

## Applicazioni del Teorema di Gauss

Abbiamo capito come calcolare il flusso del campo generato da una distribuzione di cariche discrete attraverso una superficie chiusa, attraverso l'enunciato del teorema di Gauss. Abbia anche sottolineato come il flusso del campo elettrico non abbia un significato fisico semplice e immediato, come puo' essere, per esempio, il flusso del campo di velocita' in una condotta di acqua, che corrisponde alla "portata" della condotta. Ergo sorge spontanea la domanda su quale mai possa essere l'utilita' di questo teorema nelle pratiche applicazioni.

Occorre fare una piccola premessa a questo punto: nella vita reale non ci si trovera' mai in presenza di campi elettrici generati da un numero "piccolo" di cariche. La carica quantizzata dell'elettrone e' talmente piccola, che tutti i corpi elettrizzati possiedono un deficit o un eccesso di elettroni nell'ordine almeno delle centinaia di migliaia di cariche. Pensare di poter studiare il campo elettrico come somma del contributo di ogni carica e' folle, ed e' per questo che si definisce il concetto di "densita' di carica", intesa come la quantita' di carica che si trova su di un'estensione unitaria del supporto cui la (1)

carica è legata.

Si definisce così la densità lineare di carica:

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta l} \quad (\text{sarebbe meglio dire } \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l})$$

rapporto tra la quantità di carica in un tratto di filo di estensione  $\Delta l$  "piccola" e  $\Delta l$  stessa.

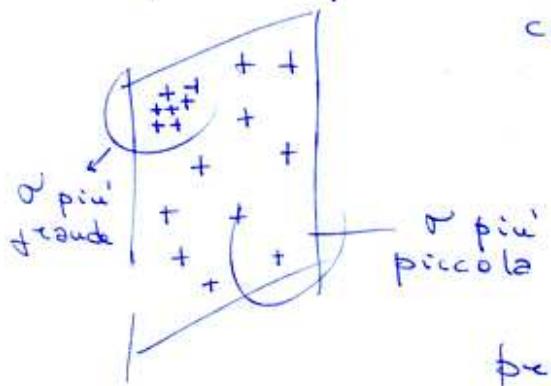
ovvero la densità superficiale di carica

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad (\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S})$$

ed infine la densità volumetrica di carica

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad (\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V})$$

In generale queste tre quantità sarebbero funzione del punto preso in considerazione, per esempio con riferimento ad un piano ci potrebbero essere zone in cui le cariche si concentrano; in tali zone la densità di carica sarebbe maggiore.

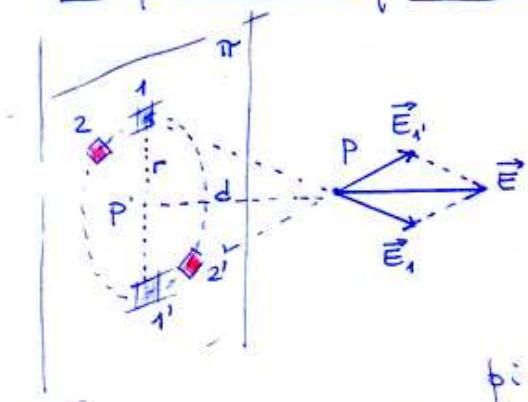


Nella quasi totalità dei problemi che affronteremo, tuttavia, le quantità  $\lambda$ ,  $\sigma$  e  $\rho$  saranno costanti. In tale caso nota l'estensione del supporto è sempre possibile calcolare la quantità di carica totale:

$$Q = \lambda \cdot l ; \quad Q = \sigma \cdot S ; \quad Q = \rho \cdot V$$

Tornando all'argomento di queste note, vediamo ora come scegliendo opportunamente la superficie chiusa sia possibile mediante l'uso della definizione di flusso e del teorema di Gauss, calcolare il campo elettrico nel caso delle principali distribuzioni di carica uniformi.

### Campo di un piano infinito uniformemente carico:



Supponiamo nel caso in esame di voler calcolare il campo elettrico in un punto  $P$  a distanza "d" da un piano  $\Pi$  con  $\sigma = \text{cost.}$

Se si proietta il punto  $P$  sul piano si ottiene  $P'$ , prendiamo un pezzettino di piano 1 a distanza "r" da  $P'$  da carica che si trova su quel pezzettino genera nel punto  $P$  un campo elettrico  $\vec{E}_1$ . Se ora si traccia una circonferenza di raggio "r" con centro in  $P'$  ci si rende conto che è possibile lungo tale circonferenza trovare l'elemento 1' simmetrico rispetto a 1, il cui campo in  $P$  sarà  $\vec{E}_{1'}$ . Se si effettua la somma vettoriale dei campi il risultato è un vettore orizzontale. Quello che ora va compreso è che pesando un altro elemento di superficie "2" sulla stessa circonferenza, posso

