}{5} \int \underbrace{(1 - \rho \cos^2 \theta)^5}_{\text{poiché } \rho \ll 1} \sin^3 \theta \, d\theta =$$

poiché $\rho \ll 1$ questa quantità si sviluppa
in serie fino al 1° ordine ottenendo:

$$= \frac{2\pi \rho R^5}{5} \int_0^\pi (1 - 5\rho \cos^2 \theta) \sin^3 \theta \, d\theta = \text{si tratta di risolvere gli integrali di } \sin^3 \theta \text{ e } \sin^5 \theta$$

$$= \frac{2\pi \rho R^5}{5} \left(\int_0^\pi (1 - 5\rho) \sin^3 \theta \, d\theta + \int_0^\pi 5\rho \sin^5 \theta \, d\theta \right)$$

$$\int \sin^3 \theta \, d\theta = - \int (1 - \cos^2 \theta) \, d \cos \theta = \int (t^2 - 1) \, dt = \\ = \frac{t^3}{3} - t + c = \frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta + c$$

$$\int \sin^5 \theta \, d\theta = - \int (1 - \cos^2 \theta)^2 \, d \cos \theta = \int (t^2 - 1)^2 \, dt = \\ = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t + c = \frac{\cos^5 \theta}{5} - \frac{2\cos^3 \theta}{3} + \cos \theta + c$$

da cui sostituendo:

$$I_{//} = \frac{2\pi \rho R^5}{5} (1 - 5\rho) \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right]_0^\pi + \\ + \frac{2\pi \rho R^5}{5} \cdot 5\rho \cdot \left[\frac{\cos^5 \theta}{5} - \frac{2\cos^3 \theta}{3} + \cos \theta \right]_0^\pi = \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi\rho R^5}{5} (1-5f) \left(\underbrace{-\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1}_{4/3} \right) + \\
&+ \frac{2\pi\rho R^5}{5} \cdot 5f \left(\underbrace{-\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1 - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1}_{-16/15} \right) = \\
&= \frac{2\pi\rho R^5}{5} \left(\frac{4}{3} - \frac{20}{3}f + \frac{16}{3}f \right) = \frac{8\pi\rho R^5}{15} - \frac{8\pi\rho R^5}{15}f
\end{aligned}$$

In maniera analoga si calcola l'altro termine di inerzia:

$$I_{\perp} = \rho \int e^4 (\sin^2\Theta \cos^2\varphi + \cos^2\Theta) \sin\Theta \, d\Theta \, d\varphi$$

attraverso
simili passaggi $= \frac{8\pi\rho R^5}{15} - \frac{16}{15}\pi\rho R^5 \cdot f$

Se calcoliamo $I_{\parallel} - I_{\perp} = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 f$

dividiamo tutto per I_{\parallel} :

$$\frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel}} = \frac{\frac{8}{15}\pi\rho R^5 f}{\frac{8}{15}\pi\rho R^5 (1-f)} \approx f$$

per valori di "f" piccoli il denominatore è praticamente 1.

dunque risulta:

$$f = 1 - \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}}$$

questa si chiama formula di

McCullough

ed ha una validità più generale di questo contesto.

(8)

Ora l'ellitticità è un parametro facile da misurare $f = 0,00335$ ed ora grazie a questa formula si può esprimere la precessione degli equinozi:

$$\omega_p = \frac{3GM_\odot}{2a^3\omega_d} \cdot f \cdot \cos E$$

sostituendo i valori numerici si ha:

$$\omega_{p\odot} = 2,51 \cdot 10^{-12} \text{ rad/sec}$$

cui corrisponde un periodo:

$$P_{p\odot} = \frac{2\pi}{\omega_{p\odot}} = 79254 \text{ anni}$$

Questo periodo non è quello che si misura, che invece è pari a 25765 anni, per ottenerlo è necessario considerare il contributo della luna, per il quale utilizzando la stessa formula si ha: $\omega_{pL} = 5,45 \cdot 10^{-12} \text{ rad/sec}$; considerando ambo i contributi si ha:

$$P_{p_{\text{tot}}} = \frac{2\pi}{\omega_{p\odot} + \omega_{pL}} = 25017 \text{ anni}$$

che è in
accordo
con il valore
osservato.

Ora c'è da fare un ragionamento importante, una particella che si sposta in uno spazio tridimensionale ha 6 g.d.l.

Due grandezze fisiche si conservano in un campo di forze centrali, ovvero l'energia e le 3 componenti del momento angolare, dunque restano 2 parametri liberi il che non è compatibile con l'orbita che si osserva. Si dovrebbe infatti avere un'orbita che riempie completamente una regione bidimensionale di spazio visto che ci sono 2 parametri indipendenti, invece abbiamo orbite chiuse che si possono parametrizzare con un'unica grandezza. Questo ci porta a concludere che deve necessariamente esistere un'altra grandezza fisica scalare che si conserva. Cerchiamo tale grandezza osservando che la 2^a legge di Newton si scriverà nel caso di forza centrale:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = f(r) \frac{\vec{e}}{r}$$

moltiplichiamo ora ambo i termini per il momento angolare che è costante

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{L} = \mu \frac{f(r)}{r} \left[\vec{e} \times \left(\vec{e} \times \frac{d\vec{e}}{dt} \right) \right]$$

$\mu \vec{e} \times \frac{d\vec{e}}{dt}$

Un doppio prodotto vettoriale può essere espresso
 usando la seguente relazione:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \text{cio' consente di scrivere:}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{L} = \frac{\mu f(r)}{r} \left(\vec{r} \cdot \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) - r^2 \frac{d\vec{r}}{dt} \right) =$$

si osserva ora che risulta $\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r}) =$
 $= \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 2r \frac{dr}{dt} = r \frac{dr}{dt}$

$$= \frac{\mu f(r)}{r} \left(r \cdot \frac{dr}{dt} \vec{r} - r^2 \frac{d\vec{r}}{dt} \right) =$$

si mette in evidenza r^2 nella parentesi:

$$= \mu f(r) \cdot r^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \vec{r} - \frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} \right) =$$

questa quantità è $-\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$

$$= -\mu f(r) \cdot r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

Ora analizziamo il 1° termine $\frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{L}$, poiché \vec{L} è costante nel tempo, si può scrivere

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) = +\mu \underbrace{G m_1 m_2}_{-f(r) \cdot r^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left(\mu G m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

da cui

$$\frac{d}{dt} \left[(\vec{p} \times \vec{L}) - \mu G m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r} \right] = 0$$

(11)

Donque la quantita' tra parentesi e' costante nel tempo e viene detto vettore di Laplace-Rouge e Leuz:

$$\vec{L}_R = (\vec{p} \times \vec{L}) - \mu G m_1 m_2 \frac{\vec{e}}{r}$$

questo vettore risulta giacere nel piano dell'orbita avendo $\vec{L}_R \cdot \vec{L} = 0$

Calcoliamo il prodotto scalare di \vec{e} per \vec{L}_R :

$$\vec{e} \cdot \vec{L}_R = \vec{e} \cdot \left((\vec{p} \times \vec{L}) - \mu G m_1 m_2 \frac{\vec{e}}{r} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{e} \cdot (\vec{p} \times \vec{L})$$

permutando $\vec{L} \cdot (\vec{e} \times \vec{p}) = \vec{L} \cdot \vec{L} = L^2$

$$r \cdot \vec{L}_R \cdot \cos(\varphi) = L^2 - \mu G m_1 m_2 r$$

↪ angolo tra " \vec{e} " ed " \vec{L}_R "

Da questa espressione e' possibile calcolare $e(\varphi)$, ovvero avere un'altra espressione per determinare l'orbita del punto materiale:

$$e = \frac{L^2 \rightarrow a(1-e^2)}{G(m_1+m_2)r^2} \cdot \frac{1 + \vec{L}_R \cdot \cos(\varphi)}{G(m_1+m_2)r^2}$$

↪ $1 + e \cdot \cos(\varphi)$

dall'interpretazione dei termini di questa equazione si ricava:

$$e = \frac{L_R}{G(m_1+m_2)r^2}$$

Dunque abbiamo un vettore che è costante, sembrerebbe che stiamo introducendo altre 3 costanti del moto, che sarebbero un po' troppe, in realtà:

- 1) \vec{L}_R è sempre nel piano dell'orbita;
- 2) il modulo di \vec{L}_R si può esprimere in funzione di parametri noti

$$L_R = e \cdot G \cdot (m_1 + m_2) p^2 \quad \text{ma si ricordi che:}$$

$$e = \sqrt{2\bar{E} \left(\frac{\bar{L}}{GM} \right)^2 + 1}$$

da cui:

$$\begin{aligned} L_R^2 &= e^2 \cdot G^2 (m_1 + m_2)^2 p^4 = \\ &= \left(2\bar{E} \left(\frac{\bar{L}}{GM} \right)^2 + 1 \right) \cdot \underbrace{G^2 (m_1 + m_2)^2}_{M^2} p^4 = \\ &= 2pEL^2 + \left(G(m_1 + m_2) p^2 \right)^2 \end{aligned}$$

Queste 2 condizioni determinano il passaggio da 3 parametri ad 1.

Ora se alla forza di Newton aggiungiamo un termine perturbativo $\delta f(r)$ accade che E ed \vec{L} si conservano ma \vec{L}_R non più.

Ricordando la definizione di \vec{L}_R avremo:

$$\frac{d\vec{L}_R}{dt} = -\mu \delta f(r) \vec{e}^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{e}}{r} \right)$$

Se il termine perturbativo è piccolo \vec{L}_R ruoterà lentamente nel piano dell'orbita e si avrà un'ellisse che precessa.

Prendiamo un esempio notevole: $\delta f(r) = -\frac{\beta}{r^4}$
 (è un termine correttivo che viene dalla teoria della relatività generale), sostituendo:

$$\frac{d\vec{L}_R}{dt} = \frac{\mu\beta}{r^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{e}}{r} \right)$$

L'idea è quella di integrare su di un periodo in modo da valutare l'effetto sull'orbita

si integra per parti visto che ho una derivata a destra.

Il 1° termine dell'integrale per parti va via perché i valori vanno calcolati a $\varphi=0$ e $\varphi=2\pi$, il secondo sarà:

$$\Delta \vec{L}_R |_{\text{orbita}} = - \int_0^T \frac{\mu\beta}{r} \cdot \vec{e} \left(-\frac{2}{r^3} \right) dt =$$

$$= 2\mu\beta \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}}{r^4} \frac{dr}{d\varphi} \cdot d\varphi$$

si pone con un cambio di variabile $dt = \frac{dr}{d\varphi} \cdot d\varphi$

mettiamo l'asse delle x in modo che al tempo $t=0$ \vec{L}_R sia lungo "x", le 2 componenti della sua variazione saranno:

$$\Delta \mathcal{L}_{R,x} |_{\text{orbita}} = \int_0^{2\pi} \frac{e \cos \varphi}{r^4} \frac{dr}{d\varphi} \cdot d\varphi$$

$$\Delta \mathcal{L}_{R,y} |_{\text{orbita}} = \int_0^{2\pi} \frac{e \sin \varphi}{r^4} \frac{dr}{d\varphi} \cdot d\varphi$$

se si sostituisce ad $e(\varphi)$ la relazione trovata

$$e(\varphi) = \frac{L^2}{\int_0^{\varphi} \cos \varphi + \mu G M_1 M_2}$$

si ottiene che la perturbazione lungo "x" è nulla, mentre è presente una perturbazione lungo "y".

$$\Delta \Theta = \frac{\Delta \mathcal{L}_{R,y} |_{\text{orbita}}}{\mathcal{L}_R} = \frac{2\pi \beta G M}{L^4 \mu}$$

Questi fenomeni sono responsabili della cosiddetta precessione del perielio (già nota nel 1700), dovuta alle perturbazioni introdotte dagli altri pianeti nell'ambito del problema dei 2 corpi. L'unico effetto che non si riuscì a spiegare era il valore numerico per Mercurio che era stato misurato $43''$ maggiore del previsto. Si suppose la presenza di un pianeta interno non ancora identificato finché Einstein spiegasse tale osservazione nell'ambito della sua teoria generale della relatività.

Una ultima osservazione riguarda l'eccentricità delle orbite chiuse nei campi di forze centrali.

Esistono infatti solo 2 tipi di potenziali che forniscono traiettorie chiuse, quello gravitazionale $\propto \frac{1}{r}$, e quello associato alla forza di Hooke $\propto r^2$ (si parla di potenziale armonico ed anche in tal caso si può definire un vettore di Laplace - Runge - Lentz). In tutti gli altri casi le orbite sono "rosette" intorno al centro di massa e non si chiudono.

Campo gravitazionale di una massa estesa

Finora abbiamo studiato come si comporta un corpo esteso in un campo gravitazionale centrale generato da un oggetto puntiforme. Tuttavia gli oggetti che generano campi gravitazionali sono estesi, inoltre spesso è utile trattare un gran numero di oggetti vicini che occupano un certo volume come un unico oggetto avente densità di massa opportunamente calcolata. Quest'ultimo approccio rinuncia a studiare l'effetto di eventuali collisioni tra 2 masse, per cui è adatto nel caso di sistemi non collisionari, ovvero

sistemi come le galassie, in cui il tempo medio tra due urti è paragonabile al tempo vita del sistema (il sistema solare è "non collisionare", si muove lungo la sua orbita intorno al centro galattico senza che siano previste collisioni)

Supponiamo che una galassia possa essere trattata con una funzione densità di massa a simmetria sferica $\rho(r)$, in tal caso il campo ad una certa distanza si può calcolare con il teorema di

Gauss: $\vec{g} = -G \frac{m(r)}{r^3} \vec{e}$ → curva all'interno di una sfera di raggio "r"

facciamo un esempio con una legge di tipo

esponenziale: $\rho(r) = \rho_0 e^{\lambda r}$

$m(r) = \frac{4\pi}{n+3} \rho_0 e^{\lambda r} r^{n+3}$ (si noti che senza modificare la legge per piccoli raggi deve essere $n > -3$)

Dunque il vettore campo gravitazionale sarà:

$\vec{g} = -G \frac{4\pi}{n+3} \rho_0 e^{\lambda r} \vec{e}$ la 2^a legge di Newton proiettata sull'axe radiale darà così:

$m \ddot{e} = m \vec{g} \xrightarrow{\text{proiezione}} \ddot{e} = -\frac{4\pi G}{n+3} e^{\lambda r}$

Si consideri ora un corpo che si muove di moto circolare uniforme in questo campo. L'unica accelerazione che possiede è radiale ed è pari all'accelerazione centripeta v^2/r , per cui risulta:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{4\pi G}{n+3} \rho_0 r^{n+1}, \text{ da cui il calcolo di "v"}$$

$$v = \sqrt{\frac{4\pi G}{n+3} \rho_0 r^{n+2}}$$

nel bulge (nucleo) della nostra Galassia

$n=0$, ovvero la densità

è costante: $r^{n+2} = r^2$, che

portato fuori della radice da "r"

Dunque nel nucleo la velocità dei corpi in rotazione aumenta linearmente con la distanza, che è ciò che si osserva. Fuori dal nucleo il resto della materia risulta essere confinata sul disco esterno per cui ci aspetteremo che la velocità seguisse la legge kepleriana $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ → *misura nel nucleo*

Quindi si osserva che la velocità non si modifica, resta costante come se "n" fosse uguale a -2.

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{r^2}$$

tale andamento non corrisponde a nessuna delle strutture luminose note.

Ci costringe quindi a supporre la presenza di
una non rilevata che chiamiamo materia
oscura (per la legge con $n = -2$ si parla di sferoide
isotermo singolo \rightarrow se $v = \text{cost}$ anche $T = \text{cost.}$, inoltre
presenta singolarità in $r = 0$ e la massa diverge
per $r \rightarrow +\infty \dots$ è evidente che si tratti di un caso
particolare di una legge più generale)

Si osserva per chiudere che il problema è ben più
complicato di quello qui presentato, la galassia non
ha una simmetria sferica e il potenziale non è
del tipo $\frac{M}{r}$ per cui le orbite delle stelle non
sono chiuse, ma delle "cosette" non periodiche.
Va inoltre considerato il moto oscillatorio nella
direzione ortogonale al piano galattico, anche il
Sole non compie un'orbita perfettamente circolare.
L'osservazione che le orbite delle stelle vicine
al centro della Galassia si muovono su
orbite ellittiche ci indica che al suo centro
è presente un buco nero di milioni di
massa solare.

(49)

Elementi orbitali

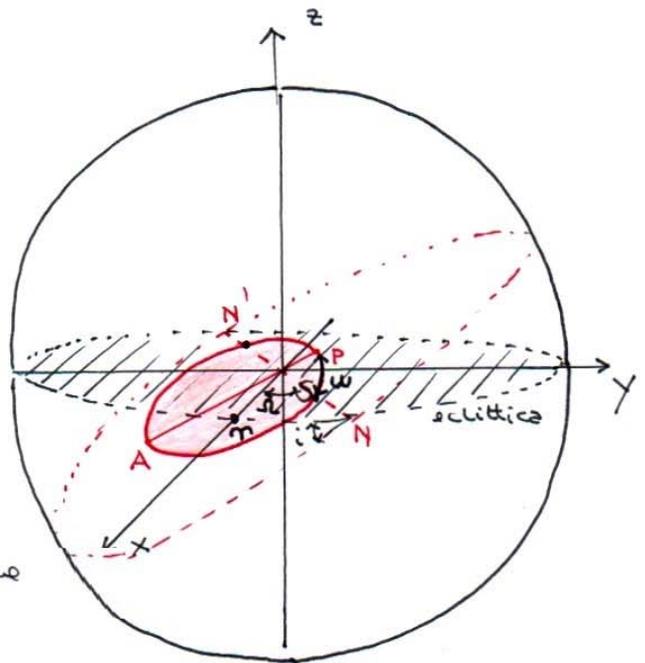
Abbiamo capito che due oggetti che interagiscono per via della forza di gravità si muovono lungo una curva conica. Le uniche curve chiuse possibili sono ellissi che sono univocamente specificate dal semiasse maggiore " a " e dall'eccentricità " e ". Tali due parametri possono essere considerati i primi due elementi orbitali essenziali per identificare l'orbita di un qualsiasi corpo nel campo gravitazionale di un altro oggetto.

Questi elementi basterebbero se tutti i pianeti orbitassero nello stesso piano, purtroppo ciò non è verificato ed è quindi necessario identificare il piano dell'orbita in un sistema di riferimento a noi familiare. C'è bisogno, inoltre, una volta individuato il piano orbitale di specificare l'orientamento del semiasse maggiore.

L'idea è quella di fare riferimento al piano dell'eclittica (cioè al piano su cui la terra ruota intorno al sole) con asse z orientato perpendicolarmente ad esso, asse x 1

puntato al punto d'ariete Υ e l'asse y perpendicolare ad entrambi.

Nella figura a lato in nero tratteggiato è evidenziato il piano dell'eclittica, in rosso la traiettoria del corpo la quale in parte è "sopra" ed in parte sotto il piano dell'eclittica. L'intersezione tra piano dell'eclittica



e quello su cui si muove l'oggetto è la retta dei nodi $\overline{NN'}$ (N nodo ascendente, N' nodo discendente). Gli elementi da assegnare per individuare la traiettoria del corpo sono:

- l'angolo Ω tra il nodo ascendente (punto in cui la traiettoria passa da "z" negativi a positivi) e il punto d'ariete Υ . Si tratta di un angolo tra 2 rette che sono nel piano dell'eclittica (ΥS ed NS) e si parla di longitudine del nodo ascendente

- l'angolo i , formato dal piano dell'orbita con l'eclittica. Tale angolo serve perché una volta assegnato Ω si è assegnata la linea dei nodi, tuttavia ci sono ∞ piani che passano per tale linea, l'angolo " i " permette di univocarlo. Questo angolo si dice inclinazione. Se $i = 0$ il piano su cui si muove il corpo corrisponde a quello dell'eclittica, se $i = 90^\circ$ il piano è perpendicolare all'eclittica.

- l'angolo ω , formato dalla linea dei nodi e dal semiasse maggiore dell'orbita. Tale angolo serve, una volta individuato il piano dell'orbita, a definire la direzione del semiasse maggiore. Tale angolo che è definito nel piano dell'orbita si dice argomento del perielio. Se due orbite si distinguono solo per 180° nell'angolo ω vuol dire che le orbite presentano afelio e perielio invertiti.

Noti " a ", " e ", " Ω ", " i " e " ω " la traiettoria del corpo è perfettamente univocata, per poter però trovare la sua posizione ad un tempo (3)

generico è necessario, come abbiamo già discusso nel problema di Keplero, conoscere l'epoca di passaggio al perielio, τ . Ai fini della caratterizzazione del moto, ai cinque numeri precedenti va aggiunto τ , tali 6 parametri si dicono elementi orbitali (si ricorda che il periodo del moto si può ricavare attraverso la 3^a legge di Keplero dal semiasse maggiore, per questo esso non è un elemento orbitale).

A volte invece di assegnare ω , argomento del perielio, si assegna " $\bar{\omega} = \Omega + \omega$ " e si parla di longitudine del perielio (si sommano due angoli in piani distinti), mentre al posto dell'epoca al perielio si assegna " L " longitudine ad un tempo fissato (nelle tabelle NASA il 1^o gennaio 2000 UTC 12:00).

Qualsiasi descrizione degli elementi orbitali non può non tenere conto delle perturbazioni che essi subiscono. Per avere delle effemeridi (previsioni delle posizioni dei pianeti) che siano attendibili per un arco di tempo di decenni non è possibile utilizzare neppure le approssimazioni al 1^o ordine, ma è necessario (4)

risolvere numericamente le equazioni che le caratterizzano.

Avendo a disposizione la tabella degli elementi orbitali dei pianeti si osserva che le traiettorie hanno piccoli valori di eccentricità e di inclinazione (i valori mercurii si misurano per Mercurio), mentre per quanto attiene alla longitudine del perielio non vi è una direzione preferenziale. Valori maggiori per "e" ed "i" caratterizzano la traiettoria di Plutone (declinato a pianeta nano dall'UAI) e quella di oggetti come asteroidi e comete che risentono delle perturbazioni degli oggetti più grandi.

Andiamo ora al problema fondamentale. Viene scoperto un nuovo oggetto celeste, si pone il problema in base alle osservazioni di calcolare l'orbita. Le osservazioni riguardano istanti di tempo ravvicinati in cui il corpo appare spostato nella volta celeste.

Per fare un esempio un oggetto che si trovi a 2AU con velocità trasversa di 21 km/sec presenta un moto proprio pari a:

(5)

$$\mu = \frac{21 \text{ km/s}}{2 \text{ AU}} \approx 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ rad/sec} = 1,75''/\text{h}$$

tale distanza
angolare è
facilmente
rilevabile con
gli attuali strumenti

L'operazione di determinazione dell'orbita deve essere fatta in tempi brevi in modo da "non perdere" l'oggetto o di "non confonderlo" con altri oggetti. Purtroppo tale operazione è molto complicata e caratterizzata da un elevato grado di incertezza, ci sono infatti poche osservazioni e troppo ravvicinate per ottenere un grado di precisione accettabile. Ciò che si fa, allora, è la determinazione di un'orbita di prima approssimazione che consenta di ritrovare l'oggetto nei giorni (nelle notti) successivi. Le successive osservazioni consentono di "raffinare" progressivamente l'orbita di 1° tentativo. Vi sono due metodi per calcolare l'orbita preliminare che si devono a Laplace e Gauss, entrambi basati su approssimazioni del 2° ordine della conica passante per le osservazioni note.

Vedremo in dettaglio il metodo di Laplace:

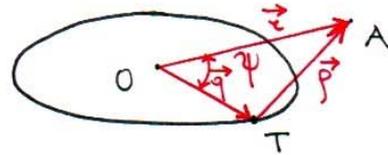
(6)

Metodo di Laplace - fase 1 (dalle osservazioni alle grandezze fisiche di base)

Prendiamo in considerazione la posizione del generico corpo celeste rispetto al Sole e alla Terra

$$\vec{c} = \vec{q} + \vec{p}$$

posizione del corpo rispetto al Sole



L'osservazione di tale oggetto A ha fornito in diversi istanti di tempo t_1, \dots, t_m differenti coordinate equatoriali

α_i, δ_i (ascensione retta e declinazione)

Prima di tutto si calcola un tempo medio:

$$t_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^m t_i$$

con i dati a disposizione si effettua un "fit" quadratico su ascensione retta e declinazione

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \dot{\alpha}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{\alpha}_0 (t - t_0)^2$$

$$\delta(t) = \delta_0 + \dot{\delta}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{\delta}_0 (t - t_0)^2$$

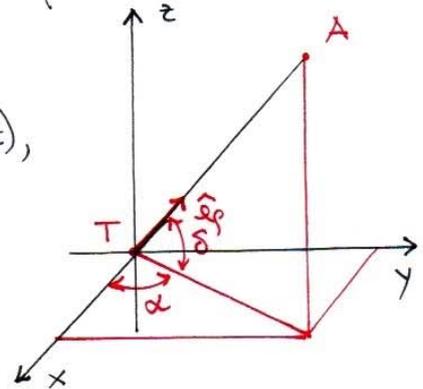
i 6 coefficienti si possono ottenere con il metodo dei minimi quadrati.

Queste funzioni hanno come scopo il calcolo del vettore terra-oggetto in funzione del tempo

(7)

Avendo le coordinate equatoriali, le componenti di tale vettore saranno scritte rispetto ad un riferimento cartesiano centrato nel sole con asse "x" che punta il punto d'Ariete, l'asse "z" che punta al nord celeste e l'asse "y" nel piano equatoriale perpendicolare ai primi due. In particolare risulta:

$$\hat{e}_p(t) = \begin{bmatrix} \cos \delta(t) \cos \alpha(t), \\ \cos \delta(t) \sin \alpha(t), \\ \sin \delta(t) \end{bmatrix}$$



attraverso questo elemento si calcola tutto ciò che serve per inizializzare il metodo di Laplace:

- si può valutare il vettore medio terra-oggetto

$$\vec{e}_p = \hat{e}_p(t_0)$$

- la derivata del vettore se calcolata in modulo nell'istante "t₀" fornisce il moto proprio dell'oggetto:

$$\mu \equiv \left| \frac{d\hat{e}_p}{dt} \Big|_{t_0} \right|$$

- la derivata nel tempo calcolata in t₀ del vettore \hat{e}_p fornisce proprio il vettore moto proprio il cui vettore è quindi:

$$\hat{e}_s \equiv \frac{1}{\mu} \frac{d\hat{e}_p}{dt} \Big|_{t_0}$$

evidentemente \hat{e}_p
ed \hat{e}_s sono \perp
 $\hat{e}_p \cdot \hat{e}_s = 0$

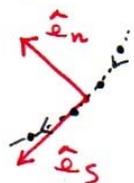
(8)

Da queste definizioni segue che:

$$\frac{d\hat{e}_p}{dt} = \rho \hat{e}_s$$

A questo punto noti due versori possiamo completare una terna ortogonale definendo:

$$\hat{e}_n = \hat{e}_p \times \hat{e}_s$$



vista dal cielo
(il vettore \hat{e}_p è normale al piano essendo lungo la congiungente terra-oggetto)

- Passiamo alla derivata seconda del versore \hat{e}_p ,

sappiamo che: $\frac{d\hat{e}_p}{dt} = \rho \hat{e}_s$ da cui svolgendo la derivata seconda

$$\frac{d^2 \hat{e}_p}{dt^2} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \hat{e}_s + \rho \cdot \frac{d\hat{e}_s}{dt}$$

$$\rho = \left| \frac{d\hat{e}_p}{dt} \right| = \sqrt{\frac{d\hat{e}_p}{dt} \cdot \frac{d\hat{e}_p}{dt}} \rightarrow \dot{\rho} = \frac{1}{2} \frac{2 \frac{d^2 \hat{e}_p}{dt^2} \cdot \frac{d\hat{e}_p}{dt}}{\sqrt{\frac{d\hat{e}_p}{dt} \cdot \frac{d\hat{e}_p}{dt}}} = \frac{1}{\rho} \frac{d^2 \hat{e}_p}{dt^2} \cdot \frac{d\hat{e}_p}{dt}$$

$$= \left. \frac{d^2 \hat{e}_p}{dt^2} \right|_{t_0} \cdot \hat{e}_s$$

$$\frac{d\hat{e}_s}{dt} = -\rho \hat{e}_p + \rho \kappa \hat{e}_n \quad \text{con } \kappa = \frac{1}{\rho^2} \hat{e}_n \cdot \left. \frac{d^2 \hat{e}_p}{dt^2} \right|_{t_0}$$

attraverso questi sviluppi si ottiene che

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\rho^2 \hat{e}_p + \dot{\rho} \hat{e}_s + \rho^2 \kappa \hat{e}_n$$

accelerazione del moto proprio
curvatura geodetica

- ultimo elemento che serve alla fase 1 è la posizione e la velocità della terra al tempo "t₀", informazione che può essere ricavata da effermeridi ufficiali

Metodo di Laplace - fase 2 (dalle grandezze di base a posizione e velocità)

Scriviamo la derivata

della posizione geocentrica: $\vec{r} = r \hat{e}_r$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{e}_r + r \frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\nu} \hat{e}_s$$

eseguiremo ora la derivata seconda

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\nu} \hat{e}_s + r \ddot{\nu} \hat{e}_s + r \dot{\nu} \frac{d\hat{e}_s}{dt} =$$

$$= \ddot{r} \hat{e}_r + 2 \dot{r} \dot{\nu} \hat{e}_s + r \ddot{\nu} \hat{e}_s - r \dot{\nu}^2 \hat{e}_r + r \dot{\nu}^2 \hat{e}_n$$

questa stessa derivata seconda può essere espressa mediante la 2^a legge della dinamica:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \frac{d^2\vec{q}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r} + \frac{GM}{q^3} \vec{q}$$

si considera la sola interazione di 2 corpi con il sole.

Ora si effettua una osservazione

importante: \vec{r} non ha alcuna componente lungo \hat{e}_n
(perché $\hat{e}_n = \hat{e}_r \times \hat{e}_s$)

(10)

per cui $\vec{p} - \hat{e}_n = 0 \rightarrow (\vec{e} - \vec{q}) \cdot \hat{e}_n = 0$

$$\vec{e} \cdot \hat{e}_n - \vec{q} \cdot \hat{e}_n = 0$$

$$\vec{e} \cdot \hat{e}_n = \vec{q} \cdot \hat{e}_n$$

che vuol dire che \vec{e} e \vec{q} hanno la stessa componente lungo \hat{e}_n

Abbiamo capito che risulta:

$$\ddot{\rho} \hat{e}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \hat{e}_s + \rho \dot{\varphi}^2 \hat{e}_s - \rho \dot{\varphi}^2 \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi}^2 k \hat{e}_n = GM \left(\frac{\vec{q}}{q^3} - \frac{\vec{e}}{r^3} \right)$$

se questi 2 settori sono uguali saranno anche la stessa componente lungo \hat{e}_n :

$$\rho \dot{\varphi}^2 k = GM \left(\frac{\vec{q}}{q^3} \cdot \hat{e}_n - \frac{\vec{e}}{r^3} \cdot \hat{e}_n \right) = \text{ma } \vec{e} \cdot \hat{e}_n = \vec{q} \cdot \hat{e}_n$$

le altre componenti sono nulle perché $\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_n = \hat{e}_s \cdot \hat{e}_n = 0$

$$= GM \vec{q} \cdot \hat{e}_n \left(\frac{1}{q^3} - \frac{1}{r^3} \right) =$$

$$= GM q \cdot \hat{q} \cdot \hat{e}_n \left(\frac{1}{q^3} - \frac{1}{r^3} \right) =$$

$$= GM q \cdot \hat{q} \cdot \hat{e}_n \cdot \frac{1}{q^3} \left(1 - \frac{r^3}{q^3} \right)$$

questa quantità viene definita C

tutto questo termine si porta a sinistra.

$$\frac{\rho \dot{\varphi}^2 k q^3}{GM q \cdot \hat{q} \cdot \hat{e}_n} = 1 - \frac{r^3}{q^3}$$

$$\rightarrow \boxed{C \cdot \rho = 1 - \frac{r^3}{q^3}} \quad (*)$$

Ora detto ψ l'angolo tra le direzioni di \hat{q} e \hat{p} ,

$$\text{ovvero } \cos \psi = \hat{q} \cdot \hat{p}$$

è possibile scrivere il teorema di Carnot da cui:

$$c^2 = p^2 + q^2 + 2pq \cos \psi$$

questa relazione può essere utilizzata per eliminare "p" dalla equazione (*) di pagina precedente:

$$\frac{c^2 p^2}{q^2} = \left(1 - \frac{q^3}{c^3}\right)^2$$

dal teorema di Carnot

$$p^2 = c^2 - q^2 - 2pq \cos \psi$$

$$p^2 = \frac{q^2}{c^2} \left(1 - \frac{q^3}{c^3}\right)^2$$

$$p = \left(\frac{c}{q}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{q^3}{c^3}\right)$$

ricriviamo il teorema di Carnot con i nuovi termini:

$$\frac{q^2}{c^2} \left(1 - \frac{q^3}{c^3}\right)^2 = c^2 - q^2 - 2 \frac{q}{c} \left(1 - \frac{q^3}{c^3}\right) \cdot q \cdot \cos \psi$$

$$\frac{q^2}{c^2} \left(1 - 2 \frac{q^3}{c^3} + \frac{q^6}{c^6}\right) = c^2 - q^2 - \frac{2q^2}{c^2} (c^3 - q^3) \cdot \cos \psi$$

$$\frac{c^5 - c^2 q^2 c^3 - 2q^2 c^3 \cos \psi + 2q^5 \cos \psi}{c^2 c^3} = \frac{q^2 c^6 - 2q^5 c^3 + q^8}{c^2 c^6}$$

$$\frac{c^2 c^8 - c^2 q^2 c^6 - 2c^2 q^2 \cos \psi c^6 + 2c^2 q^5 \cos \psi c^3}{c^2 c^6} =$$

portiamo tutto
allo stesso
denominatore

si semplifica
il denominatore

$$= \frac{q^2 c^6 - 2q^5 c^3 + q^8}{c^2 c^6}$$

$$C^2 r^8 - q^2 (C^2 + 2C \cos \psi + 1) r^6 + 2q^5 (C \cos \psi + 1) r^3 - q^8 = 0$$

l'unica incognita di questa equazione è "r".

Infatti conosciamo la posizione "q" della Terra, l'angolo ψ tra le direzioni di \vec{f} e \vec{q} , e possiamo calcolare il valore di C visto che dal fit delle osservazioni si valuta ρ , κ e il versore normale \hat{e}_n .

Il polinomio di ottavo grado che ha risolto ha alcune soluzioni negative e complesse che vanno scartate, quelle positive vanno da 1 a 3 e vanno tutte considerate perché solo ulteriori informazioni possono discriminare tra esse.

Calcolato "r" è possibile ricavare "f" dal teorema di Carnot, e quindi l'intero settore \vec{f} . Fatto ciò si proietta la 2^a eq. della dinamica lungo \hat{e}_s , infatti anche lungo \hat{e}_s i vettori \vec{q} ed \vec{r} hanno la stessa componente:

$$2\dot{f}\rho + f\dot{\rho} = GMq\hat{q} \cdot \hat{e}_s \left(\frac{1}{q^3} - \frac{1}{r^3} \right)$$

questa equazione consente di calcolare \dot{f} che è l'unica quantità che manca per calcolare

La velocità geocentrica $\dot{\vec{p}} = \dot{p} \hat{e}_p + p \dot{\nu} \hat{e}_s$.

Metodo di Laplace - fase 3 (calcolo degli elementi orbitali)

Trovati \vec{p} e $\dot{\vec{p}}$ è immediato calcolare \vec{r} ed $\dot{\vec{r}}$ visto che conosciamo il moto della Terra e quindi i vettori \vec{q} e $\dot{\vec{q}}$. La conoscenza di questi vettori ci basta per risolvere gli elementi orbitali, infatti dall'espressione della velocità orbitale:

$$v^2(r) = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

questa equazione, avendo nota la velocità, consente il calcolo di "a".

Inoltre è possibile calcolare il momento angolare specifico $\vec{L} = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \sqrt{GMa(1-e^2)}$ in cui

l'unica incognita è l'eccentricità "e".

Ci serve ora definire il polo nord eclittico, ricordando che il riferimento utilizzato punta l'asse "z" verso il nord celeste, è necessaria una rotazione pari ad "ε" (obliquità dell'eclittica) verso

le "y" negative: $\hat{k} = -\sin(\epsilon) \cdot \hat{y} + \cos(\epsilon) \cdot \hat{z}$

Ci serve ora un vettore normale al piano orbitale dell'oggetto il che è possibile considerando il vettore posizione e velocità di quest'ultimo che facciamo entrambi nel piano orbitale:

$$\hat{k} = \frac{\vec{r} \times \dot{\vec{r}}}{|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|}$$

(rispetto a questo vettore il corpo si muoverà in verso antiorario)

Con i due vettori normali al piano dell'orbita dell'oggetto e

dell'eclittica è immediato il calcolo dell'inclinazione

$$\cos(i) = \hat{k} \cdot \hat{k}'$$

Si definisce poi il seguente vettore:

$$\hat{\Omega} = \frac{\hat{k} \times \hat{k}'}{\sin(i)}$$

si osserva che si tratta di un vettore perché lo sono sia \hat{k} che \hat{k}' e dal prodotto vettoriale viene un seno dell'angolo compreso che si cancella con il denominatore

$\hat{\Omega}$ deve essere normale sia a \hat{k} che a \hat{k}' ovvero deve appartenere sia al piano dell'eclittica che al piano orbitale, il che significa che deve trovarsi lungo la retta di nodi (disegnando ci si accorge che punta verso

il nodo ascendente).

Il versore dell'asse "x" iniziale punta verso il punto di Ariete, per cui: $\hat{\Omega} \cdot \hat{x} = \cos \Omega$

Nel calcolare l'arcocoseno

c'è da stare attenti ai segni,

è avvenuto, infatti, lo stesso

segno di $\hat{\Omega} \cdot \hat{y}$ che ci dice il quadrante corretto in cui si trova il nodo ascendente.

longitudine
del nodo
ascendente

Ora utilizziamo l'equazione della conica in forma polare:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cdot \cos \varphi}$$

che permette con riferimento al tempo "t" di calcolare l'anomalia

oera φ .

Purtroppo anche qui con l'arcocoseno si ha un'ambiguità relativa al segno. Tutto dipende da se "e" sta aumentando ($0 < \varphi < \pi$) o sta diminuendo ($-\pi < \varphi < 0$), per verificarlo basta studiare il segno del prodotto scalare $\vec{e} \cdot \dot{\vec{e}}$, se è positivo l'oggetto si sta allontanando.

L'angolo "θ" tra la posizione dell'asteroide e il nodo ascendente si ottiene con il prodotto

scalare $\hat{\Omega} \cdot \hat{e}$, anche qui c'è ambiguità, che in questo caso si può risolvere verificando, mediante il prodotto scalare $\hat{k} \cdot \hat{e}$, se l'oggetto è sotto o sopra il piano dell'eclittica, in particolare:

$$\Theta = \begin{cases} \arccos(\hat{\Omega} \cdot \hat{e}) & \text{se } \hat{k} \cdot \hat{e} > 0 \\ -\arccos(\hat{\Omega} \cdot \hat{e}) & \text{se } \hat{k} \cdot \hat{e} < 0 \end{cases}$$

L'argomento al perielio si ottiene sottraendo alla quantità appena calcolata l'anomalia vera:

$$\omega = \Theta - \varphi$$

Il periodo orbitale si ricaverà dalla terza legge di Keplero:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

e per chiudere sfruttando il legame tra anomalia media, eccentrica e vera si passa al calcolo dell'epoca al perielio:

$$\cos E = \frac{e + \cos \varphi}{1 + e \cdot \cos \varphi}$$

$$M = E - e \cdot \sin(E) = 2\pi \frac{(t_0 - \tau)}{T} \quad \text{da cui calcolo } \tau$$

L'ultima osservazione che si può fare sul metodo è che esso deve partire almeno da 17

tre osservazioni, le quali, però, devono essere abbastanza distanziate affinché la costante χ sia osservabile, ma non troppo per non vanificare l'approssimazione quadratica.

L'orbita trovata è una approssimazione utile nelle notti successive ad effettuare ulteriori misure. L'idea è quella di abbandonare l'approssimazione quadratica e di aggiustare progressivamente i parametri orbitali cercando di minimizzare la quantità χ^2 ovvero del quadrato dei residui:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{|\hat{p}_i - \hat{p}(a, e, i, \Omega, \omega, \tau, t_i)|^2}{\sigma_i^2}$$

Sistemi binari

La soluzione del problema dei due corpi non riguarda solo gli oggetti del sistema solare ma anche tutti i sistemi di stelle binarie.

Poiché in tal caso le masse sono simili ogni stella percorre una traiettoria ellittica avente come fuoco il baricentro del sistema. Vale così tutta la trattazione già vista in cui \vec{e} è la posizione della 2^a massa rispetto alla 1^a per cui in un sistema baricentrico risulta:

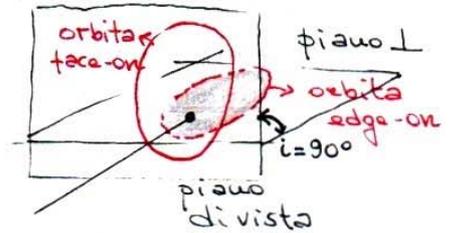
$$\vec{e}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{e} \quad ; \quad \vec{e}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{e}$$

La novità nella descrizione del moto è l'impossibilità di utilizzare come riferimento il piano dell'eclittica, che non ha più alcuna utilità, si usa invece il cosiddetto piano del cielo, cioè un piano ortogonale alla linea di vista con l'origine nella stella primaria.

Cerchiamo di capire come si modificano gli elementi orbitali in questo modo sistema:

1

- l'inclinazione è l'angolo tra il piano orbitale e il piano del cielo, esso risulta 0° per un'orbita che si vede perfettamente di faccia, "face-on", tale 90° per un'orbita vista di taglio, "edge-on".

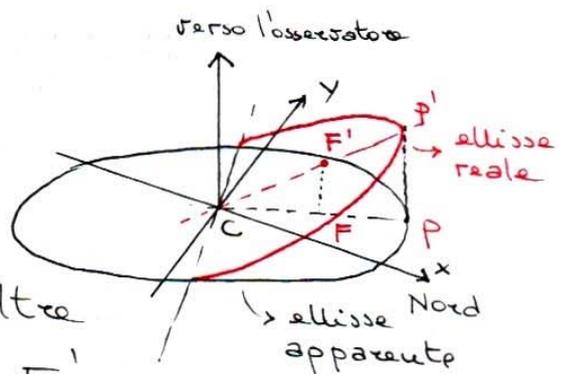


- La longitudine di nodo non è più valutata con riferimento al punto di Ariete, ma facendo capo alla direzione che dalla stella primaria punta al nord celeste ruotando in senso antiorario.
- il semiasse maggiore è sostituito dal semi-asse maggiore angolare, ciò perché non conosciamo le distanze e quindi non possiamo tradurre le distanze angolari in distanze reali.

Agli elementi orbitali c'è da aggiungere il periodo, visto che non conosciamo le masse in gioco esso diventa un parametro indipendente che può anzi aiutarci a determinare le masse.

Si osserva che se l'orbita della stella secondaria rispetto a quella primaria è un'ellisse la sua proiezione sul piano del cielo è ancora un'ellisse se che si dice ellisse apparente. Questa ellisse apparente non conserva la posizione dei fuochi (si pensi al fatto che la circonferenza proiettata diventa una ellisse) e non conserva l'orientazione dei semiassi.

La proiezione del periastro P' nel punto P non si trova sul semiasse maggiore, inoltre F proiezione di un fuoco F' non è un fuoco. Il centro dell'ellisse C si conserva e così anche l'eccentricità essendo



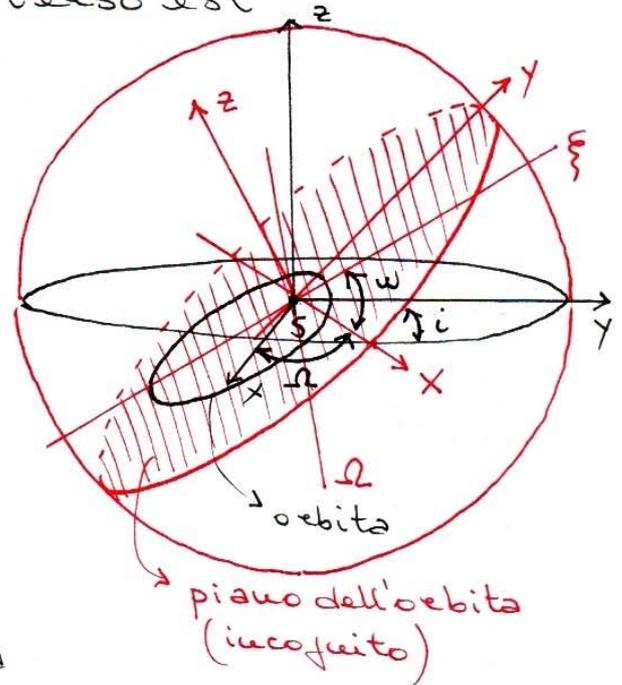
$$\frac{\overline{CF}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{CF'}}{\overline{CP'}} = e$$

Cerchiamo ora di capire come ottenere gli elementi orbitali di un sistema binario da un set di "n" osservazioni. Consideriamo le coordinate sul piano celeste che può essere visto come un pezzo di sfera celeste ben approssimabile con un piano visto da

piccolezza dell'angolo.

Si introduce un sistema di riferimento centrato nella stella primaria S : l'asse "z" punta all'osservatore, l'asse "x" è orientato al nord celeste, l'asse "y" punta verso est

Definiamo un secondo riferimento $X Y Z$, con X corrispondente alla linea dei nodi, ovvero alla retta di intersezione tra i due piani, da Y sul piano reale e normale ad X e Z ortogonale a tale piano.



L'angolo tra x e X è la longitudine di nodo ascendente Ω , l'angolo formato dal periastro con X è l'argomento del periastro w .

Si introduce un terzo sistema di riferimento in cui Z è immutato ma ξ è lungo il periastro

Per la determinazione degli elementi orbitali si utilizza il cosiddetto metodo di Kowalski in cui il 1° passo è il calcolo dell'ellisse

apparente:

$$d) a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 1$$

i coefficienti $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}$ e a_{23} devono essere calcolati in base al numero di osservazioni, almeno pari a 5, effettuando un "fit" ai minimi quadrati

Il passo successivo è mettere questi coefficienti in funzione degli elementi orbitali e poi integrare le equazioni.

Il primo passo è la determinazione delle coordinate del centro dell'ellisse apparente.

Per farlo cerchiamo una traslazione (c_1, c_2) tale da annullare i termini lineari dell'equazione d)

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13} = 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23} = 0 \end{cases}$$

Calcolati c_1 e c_2 l'equazione della retta che passa per centro e fuoco risulta:

$y = \frac{c_2}{c_1} x$, inserendo tale equazione in d) otteniamo un'equazione di 2° grado in "x" che fornisce i valori delle coordinate al periastro e all'apoaastro

Note le coordinate del centro e del periastro è immediato il calcolo dell'eccentricità:

$$e = \frac{CF}{CP} = \frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{\sqrt{(c_1 - x_p)^2 + (c_2 - y_p)^2}}$$

Il passaggio successivo prevede il passaggio dalle coordinate xyz ad XYZ mediante 2 rotazioni che coinvolgono gli elementi orbitali

- rotazione intorno all'asse X dell'angolo " $-i$ ":

$$R_x(-i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & -\sin(i) \\ 0 & \sin(i) & \cos(i) \end{bmatrix}$$

- rotazione intorno all'asse z dell'angolo " $-\Omega$ ":

$$R_z(-\Omega) = \begin{bmatrix} \cos(\Omega) & -\sin(\Omega) & 0 \\ \sin(\Omega) & \cos(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La rotazione complessiva sarà:

$$R_z(-\Omega) \cdot R_x(-i) = \begin{bmatrix} \cos(\Omega) & -\cos(i)\sin(\Omega) & \sin(i)\sin(\Omega) \\ \sin(\Omega) & \cos(i)\cos(\Omega) & -\cos(\Omega)\sin(i) \\ 0 & \sin(i) & \cos(i) \end{bmatrix}$$

per cui vale la seguente relazione tra le coordinate:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_z(-\Omega) \cdot R_x(-i) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{da cui si ottengono le seguenti equazioni}$$

$$\begin{cases} x = X \cos(\Omega) - Y \sin(\Omega) \cos(i) + Z \sin(\Omega) \sin(i) \\ y = X \sin(\Omega) + Y \cos(\Omega) \cos(i) - Z \cos(\Omega) \sin(i) \\ z = + Y \sin(i) + Z \cos(i) \end{cases}$$

Queste relazioni si sostituiscono nell'equazione 1) imponendo $Z=0$ (visto che tutti i punti della traiettoria reale presentano tale valore di coordinata) si ottiene la seguente equazione:

$$(2) \quad \left(a_{11} \cos^2(\Omega) + a_{12} \sin(2\Omega) + a_{22} \sin^2(\Omega) \right) X^2 + \left(-a_{11} \sin(2\Omega) + 2 a_{12} \cos(2\Omega) + a_{22} \sin(2\Omega) \right) \cos(i) X Y + \left(a_{11} \sin^2(\Omega) + -a_{12} \sin(2\Omega) + a_{22} \cos^2(\Omega) \right) \cos^2(i) Y^2 + 2 \left(a_{13} \cos(\Omega) + a_{23} \sin(\Omega) \right) X + 2 \left(-a_{13} \sin(\Omega) + a_{23} \cos(\Omega) \right) \cdot \cos(i) = 1$$

Questa stessa equazione può essere ottenuta a partire da quello nel piano dell'orbita in coordinate ξ (asse diretto al perielio) ed η (asse ortogonale a ξ nel piano dell'orbita):

(4)

$$\left(\frac{\xi + ae}{a^2} \right)^2 + \frac{\eta^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

sede
una traslazione
per mettere l'origine
nel fuoco.

e poi effettuando
una rotazione di
"w" intorno all'
asse z

$$\begin{cases} \xi = X \cos(w) + Y \sin(w) \\ \eta = -X \sin(w) + Y \cos(w) \end{cases}$$

sostituendo nell'equazione dell'ellisse:

$$\begin{aligned} (3) \quad & \left(\frac{X \cos(w) + Y \sin(w) + a \cdot e}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{-X \sin(w) + Y \cos(w)}{a^2(1-e^2)} \right)^2 = \\ & X^2 \left(\frac{\cos^2(w)}{a^2} + \frac{\sin^2(w)}{a^2(1-e^2)} \right) + Y^2 \left(\frac{\sin^2(w)}{a^2} + \frac{\cos^2(w)}{a^2(1-e^2)} \right) + \\ & + XY \left(\frac{2 \sin(w) \cos(w)}{a^2} - \frac{2 \sin(w) \cos(w)}{a^2(1-e^2)} \right) + \\ & + X \left(\frac{2e \cos(w)}{a} \right) + Y \left(\frac{2e \sin(w)}{a} \right) = 1 \end{aligned}$$

Questa equazione deve avere gli stessi cinque coefficienti della (2) e permette così di scrivere 5 equazioni che ordinate e semplificate si presentano nella seguente forma.

Si ricorda in questa sede che $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}$ e a_{23} sono coefficienti noti:

$$\tan(2\Omega) = \frac{2(a_{12} + a_{13}a_{23})}{a_{11} - a_{22} + a_{13}^2 - a_{23}^2}$$

$$\frac{\tan^2(i)}{a^2(1-e^2)} \sin(2\Omega) = -2(a_{12} + a_{13}a_{23})$$

$$\frac{2 + \tan^2(i)}{a^2(1-e^2)} = a_{11} + a_{22} + a_{13}^2 + a_{23}^2$$

$$\frac{e \cos(\omega)}{a \sqrt{1-e^2}} = a_{13} \cos(\Omega) + a_{23} \sin(\Omega)$$

$$\frac{e \sin(\omega)}{a \sqrt{1-e^2}} = (-a_{13} \sin(\Omega) + a_{23} \cos(\Omega)) \cdot \cos(i)$$

Da queste cinque equazioni è possibile calcolare i 5 elementi orbitali Ω, i, ω, a, e .

In particolare dalla prima equazione possiamo calcolare Ω longitudinale del nodo ascendente, il problema è che essa fornisce 4 soluzioni tra 0 e 2π (possibili valori di Ω), tuttavia quelle che differiscono di π hanno solo nodo ascendente e discendente scambiati per cui sono indistinguibili, restano 2 valori tra 0 e π

(9)

Tale indeterminazione viene sciolta semplicemente guardando al segno del 2° termine della 2ª equazione: $-2(a_{12} + a_{13} a_{23})$ se tale segno è positivo $\sin(2\Omega) > 0$ e quindi 2Ω è compreso tra 0 e π , da cui $0 \leq \Omega \leq \frac{\pi}{2}$, in caso sia negativo $\frac{\pi}{2} \leq \Omega \leq \pi$ il che consente di individuare un'unica soluzione per Ω .

Dalla seconda equazione si calcola "i", la 4ª e la 5ª insieme ci forniscono l'argomento del periastro "w" senza ambiguità

Mancano epoca di passaggio al periastro e periodo. Tali due grandezze si ottengono da un fit lineare della coppia $(t_i, M_i) \rightarrow$ tempo e anomalia media, il problema sta nel calcolo dell'anomalia media.

Per ogni osservazione di cui abbiamo (x_i, y_i) calcoliamo l'angolo di posizione:

$$\Phi_i = \arctan\left(\frac{y_i}{x_i}\right) + k_i \pi \quad \left(\begin{array}{l} k_i = 0 \text{ se } x_i > 0 \\ k_i = 1 \text{ se } x_i < 0 \end{array} \right)$$

avendo cura che le lettere siano tutte crescenti o decrescenti

(10)

Si calcola la posizione rispetto alla linea dei nodi:

$$\Theta'_i = \Theta_i - \Omega$$

tale angolo va poi portato nel piano dell'orbita:

$$\varphi'_i = \arctan \left[\frac{\tan \Theta'_i}{\cos i} \right] + k_2 \pi$$

(k_2 serve a fare in modo che Θ'_i e φ'_i siano nello stesso quadrante)

Il calcolo dell'anomalia vera si produce sottraendo l'argomento al periastro:

$$\varphi_i = \varphi'_i - \omega$$

e si può passare all'anomalia eccentrica mediante la relazione:

$$E_i = \pm \arccos \frac{e + \cos \varphi_i + k_3 \pi}{1 + e \cos \varphi_i}$$

Tramite l'equazione di Keplero si passa all'anomalia media:

$$\mathcal{M}_i = E_i - e \cdot \sin(E_i)$$

(per k_3 vale il discorso di k_2 , E_i e φ_i devono stare nello stesso quadrante)

A questo punto ho le coppie (t_i, \mathcal{M}_i) e con un fit lineare calcolo il coefficiente angolare della relazione:

$$\mathcal{M}_i = \frac{2\pi}{T} (t_i - \tau)$$

il coefficiente angolare mi permette di calcolare T , noto τ , dal termine noto,

si calcola τ

[Herschel 1805 fu il primo a misurare l'orbita di una binaria] (11)

Abbiamo già detto che se non si conosce la distanza del sistema binario non è possibile trasformare la distanza angolare nel semiasse maggiore dell'orbita.

La soluzione a questo problema è stata la misura della parallasse annua di diverse binarie visibili, il che ha consentito la determinazione della distanza e quindi il passaggio dall'angolo di apertura al semiasse maggiore.

Nota il periodo e il semiasse maggiore, la 3^a legge di Keplero consente di calcolare la massa totale del sistema:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \rightarrow m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G T^2}$$

In taluni casi si è riusciti a calcolare con precisione la

traiettoria di ambo le

stelle rispetto al sistema di riferimento

praticamente inerziale delle "stelle di campo"

in questo caso, avendo a disposizione i due semiassi, è possibile calcolare anche il rap-

porto di massa:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

conoscenza
di somma e
rapporto
consente il

calcolo separato delle
masse.

Capita in alcuni casi
che stelle isolate

completano un'orbita ellittica,

il che presuppone nelle vicinanze la presenza
di una "compagna invisibile". Il caso più
clamoroso di questa situazione è stata Sirio,
stella "vicina" a 2,64 pc per la quale è
semplice calcolare parallasse annua e moto
proprio: $1,3$ "/anno. Fu Bessel nel 1844 rivo-
tando le anomalie del moto proprio a supporre
la presenza di una seconda stella: Sirius B.

Tale stella osservata da Clark 20 anni dopo
era all'epoca un oggetto enigmatico, i calcoli
fornivano una massa prossima a quella del
Sole, una luminosità pari al 5,6% di
quella solare. All'epoca i modelli stellari
non erano così evoluti, oggi noi sappiamo

che tali oggetti possono esistere e si chiamano "nane bianche" (ultimo stadio evolutivo di stelle di massa solare).

Un modo per misurare la velocità radiale di una stella è quello di utilizzare la spettroscopia. Infatti se una sorgente che si muove con velocità \vec{v} emette radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda λ_e , l'osservatore vedrà arrivare un'onda avente lunghezza d'onda λ_o tale che:

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{1 + v_{\parallel}/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \begin{matrix} \text{(relatività)} \\ \text{ristretta} \end{matrix}$$

se $v \ll c$ risulta:

$$\frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v_{\parallel}}{c}$$

Dunque misurando $\Delta\lambda$ si può avere una misura di v_{\parallel} . Una " λ " ideale da misurare è quella relativa alle righe di assorbimento atomiche, lo spostamento di tali righe fornisce il $\Delta\lambda$. Peraltro la magnitudine della stella osservata non deve superare 18, altri

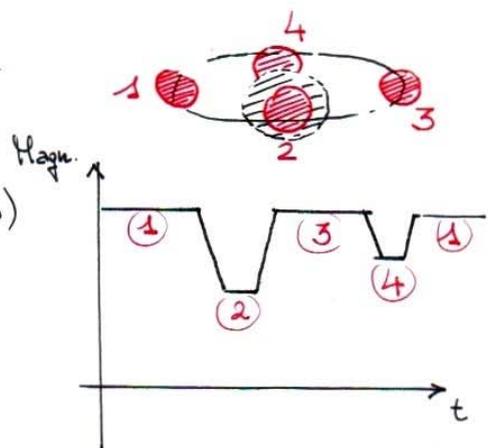
lenti non si ottiene una buona spettroscopia. Quando non ci sono questi problemi si ottengono misure di velocità precise fino al m/sec, il che ha permesso di capire che molte stelle che sembravano isolate erano in realtà delle doppie con componenti indistinguibili anche con i migliori telescopi. In tale caso, infatti, in spettroscopia si presenta una riga che si sdoppia e poi si ricompone, questo perché la velocità dei 2 oggetti che ruotano intorno al loro centro di massa cambiano alternativamente. In questo caso si parla di binarie spettroscopiche. E' possibile dimostrare che la velocità radiale oscilla periodicamente durante l'orbita, tuttavia si ottiene una funzione armonica solo per moto circolare, nel caso di moti eccentrici $v(t)$ varia più rapidamente in funzione del periastro. Ciò ci fa capire che le misure di velocità radiale consentono di ricavare anche l'eccentricità e l'argomento del periastro. (max velocità radiale) (15)

Molto utile risulta essere la possibilità per le binarie visibili di condurre sia misure spettroscopiche che astronomiche. Infatti le osservazioni astronomiche forniscono distanze angolari mentre quelle spettroscopiche forniscono misure in m/sec . Dunque è possibile ottenere l'equazione della conica in misure angolari comparare le velocità radiali ed ottenere così il semiasse maggiore e di conseguenza le masse e la loro distanza dal sistema solare.

Questo metodo è stato utilizzato, per esempio, la distanza del buco nero centrale della nostra galassia osservando il moto delle stelle che gli orbitano intorno (la distanza di Sgr A* è di 8,3 kpc con un errore entro il 2%)

Binarie a eclisse

Se l'orbita di una binaria è di taglio si osservano due eclissi: primaria (transito) quando è la stella più grande ad essere oscurata e secondaria (occultazione) quando viene oscurata la più piccola.



(16)

Se l'orbita è inclinata del valore "i" rispetto al piano di vista, la proiezione del centro della stella secondaria sulla sagoma della primaria sarà discosta dal centro di quest'ultima di una quantità pari a:

$$b = a \cdot \cos(i) \quad \text{parametro d'impatto}$$

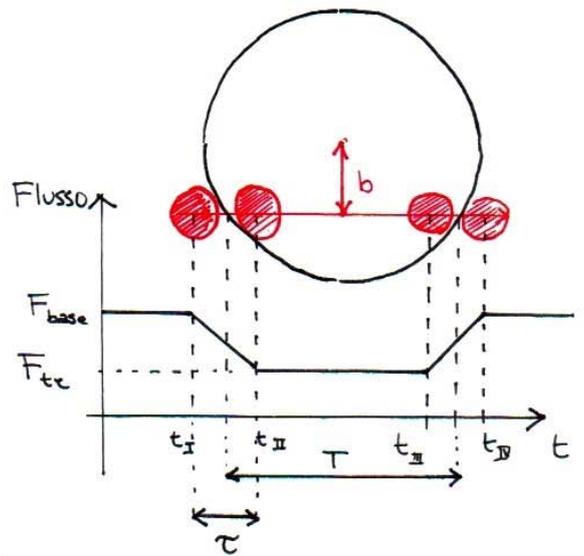
Se risulta $b > R_1 + R_2$ non c'è eclissi, il disco della secondaria sarà "parzialmente" sulla primaria se $b \leq R_1 - R_2$ (si parla di transito radente).

Ora per definire il piano dell'orbita è necessario fornire due angoli " Ω " e "i", il primo può assumere valori qualsiasi tra 0 e 2π il secondo, invece, deve essere compreso tra $\arccos\left(\frac{R_1 + R_2}{a}\right)$ e 2π . Supponendo che le orientazioni siano equiprobabili è possibile calcolare la probabilità di transito come:

$$P_T = \frac{\int_{\arccos\left(\frac{R_1 + R_2}{a}\right)}^{\pi/2} \sin(i) di \int_0^{2\pi} d\Omega}{\int_0^{\pi/2} \sin(i) di \int_0^{2\pi} d\Omega} = \boxed{\frac{R_1 + R_2}{a}}$$

Le orientazioni aumentano con "i"

Il fenomeno del transito può essere distinto in una serie di fasi, dall'istante di primo contatto, t_I in cui il flusso inizia a diminuire, al secondo contatto quando il disco secondario è tutto interno.



Se la "brillanza" della primaria è costante da t_{II} a t_{III} il flusso non si modifica più, fino a quando non si arriva al terzo contatto in cui il disco inizia ad uscire. In t_{IV} il disco è completamente esterno e il flusso torna al suo valore iniziale.

Il flusso iniziale "base" risulta pari a:

$$F_{base} = F_1 + F_2 = \pi R_1^2 I_1 + \pi R_2^2 I_2$$

con I_1 e I_2 brillantezza superficiale delle 2 stelle

il flusso di transito sarà invece:

$$\begin{aligned} F_{tc} &= \pi R_1^2 I_1 - \pi R_2^2 I_1 + \pi R_2^2 I_2 = \\ &= \pi (R_1^2 - R_2^2) I_1 + \pi R_2^2 I_2 = \end{aligned}$$

(18)

$$= F_{base} - F_1 \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

← quota di flusso della primaria oscurata dalla secondaria

la perdita di flusso sarà così pari a:

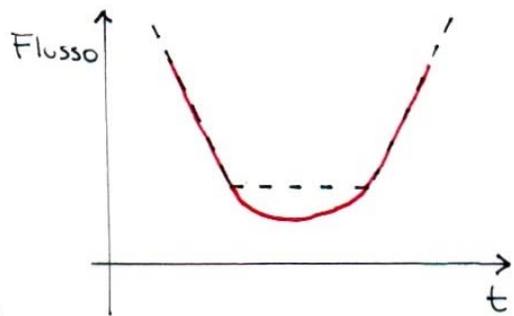
$$\delta = \frac{F_{base} - F_{tr}}{F_{base}} = \frac{F_1}{F_{base}} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

se $F_1 \gg F_2$
allora $F_1 \approx F_{base}$
e quindi

la misura della perdita % di flusso fornisce misura indiretta del rapporto tra i raggi.

$$\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\delta}$$

In realtà in tutta questa analisi andrebbe tenuto in conto che la brillantezza di una stella diminuisce leggermente dal centro della stella al bordo (limb darkening effect), il che porta il flusso di transito ad essere non costante, ma a presentare una concavità verso il basso



Vogliamo ora provare a valutare la durata del

transito. Nel piano del cielo

l'orbita della secondaria è quella di una circonferenza la cui componente γ σ_a

proiettata:

$$\begin{cases} X = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right) \\ Y = a \cdot \cos(i) \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right) \end{cases}$$

queste equazioni sono scritte con origine del sistema nel centro della primaria.

diciamo durata del transito T , il tempo dell'eclisse preso a metà altezza durante la fase di discesa e di risalita.

Per calcolare T basterà valutare i due valori per cui il raggio vettore posizione della secondaria è pari a R_d :

$$R_d = \sqrt{X^2 + Y^2} = a \sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right) + \cos^2(i) \left(1 - \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)\right)}$$

Ora si osservi che $T/2$ è piccolo rispetto al periodo di moto della secondaria (T_p), inoltre se l'eclisse si osserva l'orbita è "quasi" di taglio, per cui:

$$\cos(i) = \frac{b}{a} \ll 1$$

da cui:

$$\sin^2\left(\frac{t}{T_p/2} \cdot \pi\right) \approx \left(\frac{t}{T_p/2} \cdot \pi\right)^2 \ll 1$$

per cui:

$$R_d \approx a \sqrt{\left(\frac{\pi T}{T_p}\right)^2 + \frac{b^2}{a^2} \left(1 - \left(\frac{\pi T}{T_p}\right)^2\right)}$$

avendo imposto l'uguaglianza con R_d si è preso $T = 2t$

è trascurabile

$$R_1 \approx a \sqrt{\left(\frac{\pi T}{T_p}\right)^2 + \frac{b^2}{a^2}}$$

da cui è semplice ricavare "T":

$$T = \frac{T_p R_1}{\pi \cdot a} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{R_1^2}}$$

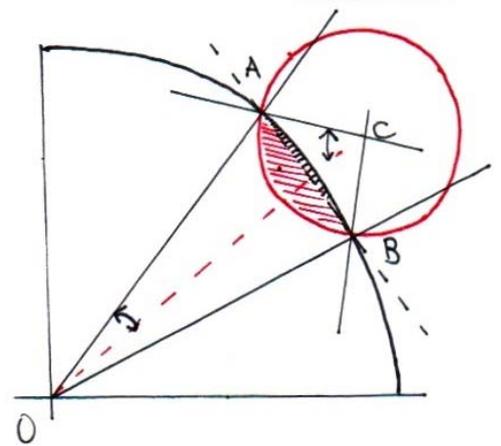
Vogliamo provare a dare ora una descrizione più accurata della fase di discesa e di risalita. Tale analisi è importante per la valutazione del parametro d'impatto (è semplice osservare che maggiore è "b", maggiore è il tempo di discesa)

Cominciamo con il valutare la distanza tra i centri dei 2 dischi:

$$c = a \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right) \cdot (1 - \cos^2(i))}$$

è ricavata da $c = \sqrt{x^2 + y^2}$ in cui si è messo tutto in funzione di coseno.

L'area di sovrapposizione è la somma di due segmenti circolari, quello campito in nero per la circonferenza maggiore e quello campito in rosso per la circonferenza minore.



Consideriamo il triangolo

$\triangle ACC$, del quale sono noti i 3 lati:

(21)

R_1, R_2 ed e . Mediante il teorema del coseno è possibile calcolare sia l'angolo in O che l'angolo in C:

$$\hat{AOC} = \arccos\left(\frac{R_1^2 - R_2^2 + e^2}{2eR_1}\right)$$

$$\hat{OCA} = \arccos\left(\frac{R_2^2 - R_1^2 + e^2}{2eR_2}\right)$$

L'area dei due segmenti circolari si ottiene sottraendo all'area dei rispettivi settori circolari l'area dei triangoli \hat{AOB} e \hat{ACB} .

Nota: Nella formula del settore circolare c'è $d/2$

$$A_1 = \hat{AOC} \cdot R_1^2 - \frac{1}{2} R_1^2 \cdot \sin(2 \cdot \hat{AOC})$$

$$A_2 = \hat{OCA} \cdot R_2^2 - \frac{1}{2} R_2^2 \cdot \sin(2 \cdot \hat{OCA})$$

Queste 2 aree sono funzioni del tempo perché lo è $e(t)$ (si noti che tutti gli sviluppi sono espressi in funzione della distanza tra i 2 centri). È possibile così calcolare il flusso al generico tempo "t" come:

$$F_{tr}(t) = F_1 + F_2 + (F_{osc.}) = \text{flusso oscurato, somma delle due aree calcolate per la brillantezza della primaria}$$

$$= \pi R_1^2 I_1 + \pi R_2^2 I_2 +$$

$$- (A_1(t) + A_2(t)) I_1 =$$

$$= (\pi R_1^2 - A_1 - A_2) I_1 + \pi R_2^2 I_2$$

Calcoliamo $\delta(t)$ utilizzando la relazione generale:

$$\delta = \frac{\pi R_1^2 I_1 + \pi R_2^2 I_2 - (\pi R_1^2 - A_1 - A_2) I_1 - \pi R_2^2 I_2}{F_{base}}$$

$$= \frac{(A_1 + A_2) \cdot I_1}{F_{base}} \cdot \frac{\pi R_1^2}{\pi R_1^2} = \left[\frac{F_1}{F_{base}} \cdot \frac{A_1 + A_2}{\pi R_1^2} \right]$$

→ questa relazione è funzione del tempo perché lo sono A_1 ed A_2

Terminiamo questa analisi con lo studio dei tempi di discesa e di salita.

Per secondary piccole, o addirittura nel caso di pianeti, risulta: $R_2 \ll R_1$ e $b \ll a$, da cui si può semplificare l'espressione di $e(t)$:

$$e(t) \approx a \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)^2}$$

ricordando che i raggi sono allineati nei punti di tangenza si ha che in:

$$t_{II} \text{ e } t_{III} \rightarrow e = R_1 - R_2 \text{ mentre in}$$

$$t_I \text{ e } t_{IV} \rightarrow e = R_1 + R_2$$

sostituiamo tali 2 valori nell'espressione di $e(t)$:

$$R_1 - R_2 = a \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)^2}$$

isoliamo rispetto a "t"

$$\left(\frac{R_1 - R_2}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)^2 \quad \text{da cui:}$$

$$\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right) = \pm \sqrt{\left(\frac{R_1 - R_2}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2}} \quad \text{da cui ancora:}$$

$$t = \pm \frac{T_p}{2\pi} \cdot \frac{R_1}{a} \sqrt{\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)^2 - \frac{b^2}{R_1^2}}$$

ma abbiamo visto
che $\frac{R_2^2}{R_1^2} = \delta$

nel caso $F_1 \approx F_{base}$

$$t = \pm \frac{T_p}{2\pi} \cdot \frac{R_1}{a} \sqrt{\left(1 - \sqrt{\delta}\right)^2 - \frac{b^2}{R_1^2}}$$

questa analisi pone
l'origine dei tempi
nel centro del transito
per cui la soluzione
positiva si riferisce
a t_{III}

analogamente nel caso
di t_{II}, t_{IV} :

$$t = \pm \frac{T_p}{2\pi} \cdot \frac{R_1}{a} \sqrt{\left(1 + \sqrt{\delta}\right)^2 - \frac{b^2}{R_1^2}}$$

il tempo di salita, o equivalentemente quello
di discesa, sarà pari a:

$$\tau = t_{IV} - t_{III} = \frac{T_p}{2\pi} \cdot \frac{R_1}{a} \left[\sqrt{\left(1 + \sqrt{\delta}\right)^2 - \frac{b^2}{R_1^2}} + \sqrt{\left(1 - \sqrt{\delta}\right)^2 - \frac{b^2}{R_1^2}} \right]$$

si ricorda che lo sviluppo

in serie di: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x^2)$

donque:

$$\sqrt{\left(1 + \sqrt{\delta}\right)^2 - \frac{b^2}{R_1^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(2\sqrt{\delta} + \delta - \frac{b^2}{R_1^2} \right)$$

(24)

$$\sqrt{\left(1 - \sqrt{\delta}\right)^2 - \frac{b^2}{R_1^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(-2\sqrt{\delta} + \delta - \frac{b^2}{R_1^2} \right)$$

sostituendo:

$$\tau \approx \frac{T_p \cdot R_1}{2\pi \cdot a} \left(\cancel{1} + \frac{1}{2} \left(2\sqrt{\delta} + \cancel{\delta} - \frac{b^2}{R_1^2} \right) - \cancel{1} + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(-2\sqrt{\delta} + \cancel{\delta} - \frac{b^2}{R_1^2} \right) \right)$$

$$\tau \approx \frac{T_p R_1}{2\pi a} \cdot 2\sqrt{\delta}$$

questa espressione
può essere migliorata
considerando come variabile
il tempo e sviluppando
in serie per esso.

si ottiene:

$$\tau = \frac{T_p R_1}{\pi a} \cdot \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{1 - b^2/R_1^2}}$$

Donque per un "transito" in un sistema binario
abbiamo una serie di osservabili: δ, T, τ, T_p
tali valori possono essere utili per darci
altri parametri fisici. In particolare, usando
la 3^a legge di Keplero:

$$\frac{a^3}{T_p^2} = \frac{M_1 G}{4\pi^2} \left(1 + \frac{M_2}{M_1} \right)$$

trascurando il rapporto $M_2/M_1 \ll 1$ ed esprimendo
a in funzione della densità $M_1 = \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3$

si ottiene la relazione:

$$\frac{a^3}{T_p^2} = \rho_1 \cdot \frac{4\pi R_1^3}{3} \cdot \frac{G}{4\pi^2} \quad \text{da cui:}$$

$$\rho_1 = \frac{3}{4\pi R_1^3} \cdot \frac{a^3}{T_p^2} \cdot \frac{4\pi^2}{G} =$$

$$= \frac{3\pi}{GT_p^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{\delta}}{T \cdot \tau}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{T_p}{\pi}\right)^3 \leftarrow$$

$$= \frac{3T_p}{\pi^2 \cdot G} \left(\frac{\sqrt{\delta}}{T \cdot \tau}\right)^{3/2}$$

è possibile dimostrare attraverso le formule ottenute durante la trattazione che:

$$\left(\frac{T_p R_1}{\pi a}\right)^2 = \frac{T \cdot \tau}{\sqrt{\delta}} \quad \text{da cui:}$$

questa formula è molto interessante perché non utilizza informazioni sui modelli stellari, ma solo osservazioni per cui è molto utile per le teorie da verificare.

Tutta questa analisi è stata fatta considerando un'orbita circolare della stella secondaria, se l'orbita fosse eccentrica la trattazione diventa più complessa. Ci limitiamo a dare solo una espressione che esprime la differenza tra il tempo del transito secondario, t_{ec} , e quello primario, t_{ce} :

$$t_{ec} - t_{te} \approx \frac{T_p}{2} \cdot \left(1 + \frac{4}{\pi} \cdot e \cdot \cos(\omega) \right)$$

si specifica come in tale situazione in generale il transito non è più simmetrico, ovvero la loro distanza temporale non è metà periodo, e che il parametro d'inepatto cambia tra le due eclissi, e limite ci potrebbe essere anche una sola delle due eclissi.

Il problema dei 3 corpi

Si tratta di individuare l'evoluzione nel tempo di un sistema isolato, in generale costituito da N corpi, di cui si conoscono le condizioni iniziali di moto. L'energia cinetica del sistema è pari a:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

mentre l'energia potenziale gravitazionale

risulta:

$$U = -G \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

il campo di forze associato a tale potenziale si può calcolare valutandone il gradiente

Le leggi orarie sono:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\vec{\nabla}_i U \rightarrow \text{forza corrispondente alla posizione occupata da } m_i$$

Si tratta quindi di risolvere un sistema di $6N$ equazioni differenziali non lineari, tuttavia poiché il sistema è isolato ci sono due grandezze che si conservano: quantità di moto e momento angolare. Inoltre è

(1)

possibile calcolare il moto del centro di massa nota la sua posizione iniziale (il centro di massa compie un moto rettilineo uniforme)

Dunque ci sono 9 integrali scalari del moto (3 per ogni grandezza vettoriale che si conserva), più l'energia che si conserva, il che porta il conto a 10. Poincaré dimostrò che non vi sono altri integrali del moto che possano esprimersi come funzione di posizione e velocità dei corpi (se ne potrebbero essere altri che si esprimono rispetto ad altre variabili, anche se finora non ne sono stati individuati)

Dunque ci sono in generale $6N - 10$ variabili da determinare con altri "mezzi". La differenza tra variabili ed equazioni determina il fatto che la dinamica di questi sistemi sia di tipo caotico (Poincaré getto le basi della teoria del caos proprio studiando) (2)

queste tipologie del sistema) Dunque soluzioni non periodiche e fortemente dipendenti dalle condizioni iniziali di moto.

Per risolvere il problema si può seguire una strada simile a quella che si sviluppa in termodinamica, ovvero ragionare in termini di grandezze globali.

Scegliamo un sistema di riferimento collocato istante per istante nel baricentro, in tale sistema risulterà:

$$\vec{r}_{cm} = \sum_i m_i \vec{r}_i = \vec{0}$$

$$\dot{\vec{r}}_{cm} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{0}$$

ricordando ora che l'inerzia del sistema è:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

svolgiamo la derivata temporale di tale

quantità: $\frac{dI}{dt} = 2 \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$ (si ricordi che $r_i^2 = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i$)

svolgiamo anche la derivata seconda:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2 \left(\underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i}_{\text{questo termine è il doppio dell'energia cinetica}} + \sum_i \underbrace{m_i \vec{r}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i}_{\text{si scrivono come } -\vec{\nabla}_i U \text{ (cioè } \vec{F}_i)} \right)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T - \sum_i \vec{e}_i \cdot \vec{\nabla}_i U$$

ora è necessario ricordare una definizione, una funzione

$f(x_1, \dots, x_n)$ si dice omogenea di grado "k" se risulta: $f(\alpha \vec{r}) = \alpha^k f(\vec{r})$

per le funzioni omogenee vale:

$$\sum_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_{ij}} \cdot x_{ij} = k f \quad \text{teorema di Eulero per le funzioni omogenee}$$

questa quantità è proprio $\vec{e}_i \cdot \vec{\nabla}_i$ (per ogni particella, cioè per ogni "i")

È facile verificare che "f" nel caso sia U potenziale gravitazionale è omogenea di grado -1, per cui: $\sum_i \vec{e}_i \cdot \vec{\nabla}_i U = -U$ da cui

$$\boxed{\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + U}$$

questa si dice equazione di Lagrange-Jacobi

Si ricordi che "U" è definito negativo per il campo gravitazionale, per cui se in un certo istante "t", U è più grande di 2T il sistema frenerà la sua espansione o accelererà la sua compressione, al contrario se 2T è in valore assoluto maggiore di U. (si ricorda che T+U è costante nel tempo, ma non 2T+U) (4)

Se questa relazione vale istante per istante essa sarà valida anche per la media tempo-

tale :
$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d^2 I}{dt^2} \right\rangle = 2 \langle T \rangle + \langle U \rangle$$
 teorema del viriale

se il sistema raggiunge uno stato stazionario allora il 1° membro di questa equazione è zero, da cui :

$$2 \langle T \rangle + \langle U \rangle = 0$$

anche se il sistema non è perfettamente virializzato, il termine di variazione dell'inerzia è

un sistema che raggiunge tale condizione si dice "virializzato" (un'orbita Kepleriana nel problema dei 2 corpi)

molto piccolo rispetto a quelli energetici, per cui tale relazione può rappresentare comunque una guida all'evoluzione del sistema, basta che il sistema sia non collisionale (urti provocano salto repentino per I)

E' bene sottolineare che la condizione di virializzazione di un sistema "fa a pezzi" con il raggiungimento del suo equilibrio termodinamico. Tale equilibrio, infatti, è raggiunto quando c'è scambio di energia tra i corpi il che avviene attraverso collisioni.

Perché un sistema sia in equilibrio (5)

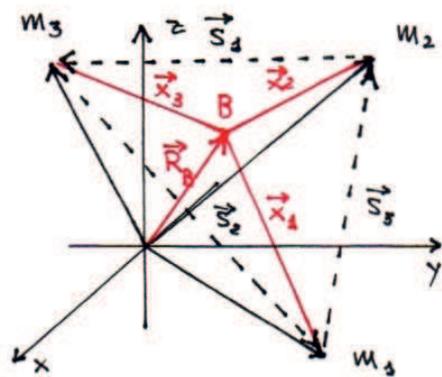
tervico, il numero di particelle dovrà essere molto alto, come capita negli ammassi globulari (centinaia di migliaia di stelle in qualche centinaio di parsec). In tali situazioni il principio di equipartizione dell'energia rende simili tutte le energie cinetiche:

$$\left\langle \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right\rangle = \frac{3}{2} kT$$

questo effetto equivale ad afferire che dopo ogni urto le stelle più massicce perderanno velocità e si porranno su orbite più vicine al centro del sistema, mentre quelle meno in misura minore usciranno dall'urto con velocità maggiore occupando traiettorie più distanti dal centro. Si ha quella che viene definita aggregazione di massa, con tutti gli oggetti più pesanti concentrati al centro del sistema.

Può anche capitare che un oggetto di massa piccola dopo l'urto acquisisca una velocità maggiore di quella di fuga, in tal caso si dice che il sistema perde massa per evaporazione

Occupiamoci ora del problema dei 3 corpi nella sua forma generale, per semplicità supponiamo di scegliere le unità di misura in modo tale che G sia numericamente pari ad 1. Nel sistema baricentrale le equazioni di moto sono:



$$\begin{cases} \ddot{\vec{x}}_1 = -m_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)^3} - m_3 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_3}{(|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|)^3} \\ \ddot{\vec{x}}_2 = -m_1 \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{(|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|)^3} - m_3 \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_3}{(|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|)^3} \\ \ddot{\vec{x}}_3 = -m_1 \frac{\vec{x}_3 - \vec{x}_1}{(|\vec{x}_3 - \vec{x}_1|)^3} - m_2 \frac{\vec{x}_3 - \vec{x}_2}{(|\vec{x}_3 - \vec{x}_2|)^3} \end{cases}$$

Le variabili in questo sistema sono le 6 di stato per ogni punto materiale, quindi 18, le quali si possono ridurre di 3 per la conservazione della quantità di moto e di 3 perché essendo il sistema baricentrale

$$m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 + m_3 \vec{x}_3 = \vec{0}$$

La conservazione del momento angolare e dell'energia riducono ancora il numero di

(7)

incognite che alla fine restano: $18 - 10 = 8$

Le equazioni assumono una forma più simmetrica se vengono espresse con i vettori

posizione relativa:

$$\begin{cases} 1) \vec{S}_1 = \vec{X}_3 - \vec{X}_2 \\ 2) \vec{S}_2 = \vec{X}_1 - \vec{X}_3 \\ 3) \vec{S}_3 = \vec{X}_2 - \vec{X}_1 \end{cases}$$

si noti che $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 = \vec{0}$

Se ora si ricava

\vec{X}_2 dalla 3^a equazione: $\vec{X}_2 = \vec{S}_3 + \vec{X}_1$

e \vec{X}_3 dalla 2^a equazione: $\vec{X}_3 = \vec{X}_1 - \vec{S}_2$

sostituendo queste 2 espressioni nell'equazione che dice che il centro di massa è nell'origine aerea:

$$m_1 \vec{X}_1 + m_2 (\vec{S}_3 + \vec{X}_1) + m_3 (\vec{X}_1 - \vec{S}_2) = \vec{0}$$

$$\underbrace{(m_1 + m_2 + m_3)}_M \vec{X}_1 + m_2 \vec{S}_3 - m_3 \vec{S}_2 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} M \vec{X}_1 = m_3 \vec{S}_2 - m_2 \vec{S}_3 \\ M \vec{X}_2 = m_1 \vec{S}_3 - m_3 \vec{S}_1 \\ M \vec{X}_3 = m_2 \vec{S}_1 - m_1 \vec{S}_2 \end{cases}$$

procedendo allo stesso modo è possibile avere altre 2 equazioni

Sostituendo queste espressioni nelle eq. di moto otteniamo delle equazioni in forma simmetrica, in particolare "estraendo" le accelerazioni aereo:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{\vec{S}}_1 &= -m \frac{\vec{S}_1}{S_1^3} + m_1 \vec{S} \\ \ddot{\vec{S}}_2 &= -m \frac{\vec{S}_2}{S_2^3} + m_2 \vec{S} \\ \ddot{\vec{S}}_3 &= -m \frac{\vec{S}_3}{S_3^3} + m_3 \vec{S} \end{aligned} \right. \quad \text{con } \vec{S} = \frac{\vec{S}_1}{S_1^3} + \frac{\vec{S}_2}{S_2^3} + \frac{\vec{S}_3}{S_3^3}$$

proposta di Broucke e Lass
nel 1973.

Soluzione di Lagrange: nel caso in cui $\vec{S} = \vec{0}$

le equazioni di Broucke e Lass diventano

$$\ddot{\vec{S}}_i = -m \frac{\vec{S}_i}{S_i^3} \quad i=1,2,3$$

che sono essenzialmente, prese singolarmente, le equazioni del problema dei 2 corpi. La domanda da porsi è: quando si verifica la condizione $\vec{S} = \vec{0}$?

Essendo valida la relazione cinematica:

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 = \vec{0}, \text{ sicuramente nel caso in cui}$$

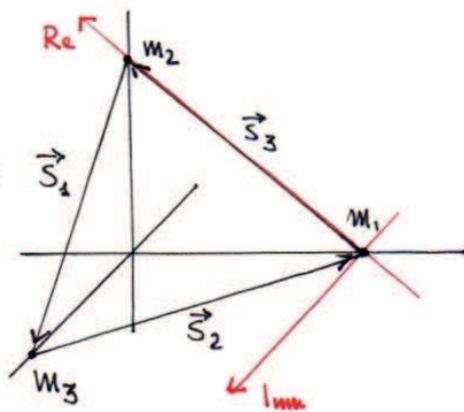
$S_1 = S_2 = S_3$, ovvero se i corpi sono ai vertici di un triangolo equilatero.

Individuato il piano in cui

si trovano le 3 masse possiamo

creare un riferimento

"complesso" con l'asse



reale lungo \vec{S}_3 e quello immaginario ad

esso normale. Si potes' scrivere:

(9)

$$\vec{S}_1 = \vec{S}_3 e^{\frac{2}{3}\pi i} = \left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right] \vec{S}_3 =$$

$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{rotazione di } \vec{S}_3 \\ \text{di } \frac{2}{3}\pi \text{ in ambo i sensi} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i) \vec{S}_3$

$$\vec{S}_2 = \vec{S}_3 e^{-\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i) \vec{S}_3$$

Abbiamo ottenuto un modo di esprimere tutte le posizioni relative, nota quella tra soli due dei 3 corpi, in altre parole si è ridotta la questione al problema dei 2 corpi (in questo caso m_1 ed m_2 , la cui posizione permette di definire \vec{S}_3) e i tre corpi restano sempre ai vertici di un triangolo equilatero il quale, però, istante per istante, cambia orientamento e dimensioni.

Per ottenere le soluzioni nel sistema baricentrico basterà sostituire le relazioni trovate in quelle che forniscono \vec{X}_i come funzione di \vec{S}_i .

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{X}_1 = \left(\frac{m_3}{m} e^{-\frac{2}{3}\pi i} - \frac{m_2}{m} \right) \vec{S}_3 \\ \vec{X}_2 = \left(\frac{m_1}{m} - \frac{m_3}{m} e^{i\frac{2}{3}\pi} \right) \vec{S}_3 \\ \vec{X}_3 = \left(\frac{m_2}{m} e^{\frac{2}{3}\pi i} - \frac{m_1}{m} e^{-\frac{2}{3}\pi i} \right) \vec{S}_3 \end{array} \right.$$

Queste equazioni mostrano come le traiettorie siano comunque ellittiche con orientamento e dimensioni differenti dettate dai valori delle masse. (così non è nel piano definito dai vettori posizione relativa e addotta la soluzione non dipende dalle masse)

Soluzione di Eulero: consideriamo le 3 particelle giacenti su di una retta con m_2 in posizione intermedia

La condizione di collinearità rende verificata la relazione cinematica $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 = \vec{0}$ ponendo

$$\vec{S}_1 = \lambda \vec{S}_3$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ da determinare.

$$\vec{S}_2 = -(\lambda + 1) \vec{S}_3$$

Ora si considerano le 3 equazioni di Brocke, si ricava \vec{S} dalla terza e si sostituisce nelle prime 2:

$$\ddot{\vec{S}}_1 + m \frac{\vec{S}_1}{S_1^3} = \frac{m_1}{m_3} \left(\ddot{\vec{S}}_3 + m \frac{\vec{S}_3}{S_3^3} \right)$$

$$\ddot{\vec{S}}_2 + m \frac{\vec{S}_2}{S_2^3} = \frac{m_2}{m_3} \left(\ddot{\vec{S}}_3 + m \frac{\vec{S}_3}{S_3^3} \right)$$

Sostituendo le relazioni di collinearità

avremo:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda \ddot{\vec{S}}_3 + m \frac{\vec{S}_3}{\lambda^2 S_3^3} &= \frac{m_1}{m_3} \left(\ddot{\vec{S}}_3 + m \frac{\vec{S}_3}{S_3^3} \right) \\ -(\lambda+1) \ddot{\vec{S}}_3 + \frac{m \vec{S}_3}{(\lambda+1)^2 S_3^3} &= \frac{m_2}{m_3} \left(\ddot{\vec{S}}_3 + m \frac{\vec{S}_3}{S_3^3} \right) \end{aligned} \right. \text{semplificando:}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\lambda - \frac{m_1}{m_3} \right) \ddot{\vec{S}}_3 &= \left(\frac{m_1}{m_3} - \frac{1}{\lambda^2} \right) m \frac{\vec{S}_3}{S_3^3} \\ \left(-\lambda - 1 - \frac{m_2}{m_3} \right) \ddot{\vec{S}}_3 &= \left(\frac{m_2}{m_3} - \frac{1}{(\lambda+1)^2} \right) m \frac{\vec{S}_3}{S_3^3} \end{aligned} \right.$$

si calcola da entrambe le equazioni il prodotto

$$\frac{m \vec{S}_3}{S_3^3} \cdot \left(\frac{\ddot{\vec{S}}_3}{\ddot{\vec{S}}_3^2} \right) \rightarrow \text{se si moltiplica i primi membri per questa quantità rimane il solo coefficiente di } \ddot{\vec{S}}_3$$

ottenendo l'uguaglianza:

$$\frac{\left(\lambda - \frac{m_1}{m_3} \right)}{\left(\frac{m_1}{m_3} - \frac{1}{\lambda^2} \right)} = - \frac{\left(-\lambda - 1 - \frac{m_2}{m_3} \right)}{\left(\frac{m_2}{m_3} - \frac{1}{(\lambda+1)^2} \right)}$$

questa equazione consente il calcolo di λ , in particolare sviluppando i calcoli:

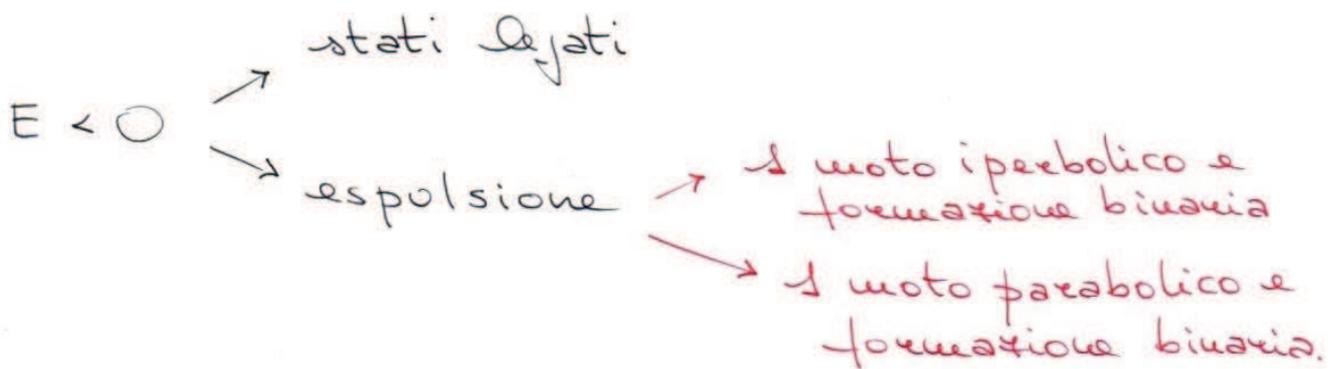
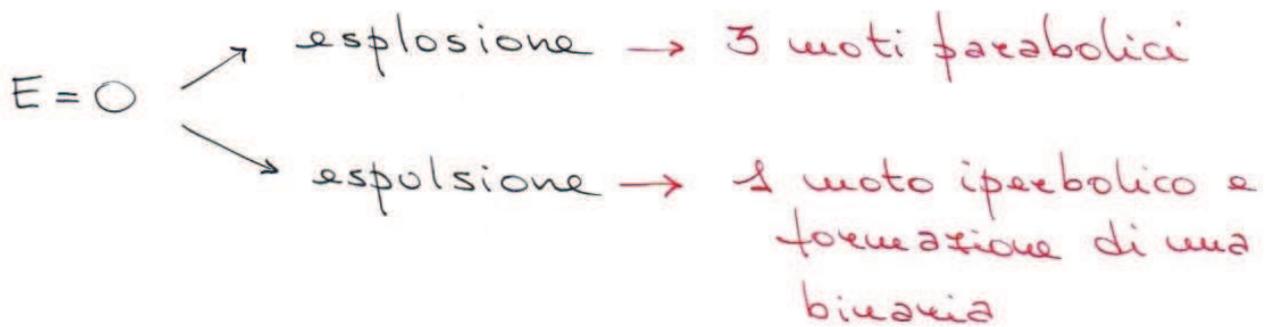
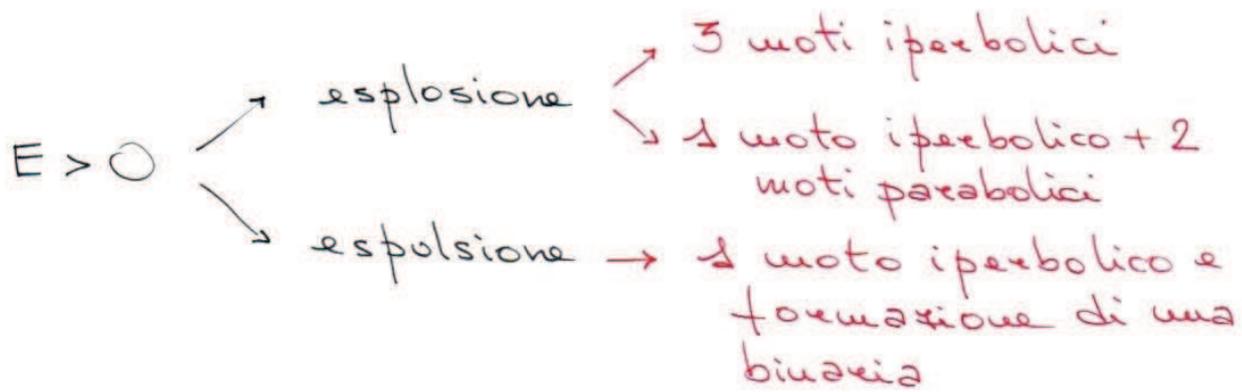
$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \lambda^5 + (3m_1 + 2m_2) \lambda^4 + \\ + (3m_1 + m_2) \lambda^3 - (m_2 + 3m_3) \lambda^2 - (2m_2 + 3m_3) \lambda + \\ - (m_2 + m_3) = 0 \end{aligned}$$

per $\lambda \rightarrow 0$ il polinomio dà un risultato negativo $(-m_2 - m_3)$, per $\lambda \rightarrow +\infty$ il polinomio è positivo.

Cio' ci permette di dire, essendo un polinomio una funzione continua, che almeno una radice reale c'e'. Lo studio dei segni dei coefficienti del polinomio permette di dire che tale radice e' unica. Dunque Δ e' una funzione ben definita delle masse e determina una famiglia di soluzioni ellittiche in cui i corpi istante per istante sono allineati (una "famiglia" perche' ricordiamo che il calcolo di Δ consente di esprimere \vec{S}_1 ed \vec{S}_2 in funzione di \vec{S}_3 , la quale non e' unica ma e' soluzione del problema dei 2 corpi).

Fino a tempi recenti le 2 soluzioni viste erano le uniche note, nel 1922 Chazy comincio' a classificare le soluzioni in base al comportamento per $t \rightarrow \infty$ e all'energia totale del sistema.

Di presso si riporta schema riassuntivo:



Tra gli stati legati si citano quelli "gerarchici" in cui 2 corpi orbitano molto vicini l'uno all'altro mentre il terzo è molto distante tanto da "vedere" un solo corpo posizionato nel C.M. di quelli vicini. Si pensi al sistema Sole-Terra-Luna. In tempi recenti molte soluzioni particolari sono state trovate: la soluzione ad 8 di Moore, la migliaia di Li e Liao (2017)

Problema ristretto dei 3 corpi

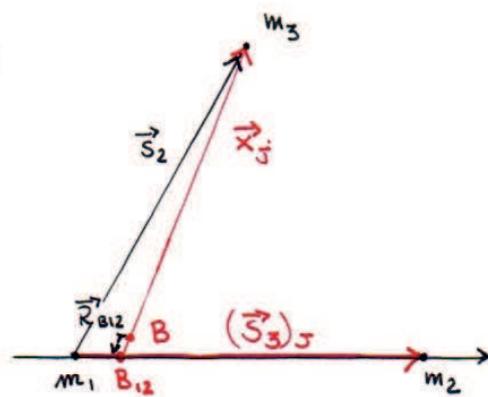
Un caso particolare del problema dei 3 corpi è quello in cui la massa di uno dei 3 corpi è molto minore di quella degli altri 2. In questa situazione il problema si può sostanzialmente "spezzare", da una parte i 2 corpi più massivi che seguono un classico problema dei 2 corpi, dall'altra il terzo corpo che si muove nel campo generato dai primi 2.

In tale ottica si introducono le coordinate di Jacobi:

\vec{x}_J : vettore posizione del 3° corpo rispetto al centro di massa dei primari.

$(\vec{s}_3)_J$: $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ posizione relativa tra i 2 corpi primari

Sia inoltre $m = m_1 + m_2 + m_3$ ed $\mu = m_1 + m_2$



Nel sistema baricentrale totale, la posizione del baricentro di $m_1 - m_2$ è data da:

$$\vec{R}_{B12} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} =$$

essendo:
 $m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 + m_3 \vec{x}_3 = \vec{0}$
 $m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 = -m_3 \vec{x}_3$

$$= -\frac{m_3}{m_1 + m_2} \vec{x}_3 \quad \left(\vec{R}_{B12} \text{ è diretto evidentemente come } \vec{x}_3 \right)$$

da cui: $(\vec{x})_J = \vec{x}_3 + \frac{m_3}{m_1 + m_2} \vec{x}_3 = \frac{m}{M} \vec{x}_3$

Ora utilizzando la semplice regola del parallelogramma:

$$\vec{S}_2 = \vec{x}_J + \left(\frac{m_2}{M} (\vec{S}_3)_J \right) \rightarrow \text{vettore che da } B_{12} \text{ punta ad } m_2$$

$$\vec{S}_1 = \vec{x}_J - \left(\frac{m_1}{M} (\vec{S}_3)_J \right) \rightarrow \text{vettore che da } B_{12} \text{ punta ad } m_1$$

A questo punto è semplice scrivere l'equazione di moto relativo tra i due primari. In particolare essa risulta pari a:

$$\ddot{(\vec{S}_3)_J} = -M \frac{(\vec{S}_3)_J}{(S_3)_J^3} + m_3 \left(\frac{\vec{S}_1}{S_1^3} - \frac{\vec{S}_2}{S_2^3} \right)$$

che va accoppiata a quella del 3° corpo:

$$\ddot{\vec{x}}_J = -\frac{m}{M} \left(m_1 \frac{\vec{S}_2}{S_2^3} + m_2 \frac{\vec{S}_1}{S_1^3} \right) \quad (2)$$

Ora nell'ipotesi in cui $m_3 \ll m_1, m_2$; allora

$m \cong M = m_1 + m_2$ ed $\frac{m_3}{M} \ll 1$. Le equazioni

possono così scriversi:

$$(\ddot{\vec{S}}_3)_J = -M \frac{(\vec{S}_3)_J}{(S_3)_J^3} \rightarrow \text{questa è la classica equazione del problema dei 2 corpi}$$

$$\ddot{\vec{X}}_J = -\left(m_1 \frac{\vec{S}_2}{S_2^3} + m_2 \frac{\vec{S}_1}{S_1^3} \right) \rightarrow \text{di questa equazione si conosce la soluzione solo in alcuni casi particolari}$$

Abbiamo bisogno così di semplificare ulteriormente il problema, un primo approccio può essere quello di studiare il cosiddetto "problema ristretto circolare", ovvero la situazione in cui il moto dei corpi primari è circolare (è un modello che si applica piuttosto bene ai sistemi come Sole-Terra-Luna, Terra-Luna-astronauta) In questo caso la soluzione del problema dei 2 corpi in coordinate complete sarà:

$$(\vec{S}_3)_J = (\vec{S}_{30})_J e^{i\omega t}$$

se si considera un sistema di riferimento centrato nella massa 1 e che ruota con

(3)

La stessa velocità angolare del moto, il vettore $(\vec{S}_3)_J$ resta costante nel suo valore iniziale $(\vec{S}_{3,0})_J$. Proviamo così a studiare il moto del terzo corpo in questo sistema di riferimento rotante, aggiungendo i termini legati alla "non inerzialità" del sistema:

$$\ddot{\vec{x}}_J + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}_J = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_J) - \underbrace{\left(m_1 \frac{\vec{S}_2}{S_2^3} + m_2 \frac{\vec{S}_1}{S_1^3} \right)}_{\vec{F}(\vec{x}_J)}$$

questo termine si dice forza efficace e ad esso è legato un potenziale:

$$U(\vec{x}_J) = -\frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{x}_J)^2 - \frac{m_1}{S_2} - \frac{m_2}{S_1}$$

$-\vec{\nabla} U = \vec{F}(\vec{x}_J)$ gradiente = forza centrifuga

per dimostrare quest'ultima uguaglianza è necessario

un po' di calcolo vettoriale, in particolare

$$\vec{\nabla} (\vec{\omega} \cdot \vec{x}) = \vec{\omega} \quad (\text{il gradiente è la derivata per i vettori})$$

$$\vec{\nabla} (\vec{x} \cdot \vec{x}) = 2 \cdot \vec{x}$$

inoltre:

$$\frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{x}_J)^2 = \frac{1}{2} \left[\vec{\omega}^2 \cdot \vec{x}_J^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{x}_J)^2 \right]$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_J) = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{x}_J) - \vec{x}_J \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$$

funzione un po' come la variata e la media

il doppio prodotto vettoriale ha componenti nelle direzioni dei vettori tra parentesi (4)

Ora prendiamo l'equazione di moto per \vec{x}_j e moltiplichiamola scalaramente per \vec{x}_j (cioè proiettiamo tale equazione lungo la direzione di \vec{x}_j), avremo:

$$\vec{x}_j \cdot \ddot{\vec{x}}_j + \underbrace{2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}_j) \cdot \dot{\vec{x}}_j}_{\text{è zero}} = -[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_j)] \cdot \dot{\vec{x}}_j + \underbrace{\left(m_1 \frac{\vec{S}_2}{S_2^3} + m_2 \frac{\vec{S}_1}{S_1^3} \right) \cdot \dot{\vec{x}}_j}_{\vec{F}(\vec{x}_j) \cdot \dot{\vec{x}}_j}$$

quindi abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{x}}_j^2 \right) = - \frac{d}{dt} \left(U(\vec{x}_j) \right)$$

$$= - \nabla U(\vec{x}_j) \cdot \dot{\vec{x}}_j$$

per definizione di derivata composta, questo è $\frac{d}{dt} U(\vec{x}_j)$

integrando queste 2 quantità rispetto al tempo abbiamo:

$$\frac{1}{2} (\dot{\vec{x}}_j)^2 = - U(\vec{x}_j) + \text{cost.}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} (\dot{\vec{x}}_j)^2 + U(\vec{x}_j) = \text{cost.}}$$

Il primo termine di questa equazione è l'energia meccanica nel sistema rotante e prende il nome di integrale di Jacobi. Proviamo a scrivere tale integrale nel sistema inerziale istantaneamente allineato con quello rotante, si avrà:

$$\vec{x}'_J = \vec{x}_J$$

$$\dot{\vec{x}}_J = \dot{\vec{x}}'_J - \vec{\omega} \times \vec{x}_J$$

da qui sostituendo nell'integrale avremo:

$$\frac{1}{2} (\dot{\vec{x}}'_J - \vec{\omega} \times \vec{x}_J)^2 + U'_t(\vec{x}'_J) = \text{cost.}$$

da questo termine conviene scorporare la quantità legata al potenziale della forza centrifuga.

$$\frac{1}{2} (\dot{\vec{x}}'_J - \vec{\omega} \times \vec{x}_J)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{x}_J)^2 + U' = \text{cost.}$$

$$\frac{1}{2} (\dot{\vec{x}}'_J)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{x}_J)^2 - \frac{1}{2} 2 \dot{\vec{x}}'_J \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}_J) - \frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{x}_J)^2 + U'$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{\vec{x}}'_J)^2 - \frac{1}{2} 2 \dot{\vec{x}}'_J \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}_J) + U' = \text{cost.}$$

operando permutazione circolare:

$$-\vec{\omega} \cdot (\vec{x}_J \times \dot{\vec{x}}'_J) =$$

$$= -\vec{\omega} \cdot (\dot{\vec{x}}'_J \times \vec{x}_J)$$

\vec{L} momento angolare specifico

$$\frac{1}{2} (\dot{\vec{x}}'_J)^2 + U' - \vec{\omega} \cdot \vec{L} =$$

energia meccanica nel sistema inerziale specifica \vec{E}

$$= \vec{E} - \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \text{cost.}$$

da qui la massa M_3 che si muove nel campo gravitazionale delle

2 primarie non conserva né l'energia né il momento angolare, ma l'integrale

di Jacobi che è una loro combinazione (6)

Vediamo ora una interessante proprietà che si ha quando tra le due primarie $M_2 \ll M_1$.
 (si pensi ad una cometa, m_3 , nel sistema Sole - Giove con la massa del primo molto più grande).

Se il terzo corpo si trova sufficientemente lontano da m_2 possiamo studiare il suo moto come dipendente dalla sola M_1 e supporre la sua orbita ellittica con un fuoco occupato da M_1 .
 Possiamo così scrivere per tale moto le note relazioni che caratterizzano il problema

dei 2 corpi
$$\tilde{E} = -\frac{GM}{2a} \quad \tilde{L} = \sqrt{GMa(1-e^2)}$$

detta "i" inclinazione dell'orbita del 3° corpo rispetto al piano dei primari ed essendo

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{a_2^3}}$$

 raggio dell'orbita del secondo primario rispetto al primo

si ottiene che l'integrale di Jacobi si scrive:

$$C = -\frac{GM}{2a} - \sqrt{\frac{GM}{a_2^3}} \cdot \sqrt{GMa(1-e^2)} \cdot \cos(i)$$

$$= -\frac{GM}{2a_2} \left(\frac{a_2}{a} - 2 \cos i \sqrt{\frac{a}{a_2}(1-e^2)} \right)$$

T_p

l'angolo tra $\vec{\omega}$ ed \vec{L} è proprio "i"

(4)

$$C = -\frac{GM}{2a_2} \cdot T_p$$

si dice parametro di Tisserand ed è facilmente calcolabile noti gli elementi orbitali del 3° corpo.

L'importanza di tale parametro è che esso è proporzionale all'integrale di Jacobi, per cui resta costante anche dopo che il 3° corpo ha avuto incontri ravvicinati con una delle due primarie. Tale incontro muterà sensibilmente l'orbita del terzo corpo ma lascerà invariato il parametro di Tisserand (cio' per esempio consente di capire se una cometa avvistata lo è già stata prima e magari ha solo modificato la sua orbita per un incontro ravvicinato con Giove).

Ora è necessario effettuare un passo avanti nello studio condotto, in particolare scalare le unità di misura di lunghezza, massa e tempo in modo che sia $S_{30}^2 = 1$, $M = 1$, $\omega = 1$ (si noti che tale scelta è coerente con l'aver posto $G = 1$ all'inizio dello studio essendo:

$$(\ddot{\vec{S}}_3)_J = -GM \frac{(\vec{S}_3)_J}{S_3^3}$$

l'unica accelerazione è quella centripeta per cui:

(8)

$$\omega^2 S_{3,0} = \frac{GM}{S_{3,0}^2} \rightarrow G = \frac{\omega^2 S_{3,0}^3}{M}$$

da cui segue
che nell'
ipotesi posta
G resta 1

Si definisce poi un altro
parametro che ci indica quanto diverse sono le
masse:

$$\gamma = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{si noti che } \gamma > 0 \text{ avendo})$$

supposto $m_1 > m_2$

E' immediato verificare che risulta:

$$m_1 = \frac{1}{2}(1 + \gamma) \quad \text{ed} \quad m_2 = \frac{1}{2}(1 - \gamma)$$

si ricorda che
si è posto
 $M = m_1 + m_2 = 1$

Ricordiamo ora l'espressione
del potenziale:

$$U(\vec{x}_j) = -\frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{x}_j)^2 - \frac{m_1}{S_1} - \frac{m_2}{S_2}$$

se ci mettiamo in corrispondenza delle due
masse primarie ($S_1 \rightarrow 0$ o $S_2 \rightarrow 0$) è evidente
che il potenziale tende a $-\infty$. Ciò significa
che muovendosi da una massa all'altra il
potenziale dovrà risalire, presentare un
punto di sella e poi ridiscendere. Inoltre
anche quando $x_j \rightarrow \infty$, per la presenza del
termine centrifugo, il potenziale andrà a
 $-\infty$, quindi lungo la congiungente le 2
masse ci saranno altri 2 punti di sella
esterni alle masse.

In fine ci sono altri 2 punti di minimo fuori dall'asse che unisce le 2 masse. Cinque punti in totale detti punti Lagrangiani o di librazione. Nei punti stazionari del potenziale, il gradiente è pari al vettore nullo, per cui è nulla la forza efficace e/o si tratta di un punto di equilibrio (se la terza massa si trovasse in quiete in uno di quei punti si resterebbe per sempre).

La prima cosa che dobbiamo osservare è che tutti i punti di equilibrio si trovano nel piano dei "primari". Supponiamo infatti che sia zero la forza efficace:

$$\vec{F}(\vec{x}_3) = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_3) - m_1 \frac{\vec{s}_2}{s_2^3} - m_2 \frac{\vec{s}_1}{s_1^3} = 0$$

si ricorre che risulta $\vec{s}_2 = \vec{x}_3 + m_2 \vec{s}_{3,0}$ ed

$$\vec{s}_1 = \vec{x}_3 - m_1 \vec{s}_{3,0}$$

il vettore $\vec{\omega}$ inoltre è normale al piano dei primari (ovvero al piano dove si sviluppa la loro traiettoria circolare), ovvero

$$\vec{\omega} \cdot \vec{s}_{3,0} = 0$$

vettore
che da m_1 va ad
 m_2 all'istante $t=0$

(10)

Ora si ragiona sulla quantità $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_J)$ tale vettore è di sicuro perpendicolare ad $\vec{\omega}$, per cui il prodotto scalare con $\vec{\omega}$ è nullo:

$$\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_J)] = 0$$

N.B.: questa relazione vale solo se \vec{x}_J è fuori dal piano dei primari

moltiplicando scalarmemente per $\vec{\omega}$ i termini dell'equazione della forza efficace, avremo:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{F} = - \left(\frac{m_1}{S_2^3} + \frac{m_2}{S_1^3} \right) \vec{\omega} \cdot \vec{x}_J$$

questo termine è lo sviluppo di

$$- m_1 \frac{\vec{S}_2}{S_2^3} - m_2 \frac{\vec{S}_1}{S_1^3} =$$

$$- m_1 \frac{(\vec{x}_J + m_2 \vec{S}_{30})}{S_2^3} - m_2 \frac{(\vec{x}_J - m_1 \vec{S}_{30})}{S_1^3}$$

se $\vec{F} = \vec{0}$ per ipotesi, segue che:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{x}_J = 0$$

questa relazione può essere vera solo se \vec{x}_J appartiene al piano delle stelle primarie, se si suppone che ciò non sia vero l'unica possibilità è $\vec{x}_J = \vec{0}$. (come solitamente dimostrano, tutti i punti con $\vec{F} = \vec{0}$ sono complanari ai primari)

Tra le soluzioni vi sono quindi anche le versioni ristrette delle soluzioni generali di Lagrange ed Eulero.

Con riferimento alla soluzione triangolare di Lagrange, possiamo affermare dell'esistenza di 2 punti di equilibrio, che chiameremo L_4 ed L_5 , i quali si trovano ai vertici di due triangoli equilateri tali che:

$$\vec{S}_1^2 = \vec{S}_2^2 = \vec{S}_{3,0}^2$$

Differentemente le soluzioni di Eulero propongono 3 possibilità a seconda di quale delle tre masse non appartiene al sistema primario, diciamo queste soluzioni L_1, L_2 ed L_3 , con L_1 soluzione nel caso di massa centrale più piccola, L_2 se la massa più piccola è esterna ad m_2 , L_3 se è esterna ad m_1 .

Queste soluzioni sono radici di un polinomio di quinto grado per cui è impossibile dare una espressione.

Nel limite $m_2 \ll m_1$

si ha:

$$\vec{L}_1 = \vec{S}_3 \left(1 - \sqrt[3]{\frac{m_2}{3m_1}} \right)$$

$$\vec{L}_2 = \vec{S}_3 \left(1 + \sqrt[3]{\frac{m_2}{3m_1}} \right)$$

$$\vec{L}_3 = -\vec{S}_3 \left(1 + \frac{5m_2}{12m_1} \right)$$

Stabilità dei punti Lagrangiani

La teoria delle equazioni differenziali ci dice che condizione necessaria per la stabilità è che l'approssimazione linearizzata dell'equazione di moto:

$$\ddot{\vec{x}}_j + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}_j = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) - \left(\mu_1 \frac{\ddot{s}_2}{s_2^3} + \mu_2 \frac{\ddot{s}_1}{s_1^3} \right)$$

dia luogo a moti stabili

(attenzione si tratta di una condizione necessaria, la sufficienza può essere discussa solo in alcuni particolari casi)

Cominciamo a studiare la stabilità in L_4 ed L_5 , in particolare analizziamo l'andamento della forza efficace in prossimità di \vec{x}_{eq} : $\vec{x} = \vec{x}_{eq} + \vec{\varepsilon}$

effettuiamo uno sviluppo in serie di Taylor per $\vec{F}(\vec{x})$:

$$\vec{F}(\vec{x}_{eq} + \vec{\varepsilon}) = \vec{F}(\vec{x}_{eq}) + \left. \nabla \vec{F}(\vec{x}) \right|_{\vec{x}_{eq}} \cdot \vec{\varepsilon} + \dots$$

se sviluppiamo l'equazione del

moto al 1° ordine di $\vec{\varepsilon}$, essa diventa:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{\varepsilon}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\varepsilon}} &= -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}) - \left(\frac{\mu_1}{s_2^3} + \frac{\mu_2}{s_1^3} \right) \vec{\varepsilon} + \\ &+ 3 \cdot \left(\mu_1 \frac{\vec{s}_2 \cdot \vec{\varepsilon}}{s_2^5} \cdot \vec{s}_2 + \mu_2 \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{\varepsilon}}{s_1^5} \cdot \vec{s}_1 \right) \end{aligned}$$

dove $\vec{S}_2 = \vec{X}_{eq} + m_2 \vec{S}_{3,0}$ e $\vec{S}_1 = \vec{X}_{eq} - m_1 \vec{S}_{3,0}$

A questo punto è necessario dividere il problema in due parti considerando la componente di \vec{E} perpendicolare al piano dei primari per prima e poi passare alla componente \vec{E} contenuta in tale piano.

Caso 1: prendiamo in esame $E_3 = \vec{\omega} \cdot \vec{E}$

moltiplicando scalaremente

l'equazione di moto in \vec{E} per

$\vec{\omega}$ (cioè considerando la sola

componente normale al piano), essa si

semplifica in maniera drastica:

$$\ddot{E}_3 = - \left(\frac{m_1}{S_2^3} + \frac{m_2}{S_1^3} \right) \cdot E_3$$

questa è
l'equazione
di un oscillatore

armonico, visto che
il termine tra parentesi
è un positivo, il che ci
permette di concludere che

i punti lagrangiani sono

stabili rispetto a spostamenti

perpendicolari al piano dei primari

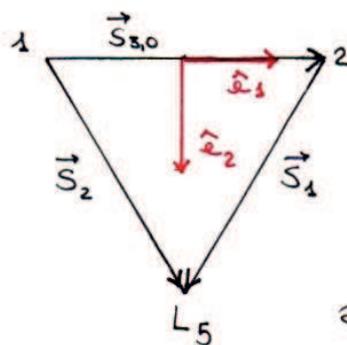
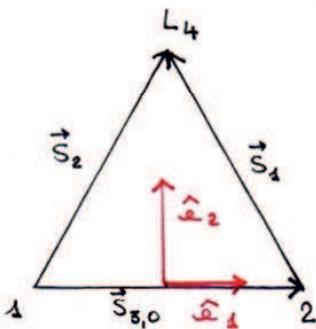
$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ si ha che:

$$(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\nabla})^2 U(\vec{x}_{eq}) = -\vec{\varepsilon} \cdot (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F}(\vec{x}_{eq}) < 0$$

↓
 La "derivata seconda" per ogni direzione $\vec{\varepsilon}$ nel piano dei primari è negativa, per cui in L_4 ed L_5 abbiamo dei punti di punti di massimo del potenziale.

Nonostante tale evidenza L_4 ed L_5 possono essere punti di equilibrio stabile se si verificano opportuni valori delle curve dei primari (cio' *fasce alla presenza del termine di Coriolis*). Per tali punti infatti risulta $s_1 = s_2 = 1$ che sostituiti nell'unico termine che resta porta a:

$$(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F}(\vec{x}_{eq}) = 3 \left(m_1 (\vec{s}_2 \cdot \vec{\varepsilon}) \cdot \vec{s}_2 + m_2 (\vec{s}_1 \cdot \vec{\varepsilon}) \cdot \vec{s}_1 \right)$$



Introduciamo ora due vettori come indicati nella figura a lato: \hat{e}_1 diretto come $\vec{s}_{3,0}$ ed \hat{e}_2 appartenenti al piano

dei primari e perpendicolare ad $\vec{s}_{3,0}$

Cou riferimento al punto L_4 è semplice verificare, essendo il triangolo equilatero, che i vettori \vec{s}_1 ed \vec{s}_2 possono scriversi:

$$\vec{s}_1 = \frac{1}{2} (-\hat{e}_1 + \sqrt{3} \hat{e}_2) \quad \text{ed} \quad \vec{s}_2 = \frac{1}{2} (\hat{e}_1 + \sqrt{3} \hat{e}_2)$$

Risulta così: $\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \sqrt{3} \hat{e}_2$

$$\vec{s}_2 - \vec{s}_1 = \hat{e}_1$$

Visto che stiamo considerando il caso di \vec{E} appartenente al piano dei primari, tale vettore potrà scriversi: $\vec{E} = \varepsilon_1 \hat{e}_1 + \varepsilon_2 \hat{e}_2$

Note le componenti di tutti i vettori possiamo calcolare la componente linearizzata della forza efficace:

$$\begin{aligned} & 3 \left(m_1 (\vec{s}_2 \cdot \vec{E}) \cdot \vec{s}_2 + m_2 (\vec{s}_1 \cdot \vec{E}) \cdot \vec{s}_1 \right) = \\ & = 3 \left(m_1 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_2 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \hat{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{e}_2 \right) + \right. \\ & \quad \left. + m_2 \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_2 \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \hat{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{e}_2 \right) \right) \end{aligned}$$

calcoliamo la componente lungo \hat{e}_1

$$\begin{aligned} & 3 \left(\frac{1}{4} m_1 \varepsilon_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} m_1 \varepsilon_2 + \frac{1}{4} m_2 \varepsilon_1 - \frac{\sqrt{3}}{4} m_2 \varepsilon_2 \right) = \\ & = \frac{3}{4} \left((m_1 + m_2) \varepsilon_1 + \sqrt{3} (m_1 - m_2) \varepsilon_2 \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} \underbrace{(m_1 + m_2)}_1 \left(\varepsilon_1 + \sqrt{3} \underbrace{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}_\gamma \varepsilon_2 \right) = \frac{3}{4} (\varepsilon_1 + \sqrt{3} \gamma \varepsilon_2)$$

analogaemente possiamo calcolare la componente lungo \hat{e}_2

$$\begin{aligned} & 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} m_1 \varepsilon_1 + \frac{3}{4} m_1 \varepsilon_2 - \frac{\sqrt{3}}{4} m_2 \varepsilon_1 + \frac{3}{4} m_2 \varepsilon_2 \right) = \\ &= \frac{3}{4} \left(\sqrt{3} (m_1 - m_2) \varepsilon_1 + 3 (m_1 + m_2) \varepsilon_2 \right) = \\ &= \frac{3}{4} (m_1 + m_2) \left(\sqrt{3} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \varepsilon_1 + 3 \varepsilon_2 \right) = \frac{3}{4} (\sqrt{3} \gamma \varepsilon_1 + 3 \varepsilon_2) \end{aligned}$$

l'equazione di moto diventa così:

$$\ddot{\vec{E}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{E}} = \frac{3}{4} \hat{e}_1 (\varepsilon_1 + \gamma \varepsilon_2 \sqrt{3}) + \frac{3}{4} \hat{e}_2 (3\varepsilon_2 + \gamma \varepsilon_1 \sqrt{3})$$

proiettiamo questa equazione lungo \hat{e}_1 ed \hat{e}_2 ,

ricordando che $\vec{\omega} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dot{\varepsilon}_1 & \dot{\varepsilon}_2 & 0 \end{vmatrix} = -\dot{\varepsilon}_2 \hat{e}_1 + \dot{\varepsilon}_1 \hat{e}_2$

$$\begin{cases} \ddot{\varepsilon}_1 - 2\dot{\varepsilon}_2 = \frac{3}{4} (\varepsilon_1 + \gamma \varepsilon_2 \sqrt{3}) \\ \ddot{\varepsilon}_2 + 2\dot{\varepsilon}_1 = \frac{3}{4} (3\varepsilon_2 + \gamma \varepsilon_1 \sqrt{3}) \end{cases}$$

questo è un sistema di 2 equazioni differenziali accoppiate.

La soluzione si trova supponendo che ε_2 ed ε_1 abbiano un comportamento armonico:

$$\varepsilon_1 = a e^{i\lambda t} \quad \text{ed} \quad \varepsilon_2 = b e^{i\lambda t}$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = a i \lambda e^{i\lambda t} \quad \ddot{\varepsilon}_1 = -a \lambda^2 e^{i\lambda t}$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = b i \lambda e^{i\lambda t} \quad \ddot{\varepsilon}_2 = -b \lambda^2 e^{i\lambda t}$$

questo approccio
trasforma il
sistema in
algebrico nelle
variabili "a" e "b".

$$\begin{cases} -a \lambda^2 e^{i\lambda t} - 2b i \lambda e^{i\lambda t} = \frac{3}{4} (a e^{i\lambda t} + \gamma \sqrt{3} b e^{i\lambda t}) \\ -b \lambda^2 e^{i\lambda t} + 2a i \lambda e^{i\lambda t} = \frac{3}{4} (3b e^{i\lambda t} + \gamma \sqrt{3} a e^{i\lambda t}) \end{cases}$$

che ordinate
diventano:

$$\begin{cases} -\left(\lambda^2 + \frac{3}{4}\right)a - \left(2i\lambda + \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\right)b = 0 \\ \left(2i\lambda - \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\right)a - \left(\lambda^2 + \frac{9}{4}\right)b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\left(\lambda^2 + \frac{3}{4}\right)a - \left(2i\lambda + \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\right)b = 0 \\ \left(2i\lambda - \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\right)a - \left(\lambda^2 + \frac{9}{4}\right)b = 0 \end{cases}$$

questo sistema
ha soluzioni non
banali solo se il

determinante della
matrice dei coefficienti
è nullo.

$$\left(\lambda^2 + \frac{3}{4}\right)\left(\lambda^2 + \frac{9}{4}\right) + \left(4\lambda^2 i^2 - \frac{27}{16}\gamma^2\right) = 0$$

$$\lambda^4 + \frac{12}{4}\lambda^2 + \frac{27}{16} - 4\lambda^2 - \frac{27}{16}\gamma^2 = 0$$

$$16\lambda^4 + 48\lambda^2 + 27 - 64\lambda^2 - 27\gamma^2 = 0$$

$$16\lambda^4 - 16\lambda^2 + 27(1 - \gamma^2) = 0$$

si risolve
l'equazione
biquadratica,
ottenendo

$$\lambda^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 432(1 - \gamma^2)}}{16}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{16} \sqrt{4 - 27 + 27\gamma^2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \sqrt{27\gamma^2 - 23}$$

si ricorda che γ^2 è un numero compreso tra 0 e 1
che misura la differenza tra le masse del

primario. Se la radice quadrata esiste, dunque, il risultato per λ^2 è sempre non negativo (al limite per $f \approx 1 \rightarrow m_1 \gg m_2$ si ha

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \sqrt{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} < \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$$

questi sono i valori limite per λ^2 che quindi può variare anche entro tra 0 e 1)

Quindi per $27\gamma^2 - 23 \geq 0$

" λ " assume 4 valori reali distinti. La condizione

è quindi: $27\gamma^2 \geq 23 \rightarrow \gamma^2 \geq \frac{23}{27} \rightarrow \gamma \geq \sqrt{\frac{23}{27}} = \underbrace{0,922958}_{\gamma_{lim}}$

Dunque si conclude che se

$$\gamma \geq \gamma_{lim} \quad \left(\text{il che significa: } \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \geq \gamma_{lim} \right)$$

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 &\geq \gamma_{lim} m_1 + \gamma_{lim} m_2 \\ m_1 &\geq \frac{1 + \gamma_{lim}}{1 - \gamma_{lim}} m_2 \approx 24,96 m_2 \end{aligned}$$

i moti relativi alle due componenti E_1 ed E_2 sono armonici e quindi stabili. La stessa condizione di stabilità si ottiene, come ovvio per simmetria, anche per L_5 .

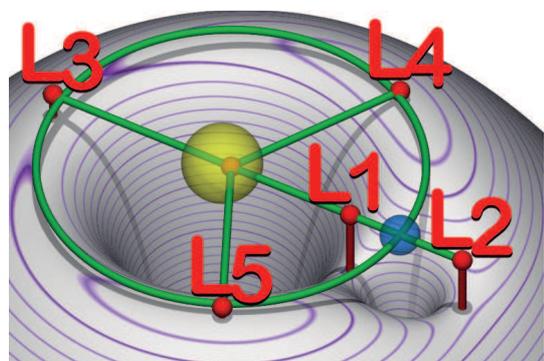
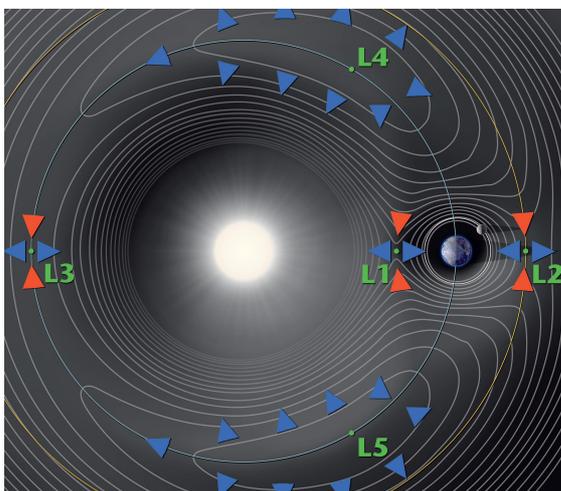
Per i punti lagrangiani L_1, L_2 ed L_3 si può portare avanti lo stesso studio (inserendo gli opportuni valori di s_1 ed s_2), stavolta cioè che si verifica è che λ^2 ha sempre due (20)

radici reali, tuttavia una è positiva e l'altra è negativa. La radice positiva dà vita ad un moto ellittico retrogrado (esattamente come in L_4 , la combinazione di moti armonici di diversa ampiezza produce una traiettoria ellittica), il problema è la soluzione negativa che produce un esponenziale con λ immaginario, il quale moltiplicato per "i" ($e^{i\lambda t}$) fornisce un esponenziale divergente. Dunque alcune condizioni iniziali specifiche possono "attivare" il solo moto ellittico, tuttavia in generale tali punti vanno considerati "instabili". Nella pratica se un oggetto resta intrappolato in una traiettoria ellittica intorno ad un punto lagrangiano collinare basta una piccola perturbazione per allontanarlo definitivamente.

C'è da osservare in ogni caso che le componenti esponenziali hanno coefficienti che dipendono dalle condizioni iniziali, per cui con opportuna scelta si possono rendere prossime allo zero e fare in modo che siano i valori di "1"

stabili a controllare la soluzione. In tali condizioni il terzo corpo resta in un'orbita stabile per molto tempo (si parla di orbite di Lissajous). Altra cosa rilevante è che se vogliamo far stationare un corpo (una navicella spaziale per esempio) nell'intorno di una posizione, è comunque conveniente che tale punto sia un Lagrangiano collineare perché serve meno energia per raggiungere tale obiettivo.

I punti Lagrangiani del sistema Terra-Sole sono utilizzati per avere orbite stabili, per esempio nel punto L_1 è piazzato il telescopio SOHO, mentre in L_2 ci sono molti satelliti WMAP, Planck, Gaia. Un'idea sulle possibili orbite accessibili per diversi valori energetici si possono avere guardando le curve di potenziale efficace:



$$U(\vec{x}_j) = -\frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{x}_j)^2 - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2}$$

$$-\frac{1}{2} \omega^2 x_j^2$$

a grandi distanze

è il primo termine che

controlla il potenziale e

il potenziale decresce con x^2

(le curve di livello sono circolari)

Anche vicino alle masse le curve sono circolari, mentre i punti L_4 ed L_5 corrispondono a punti di massimo. I 3 punti collineari, invece, sono punti di sella.

Per verificare questa ultima affermazione si deve calcolare $(\vec{E} \cdot \vec{v})^2 \cup [\vec{x}_{eq}]$ ed in particolare

le sue componenti lungo i vettori \hat{e}_1 ed \hat{e}_2

Quello che si troverà è che lungo \hat{e}_1 tale componente sarà negativa per cui il potenziale avrà un massimo, lungo \hat{e}_2 invece si avrà un minimo.

Si osserva che assegnato l'integrale di Jacobi

$$C = \frac{1}{2} (\dot{\vec{x}})^2 + U(\vec{x})$$

il corpo non può andare

oltre la linea di livello indicata con

valore pari a C . Le regioni permesse da

un certo livello energetico si dicono "regioni di Hill" (dal nome dell'astronomo George William Hill il quale per primo dimostrò che la stabilità dell'orbita della luna era legata al fatto che essa si trova su di una linea di livello tutta contenuta nella buca di potenziale della terra).

L'ultima osservazione da fare è di natura "storica", la ricerca di soluzioni periodiche del problema dei 3 corpi nasce con Poincaré, egli affermò che ogni soluzione che ammette degli stati legati è arbitrariamente vicina ad una soluzione periodica, dunque siamo classificate le sole soluzioni periodiche.

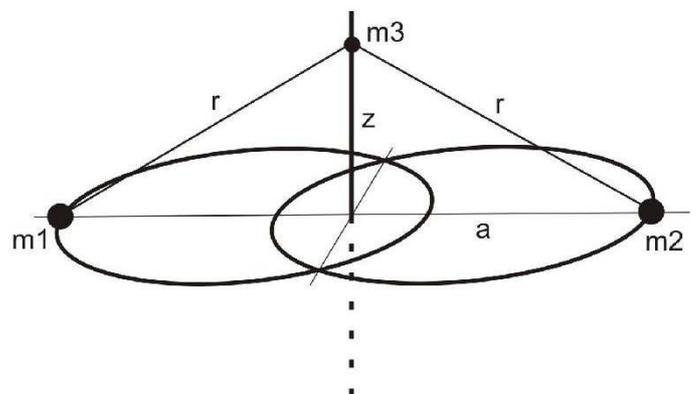
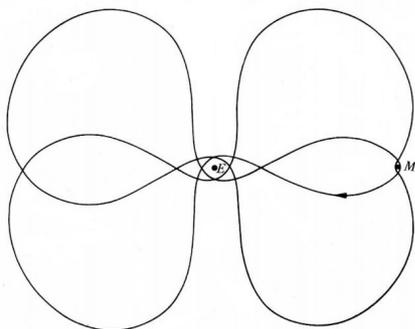
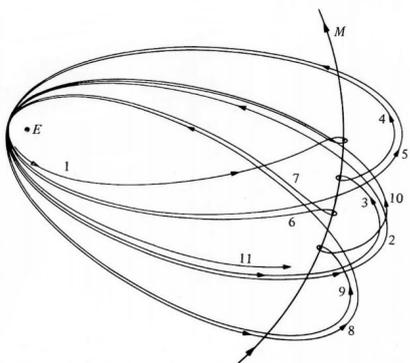
In particolare Poincaré divise le orbite in due specie:

1^a specie: orbite contenute nella buca di potenziale di uno dei due primari.

2^a specie: orbite nel piano primario che si avvicinano ad entrambi i corpi primari.

Hill nel 1877 trovò una soluzione di 1^a specie nella buca di potenziale della Terra nel sistema Sole-Terra, si parla di curva variazionale di Hill. Tale curva è un'ellisse che ha l'asse minore diretto nella direzione dei primari e l'asse maggiore perpendicolare a tale asse. Utilizzando come base tale curva, Hill e Brown ottennero una descrizione di alta precisione del moto della Luna.

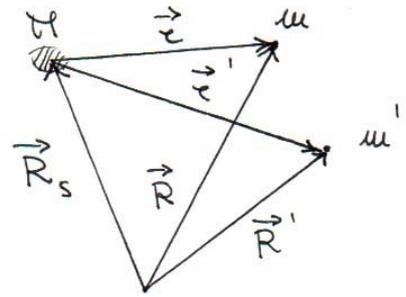
Interessanti due orbite periodiche, la 1^a di seconda specie nel sistema Terra-Luna (Arnstorff 1963) e l'altra data da una binaria più moto oscillatorio del 3^o corpo lungo l'asse baricentrico della binaria in direzione ad essa normale (Sitnikov 1961).



Cenni della teoria delle perturbazioni

In tutti gli sviluppi finora portati avanti relativi
samente al moto dei pianeti nel sistema solare
si sono avanzate le classiche ipotesi del proble-
ma dei 2 corpi in cui la massa del Sole
risulta essere molto maggiore della massa degli
altri corpi. Tale ipotesi è ampiamente giustificata,
correzioni sensibili ci sono solo nel caso in
cui si considerino come pianeti Giove e Saturno,
nel primo caso la correzione sulla 3^a legge di
Keplero è nell'ordine di $1/2000$ e il baricentro
del sistema di 2 corpi è spostato dal centro
del Sole di un raggio solare. Di tale effetto
non si può non tener conto quando si studia
l'interazione tra il Sole e gli altri pianeti
e trattandosi di piccole variazioni è lecito
studiare il fenomeno con riferimento a
tecniche di teoria perturbativa.

Consideriamo un sistema composto dal Sole e da due pianeti e scriviamo le equazioni di moto con riferimento alle indicazioni della figura a lato:



$$\begin{cases} \ddot{\vec{R}}_s = Gm \frac{\vec{r}}{r^3} + Gm' \frac{\vec{r}'}{r'^3} \\ \ddot{\vec{R}} = -GM \frac{\vec{r}}{r^3} + Gm' \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \\ \ddot{\vec{R}}' = -GM \frac{\vec{r}'}{r'^3} + Gm \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{cases}$$

Queste equazioni possono essere scritte con riferimento alle posizioni relative dei pianeti rispetto

al sole ricordando che

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_s \quad \text{ed} \quad \vec{r}' = \vec{R}' - \vec{R}_s, \quad \text{e di conseguenza}$$

sottraendo alla 2^a e 3^a equazione la 1^a:

$$\ddot{\vec{r}} = \underbrace{-G(m+M)}_{\mu} \frac{\vec{r}}{r^3} + \underbrace{Gm'}_{\tilde{\mu}_1} \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}'}{r'^3} \right)$$

$$\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{-G(m'+M)}_{\mu'} \frac{\vec{r}'}{r'^3} + \underbrace{Gm}_{\tilde{\mu}_2} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

→ questi 2 termini rappresentano le forze

"disturbatrici" e

si possono ottenere

come gradiente di

opportuni potenziali R ed R'

Riscriviamo quindi le equazioni in forma compatta

$$\rho \ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{\nabla} R$$

$$\rho' \ddot{\vec{r}}' = -\mu' \frac{\vec{r}'}{r'^3} + \vec{\nabla} R'$$

A questo punto consideriamo una di queste equazioni e proiettiamola lungo un generico asse "i-esimo".

$$\ddot{r}_i + \mu \frac{r_i}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial r_i}$$

in assenza di termine perturbativo questa equazione produce la classica orbita kepleriana con i suoi 6 elementi orbitali ($a, e, i, \Omega, \omega, \varpi$)

Evidentemente l'orbita non sarà più kepleriana tuttavia istante per istante è possibile calcolare i 6 elementi orbitali, C_i , che caratterizzerebbero l'orbita in tali condizioni iniziali se non ci fosse il termine perturbativo. Su ogni istante, dunque, noti i vettori \vec{r} ed $\dot{\vec{r}}$ (6 parametri) è possibile calcolare i 6 " C_i ", che si dicono elementi osculatori (l'orbita kepleriana si dice "orbita osculatrice")

Essendo il sistema biunivoco (6 vs 6) esso è invertibile per cui noti i parametri osculatori è possibile definire istante per

(3)

istante posizione e velocità: $\vec{r} = \vec{f}(c_1, \dots, c_6, t)$
 $\dot{\vec{r}} = \vec{g}(c_1, \dots, c_6, t)$

ovviamente date risultare,
 componente per componente, che

" g_i " sia la derivata di " f_i " : $g_i = \frac{\partial f_i}{\partial t}$

Attenzione questa uguaglianza

vale con riferimento alla derivata parziale,

l'espressione generale della derivata di " r " è:

$$\underbrace{\frac{dr_i}{dt}}_{g_i} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \underbrace{\sum_{k=1}^6 \frac{\partial f_i}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt}}_{\vec{r} \text{ è nulla!}}$$

è nulla!
 caratterizzazione
 dell'orbita
 osculatrice.

ma il 1° membro
 di questa espressione
 per definizione è
 proprio " g_i " il che
 equivale a dire che
 la sommatoria deve essere
 nulla.

Eseguendo la stessa operazione con " g " otterremo
 la derivata seconda di " r ":

$$\underbrace{\frac{d^2 r_i}{dt^2}}_{\ddot{r}_i} = \frac{\partial g_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^6 \frac{\partial g_i}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt}$$

$\ddot{r}_i \rightarrow$ può essere sostituita nella generica
 equazione di moto ricordando che

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2}$$

Si ottiene così:

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2} + p \cdot \frac{f_i}{p^3} + \sum_{k=1}^6 \frac{\partial g_i}{\partial c_k} \cdot \frac{dc_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x_i}$$

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

Questa equazione se ora spezzata in 2 parti nel senso che: i primi due termini sono nulli perché $x_i \equiv p_i$ e quindi si tratta della caratterizzazione della

traiettoria osculatrice, dunque il

3° addendo deve essere uguale al 2° termine.

Quindi il sistema di 6 equazioni si può riscrivere come:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{k=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} = 0 \\ \sum_{k=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial c_k} \cdot \frac{dc_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x_i} \end{array} \right\}$$

L'idea adesso è quella di accoppiare questi 2 insieme di equazioni moltiplicando i termini della prima sommatoria per " $-\frac{\partial x_i}{\partial c_j}$ " e la seconda per " $\frac{\partial x_i}{\partial c_j}$ ", dopodiché si sommano

i termini omologhi considerando che si presenta una nuova sommatoria sul termine "i" relativamente alle sue 3 componenti:

$$\sum_{i=1}^3 \left(- \sum_{k=1}^6 \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} + \sum_{k=1}^6 \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^3 \underbrace{\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}}_{\partial R / \partial c_j} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_j}$$

in questo termine
 è presente una
 quantità che moltiplica
 scalarmente dc_k/dt , ovvero:

$$[c_j, c_k] = \sum_{i=1}^3 \left(- \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_k} + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_k} \right)$$

questa quantità si chiama

parentesi di Lagrange

→ si tratta di una matrice
 che presenta
 36 termini (j, k
 variano da 1 a 6).

È facile verificare dall'espressione che la
 parentesi di Lagrange è antisimmetrica per cui
 i termini indipendenti scendono a 15.

$$\begin{cases} [c_j, c_k] = - [c_k, c_j] \\ [c_j, c_j] = 0 \end{cases}$$

È possibile scrivere
 la combinazione delle
 2 equazioni come:

$$\sum_{k=1}^6 [c_j, c_k] \frac{dc_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_j}$$

Quello che è fondamentale capire è che le parentesi di Lagrange non dipendono dal tempo,

(6)

nonostante contengano quantità che prese singolarmente risultano funzione del tempo. Tale proprietà, che ora dimostreremo, significa che questi elementi possono essere calcolati in un qualsiasi istante di tempo.

Per dimostrarlo partiamo da:

$$\frac{\partial}{\partial t} [c_j, c_k] = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_k} + \frac{\partial x_i}{\partial c_j} \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial c_k} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_k} - \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial c_j} \frac{\partial x_i}{\partial c_k} \right) =$$

a questo punto aggiungiamo e sottraiamo la derivata mista: $\frac{\partial^2 x_i}{\partial c_j \partial c_k} \cdot \ddot{x}_i$ ed evidenziamo una volta la derivata rispetto a c_j e una volta quella rispetto a c_k

$$= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial c_j} \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial c_k} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial c_j \partial c_k} \cdot \ddot{x}_i + \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial c_j} \frac{\partial x_i}{\partial c_k} - \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_k} - \frac{\partial^2 x_i}{\partial c_j \partial c_k} \cdot \ddot{x}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial c_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial c_j} \cdot \ddot{x}_i \right) - \frac{\partial}{\partial c_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial c_k} \cdot \ddot{x}_i \right) \right)$$

Ora si utilizza l'equazione della dinamica all'ordine zero, ottenendo $\ddot{x}_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ (7)

sostituendo si ottiene:

$$= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial c_k} \underbrace{\left(\frac{\partial c_i}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial c_i} \right)}_{\partial \phi / \partial c_j} - \frac{\partial}{\partial c_j} \underbrace{\left(\frac{\partial c_i}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial c_i} \right)}_{\partial \phi / \partial c_k} \right) = 0$$

che risulta essere nullo per il teorema di Schwarz.

Quello che si riesce a

dimostrare dopo lunghi calcoli è che i termini non nulli delle parentesi di Lagrange sono pari a 6 ed, in particolare, detta "n" la velocità media angolare sferica:

$$[\bar{\lambda}_0, a] = \frac{na}{2} \quad \bar{\lambda}_0 \text{ è la longitudine media all'epoca di riferimento } \bar{\lambda}_0 = \bar{\omega} - \frac{2\pi}{T} \tau$$

$$[\bar{\omega}, a] = -\frac{na}{2} (1 - \sqrt{1-e^2}) \quad \bar{\omega} = \omega + \Omega \text{ longitudine del perielio}$$

$$[\Omega, a] = -\frac{na}{2} \sqrt{1-e^2} (1 - \cos i)$$

$$[\bar{\omega}, e] = -\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$[\Omega, e] = \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} (1 - \cos i)$$

$$[\Omega, i] = -na^2 \sqrt{1-e^2} \cdot \sin i$$

Questi termini possono essere inseriti nelle rispettive equazioni di moto in cui a sinistra insieme ai termini non quelli delle parentesi le derivate rispetto al tempo dei secondi termini della parentesi e a destra le derivate parziali del primo termine della parentesi inteso come variabile di \mathcal{R} . Invertendo tali equazioni si ottiene la derivata temporale degli elementi orbitali rispetto alle parentesi di Lagrange non nulle e alle derivate del termine di perturbazione. Tali equazioni si dicono equazioni planetarie di Lagrange

Risolvere queste equazioni non è per nulla semplice, prima di tutto si introducono le variabili: h, k, p, q funzioni di "e", "i", " $\bar{\omega}$ " e " Ω ", dopodichè si fanno una serie di ipotesi semplificative:

- 1) masse di tutti i pianeti piccole rispetto a quelle del Sole (si conservano solo i termini di 1° ordine relative alle masse dei pianeti)
- 2) eccentricità ed inclinazione dei pianeti principali restano piccole (fermiamo sviluppo al

2° ordine)

3) i termini della funzione disturbatrice che contengono la differenza di 2 anomalie possono essere sviluppati in serie di Fourier

Le soluzioni di questo problema, molto laborioso, evidenziano che la funzione disturbatrice ha termini periodici in seno e coseno multipli della differenza tra φ e φ' e termini che si dicono "secolari" e che non sono periodici. Tali termini crescono nel tempo per cui se vogliamo analizzare tempi lunghi periodici è necessario considerare gli sviluppi fino ai termini quadratici.

Quello che si ottiene è che i termini "a" e "1" non cambiano e variare sono i termini nuovi costruiti $h(e, \bar{w})$, $k(e, \bar{w})$, $p(\Omega, i)$, $q(\Omega, i)$. Se si assegna un pedice "i" per pianeta le equazioni con i termini secolari sono:

Le soluzioni contengono "g" ed "f" che sono gli autovalori delle matrici A e B

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} k_j \\ \frac{dk_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} h_j \\ \frac{dp_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} q_j \\ \frac{dq_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} p_j \end{aligned} \right\}$$

La teoria appena esposta prende il nome di teoria secolare di Laplace-Lagrange. Essa evidenzia che l'autovalore più grande ha un periodo di 50000 anni, inoltre f_5 è nulla, il che segue dalla conservazione del momento angolare. Tale frequenza fornisce il valore di " i " e di " Ω " attorno al quale oscillano i moti dei pianeti.

Ultimo effetto su cui soffermarci è quello della "risonanza delle orbite", quando i periodi presentano rapporti esprimibili con numeri interi (esempi sono Nettuno-Plutone 2:3 e tre dei satelliti di Giove: Io, Europa e Ganimede i cui rapporti sono 4:2:4).

Quello che si dovrebbe osservare è una somma delle perturbazioni, che dovrebbero sommarsi in corrispondenza di un numero di cicli pari al minimo comune multiplo dei numeri naturali.

In generale se vi sono due corpi in risonanza ed uno di essi è molto più massivo, quello meno massivo viene espulso ed esce dalla risonanza. È quello che capita con i "gap di Kirkwood" nella

fascia di asteroidi tra Marte e Giove (corrispondenti a risonanze con il periodo orbitale di Giove) o le divisioni negli anelli di Saturno. Nel caso dei satelliti di Giove o di Nettuno-Plutone ciò non capita per via delle lune simili, infatti il corpo meno massiccio agisce su quello più massiccio riuscendo a neutralizzare l'effetto stabilizzante. Anche molti pianeti fuori dal sistema solare sono in risonanza, si citano i 7 pianeti del sistema Trappist-1.

Cenni di astrofisica

Il primo concetto da dare in questo contesto è quello di magnitudine assoluta, ovvero la magnitudine che misurerebbe un osservatore posto alla distanza standard di 10 pc, ovvero:

$$M = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F}{f_0} \right) \rightarrow \frac{L}{4\pi D^2} \rightarrow \text{con } D=10\text{pc}$$

Se sottraiamo questa quantità alla definizione di magnitudine apparente, avremo:

$$m - M = -2,5 \left(\log_{10} \frac{f}{f_0} - \log_{10} \frac{F}{f_0} \right) =$$

$$= -2,5 \log_{10} \frac{f}{f_0} \cdot \frac{f_0}{F} = -2,5 \log_{10} \frac{f}{F} =$$

$$= -2,5 \log_{10} \frac{\frac{L}{4\pi d^2}}{\frac{L}{4\pi D^2}} = -2,5 \log_{10} \frac{D^2}{d^2} =$$

$$= -5 \log_{10} \frac{D}{d} = 5 \log_{10} \frac{d}{10 \text{ pc}}$$

tutta questa
quantità si dice
modulo di distanza.

come è ovvio
all'aumentare
di "d"
aumenta "m"
(ovvero la stella
appare più
debole)

La magnitudine apparente in genere è indicata con il nome del filtro (per il sole $V = -26,74$) laddove quella assoluta porta la M davanti: $M_V = 4,84$

(1)

Il problema del calcolo della magnitudine assoluta è molto complesso in ragione della difficoltà del calcolo delle distanze e del fenomeno dell'estinzione interstellare di cui parleremo fra poco.

Si definisce indice di colore la differenza tra la magnitudine apparente misurata tra due diverse bande, per esempio il filtro B e quello V dando vita all'indice di colore B-V pari a:

$$(B-V) = m_B - m_V = -2.5 \log_{10} \frac{\int_0^{\infty} \epsilon_{\text{fil B}}(\lambda) f_{\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} \epsilon_{\text{fil V}}(\lambda) f_{\lambda} d\lambda}$$

L'indice di colore misura il rapporto dei flussi stellari nell'intorno delle lunghezze d'onda efficaci delle bande scelte. La stella Vega per definizione ha magnitudine nulla su tutti i filtri per cui ha anche indici di colore tutti nulli, all'occhio umano appare bianca (ad occhio nudo si possono percepire queste differenze, Betelgeuse appare rossa, Rigel blu).

L'indice di colore si riferisce ad una quantità misurata da osservatori terrestri, quindi a ciò che si osserva. In genere la radiazione viaggia in uno spazio molto poco denso, siamo con densità dell'ordine della particella ogni cm^3 ,

(2)

tuttavia ci possono essere delle zone con nubi di gas o polveri in cui la densità è molto più alta. Le particelle assorbono e disperdono la radiazione che quindi si impoverisce in flusso.

In particolare si definisce estinzione nella banda spettrale X, la differenza della magnitudine osservata e di quella che si sarebbe osservata in assenza di polvere:

$$A_x = m(x) - m_0(x)$$

Inoltre la polvere stellare diffonde meglio la luce a più bassa λ , determinando il cosiddetto fenomeno dell'arrossamento. L'arrossamento o l'eccesso del colore X-Y è la differenza tra la magnitudine del colore osservato e quello intrinseco:

$$E(X-Y) = m(X) - m(Y) = A_x - A_y$$

L'eccesso di colore più utilizzato è $E(B-V)$

Nota l'indice intrinseco di colore di un oggetto confrontandolo con il colore osservato possiamo ottenere l'eccesso di colore, e da questo, poiché è nota la fisica della diffusione, ottenere l'estinzione su di una certa banda.

Per esempio nel caso della Via Lattea:

$$A_v = 3,1 E(B-V)$$

L'estinzione va tenuta opportunamente in conto anche nell'ambito della differenza tra magnitudine relativa ed assoluta:

$$m - M = 5 \log_{10} \frac{d}{10 \text{ pc}} + A$$

è facile capire ora come la stima della magnitudine assoluta sia molto complessa in relazione alla difficoltà di calcolare le distanze e di valutare l'effetto di estinzione.

Si noti invece che l'indice di colore riferendosi ad una unica distanza ed avendo un rapporto tra flussi che decadono con stessa legge (quadratica)

Spettroscopia

Si tratta dell'analisi di radiazione elettromagnetica scomposta per lunghezza d'onda (attraverso l'uso di un prisma o di un reticolo di diffrazione). Quello che si ottiene è il grafico di un flusso specifico per intervallo di lunghezza d'onda ($\text{W}/\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}$). Nel guardare tali grafici non si può tacere il fatto che l'energia associata ad una radiazione è quantizzata:

$$E = h \cdot \nu$$

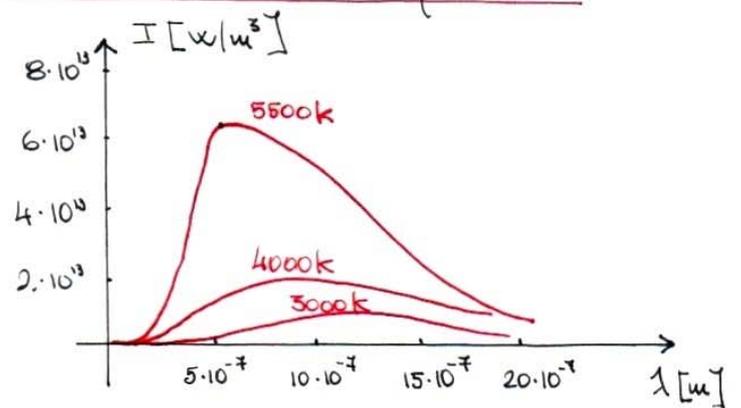
↳ costante di Planck
 $6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

(4)

il che rende la radiazione ad alte frequenze molto energetica e pericolosa.

Le stelle producono radiazione elettromagnetica ed energia, quindi, per fusione nucleare. Sulla superficie esterna la densità è minore che in quella interna e la temperatura costante, dettata dall'equilibrio statistico che si crea lungo tale superficie. Le caratteristiche della radiazione di un corpo che emette ad una certa temperatura è definita dalla distribuzione di corpo nero.

Tale distribuzione è funzione solo della temperatura, in particolare:



1) all'aumento della temperatura il picco si sposta verso valori di λ minori:

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2,998 \cdot 10^{-3} \text{ mK}$$

(legge di Wien)

2) l'energia emessa aumenta con la quarta potenza della temperatura:

$$P = \sigma T^4 \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

(legge di Stefan-Boltzmann) (5)

In prima approssimazione gli spettri delle stelle sono corpi neri a diverse temperature, tuttavia altri fenomeni possono profondamente cambiare gli spettri.

Sappiamo che energia possono essere assorbite o emesse da un atomo nel momento in cui tale energia corrisponde a quella corrispondente ad un salto di livello tra gli stati quantizzati. Dunque solo particolari lunghezze d'onda (o frequenze) possono interagire con gli elementi. Nel caso delle stelle, la parte esterna dell'atmosfera assorbe su frequenze caratteristiche l'energia che gli viene trasferita dal centro, per cui lo spettro della radiazione porta imprese queste righe di assorbimento.

L'analisi dello spettro, quindi, ci può dare informazioni in merito alla composizione dell'atmosfera, pressione, temperatura, \vec{B} e redshift. L'assorbimento può avvenire anche per banda (nel caso di ionizzazione), mentre

in genere non si osservano spettri di emissione.
Gli spettri rappresentano uno strumento efficace
per la classificazione delle stelle, in particolare
si propose un'idea basata sulla similitudine
con la serie di Balmer dell'idrogeno.

Stelle tipo A erano quelle con righe tipo idrogeno
più marcate, poi progressivamente B, C... Si ci rese
poi conto che questa classificazione sottintendeva
una scala di temperatura (le righe di idrogeno
venivano distinte sia da situazioni di alta tem-
peratura → si leggono delle bande visto che il
gas è praticamente ionizzato in toto, sia a
basse temperature dove la quasi totalità degli
atomi sono allo stato fondamentale). La serie a
temperature decrescenti è O B A F G K M, ad
ogni tipo sono poi associati dei numeri da 0 a 9
(Vega è A0, il sole è G2 → 5780K, le stelle
di classe M sono intorno ai 2000K e mostrano
anche bande di assorbimento molecolare)

Si definisce temperatura efficace di una stella quella di un corpo nero sferico avente lo stesso raggio e luminosità bolometrica (cioè misurata con un bolometro, strumento che misura la radiazione elettromagnetica totale) della stella.

Si è visto che:

$$f = \sigma T_{\text{eff}}^4 = \frac{L}{4\pi R^2} \quad \text{da cui}$$

$$T_{\text{eff}} = \sqrt[4]{\frac{L}{4\pi R^2 \cdot \sigma}}$$

è chiaro che questa temperatura si riferisce all'atmosfera, la T interna può essere anche milioni di gradi.

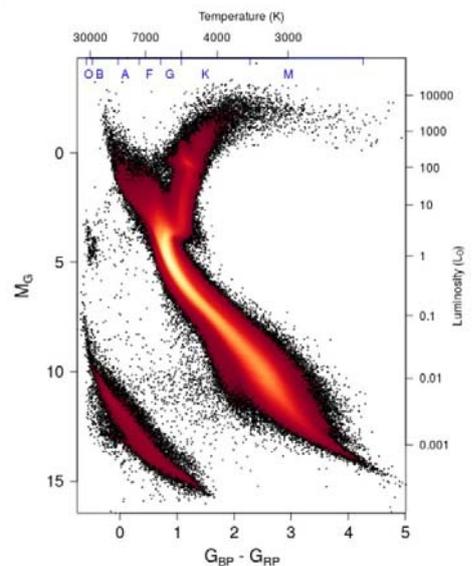
Utilizzando i dati di un numero elevato di stelle Hertzsprung e Russell costruiscono un grafico (diagramma HR) in cui sull'asse delle "x" è piazzata la classe spettrale e sull'asse

delle "y" la magnitudine assoluta (proprietà intrinseca)

Nella versione moderna del grafico sull'asse delle "x"

c'è l'indice di colore

B-V.



Nella sequenza principale di tale diagramma ci sono il 90% delle stelle, incluso il sole, tuttavia si conosceva che stelle della stessa classe (tipo H0) possono avere comportamenti molto diversi (quello che si nota è che le stelle più luminose hanno righe spettrali più sottili e profonde). In ragione di ciò Morgan e Keenan proposero di aggiungere alla classificazione tipo un numero romano da I a V indicante la classe di luminosità:

I supergiganti

II giganti brillanti

III giganti

IV subgiganti

V nane

Tutte le stelle della sequenza principale sono "nane" (il sole è una nana gialla), le nane

bianche per la peculiarità che i loro spettri non rientrano

in questa classificazione

Un'idea di utilizzo del diagramma HR è quello che, studiato con grande precisione lo spettro di una stella, possiamo posizionarla nel diagramma HR e leggere la magnitudine assoluta. Misurata la magnitudine relativa si calcola il fattore di distanza e quindi la distanza "d" della stella.

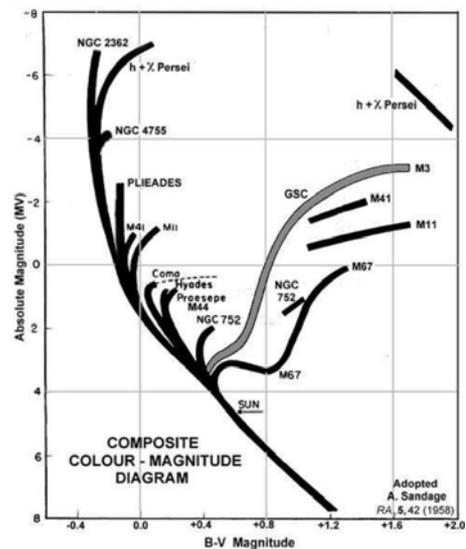
Si parla di parallasse spettroscopica, si tratta di un metodo molto impreciso che serve a fornire unicamente un ordine di grandezza per "d".
Lo studio del diagramma HR fornisce delle indicazioni fondamentali sullo sviluppo e la vita di una stella.

Lo studio delle nane delle stelle binarie ha evidenziato come il parametro che distingue le stelle nella sequenza principale è la massa, maggiore è la massa, maggiore è la luminosità.
Visto che la sequenza principale è molto popolata possiamo concludere che la maggior parte del tempo le stelle la passano nella sequenza principale, alla fine della loro vita o si espandono e raffreddano diventando giganti rosse, oppure improvvisamente si contraggono. Tra queste ultime le meno massive diventano nane bianche, le più massive o pulsar (stelle di neutroni che emettono onde radio a frequenze regolari) oppure buchi neri.

Tutte le stelle hanno origine dal collasso gravitazionale di nubi interstellari. Grandi

nebulose danno vita a migliaia di stelle, formando ammassi stellari aperti. Il grafico CMD (ovvero la versione di HR con l'indice di colore) in questo caso può essere anche tracciato con riferimento alla magnitudine apparente, poiché le stelle si trovano praticamente alla stessa distanza la transizione comporta semplicemente una traslazione del diagramma che non muta la sua forma.

Nel tipico diagramma di un ammasso aperto, che si riporta a lato, si vede che la sequenza principale è tagliata superiormente per ogni ammasso considerato, il



che è spiegabile supponendo che le stelle più luminose e calde muoiano prima. Dunque il cut-off del ramo è anche una indicazione sull'età dell'ammasso (più il taglio è basso più l'ammasso è vecchio).

Oltre agli ammassi aperti, che si formano a tutt'oggi nella Via Lattea, si osservano anche

ammassi molto più densi in forma di alone sferico. Si tratta degli ammassi globulari, oggetti vecchissimi nell'ordine dei 12-13 miliardi di anni in base ai dati della sequenza principale. Un forte impulso all'astrofisica è venuto dall'analisi delle pulsazioni delle Cefeidi, si tratta di un gruppo di stelle molto brillanti nella nube di Magellano per le quali si è riuscito a verificare una relazione tra periodo e luminosità. Calibrata questa relazione sulle Cefeidi vicine, per le quali è possibile misurare la parallasse, è possibile passare da periodo a magnitudine assoluta e da questa alla relativa, che, grazie alla taratura, consente di ottenere una scala ottica delle distanze.

Diciamo infine qualcosa sulle Galassie, la Via Lattea ha un diametro di 33 kpc e possiede 300 miliardi di stelle, la galassia più vicina è M31 in Andromeda che si trova a 760 kpc. Hubble ha classificato le galassie in 5 tipi: lenticolari, ellittiche, a spirale, a spirale

barrata e irregolari. Le ellittiche sono classificate da E0 ad E7 a seconda dell'ellitticità, quelle a spirale si distinguono in Sa, Sb ed Sc in base a quanto le braccia sono avvolte, quelle a spirale barrata SBA fino a SBC, quelle irregolari in Irr I e Irr II

Quando si va oltre i 20 kpc le Cefeidi non bastano più, si utilizzano metodi diversi, detti indicatori secondari. Ognuno dei metodi per poter essere calibrato deve sovrapporsi ad intervalli di distanza in cui siano disponibili metodi affidabili. Ovviamente si tratta di metodi in cui se si ha un errore sistematico nelle brevi distanze questo errore si propaga nelle valutazioni di distanze più grandi.

Hubble si accorse che galassie più lontane si muovevano di moto radiale sempre maggiore (moto radiale che può essere ottenuto dal $\Delta\lambda$ redshift di cui si è parlato per le binarie spettroscopiche), egli propose quindi la seguente legge:

(43)

$$v = H_0 \cdot d$$

$$H_0 = 67 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{\text{Mpc}}$$

questa ci dice che ogni Mpc
che si aggiunge alla distanza
 $H_0 \cdot d = v$, la velocità aumenta
di 67 km/sec

Sembra dunque che il nostro Universo sia in
espansione e anzi alcune osservazioni di Supernovae
indicano che stia addirittura accelerando...