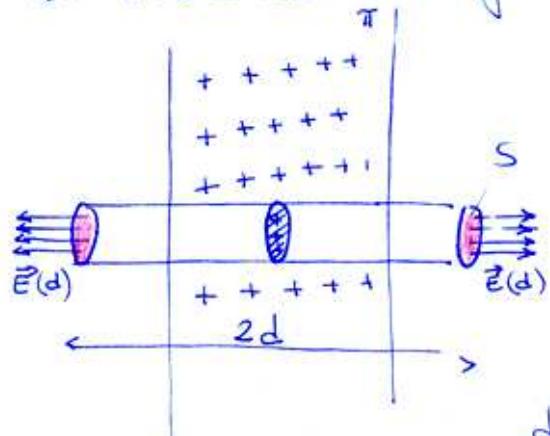
(3)

trovate il corrispondente simmetrico 2' sulla stessa circonferenza in maniera tale che il campo prodotto dai 2 contributi sia orizzontale. Ma visto che tutti i punti della circonferenza hanno il loro simmetrico puoi concludere che il campo prodotto dall'intera circonferenza di canica è orizzontale. Faccendo un ulteriore sforzo di pensiero astratto si puo' pensare all'intero piano infinito come generato da infinite circonferenze di centro  $P$ , se ogni circonferenza genera un campo orizzontale perpendicolare al piano, allora tale conclusione puo' valere anche per l'intero piano. Dunque l'intero piano genera in  $P$  un vettore campo orizzontale, è facile capire, infine, che a parita' di " $d$ " distanza dal piano il campo è lo stesso visto che il piano è infinito. In altri termini essendo il piano infinito l'unica variabile che entra nel problema è la distanza dal piano.

Senza fare nessuno un calcolo, dunque, abbiamo capito molte cose sul campo elettrico da calcolare: esso è orizzontale in ogni punto e la sua intensità puo' al massimo dipendere da " $d$ ". L'unica cosa che ci resta da fare è calcolare  $E(d)$ .

(4)

Gli teorema di Gauss ci viene in soccorso proprio a tale scopo.

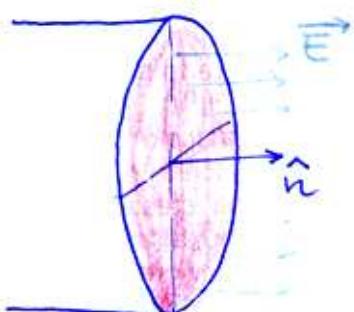


da superficie chiusa attraverso cui calcolare

il flusso va scelta con attenzione. In questo caso

la più adatta è un cilindro di superficie di base qualsiasi, di altezza "2d", di cui metà a destra e metà a sinistra del piano, in maniera tale che le due superfici di base siano entrambe a distanza "d" dal piano.

Ragioniamo sul flusso che produce il campo elettrico generato dal piano. Essendo il campo orizzontale esso non produce alcun flusso sulla superficie laterale del cilindro, ma solo attraverso le due basi. Su tali basi il campo presenta la stessa intensità e il suo verso e direzioni sono identici a quelli della normale alla superficie (che punta sempre all'esterno). In queste condizioni,



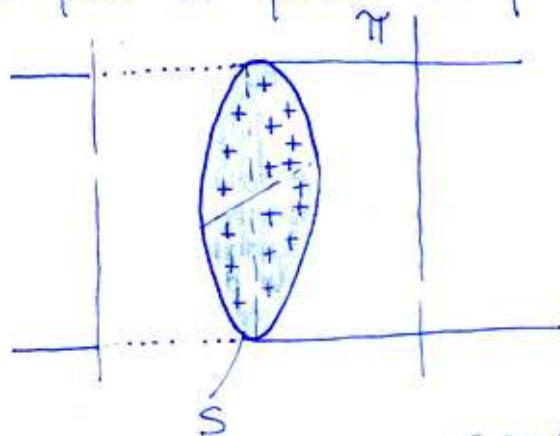
come noto, il flusso si calcola semplicemente moltiplicando il valore del campo per la superficie

Nel caso in esame si moltiplica tutto per 2 perché le superfici sono due. (5)

$$\phi(\vec{E}) = 2 \cdot S \cdot E(d)$$

Il teorema di Gauss ci dice che tale flusso è pari alla quantità di carica che si trova all'interno della superficie diviso  $\epsilon_0$ .

All'interno del cilindro non ci sono cariche se non per il pezzo di piano che il cilindro interseca.



d'intersezione tra piano e cilindro è rappresentata da una superficie pari alle basi del cilindro stesso. Poiché il piano è uniformemente carico, la carica totale interna al cilindro sarà pari a:

$$Q_{\text{tot}} = \sigma \cdot S$$

d'applicazione del teorema di Gauss ci dice che:

$$\phi(\vec{E}) = 2 \cdot S \cdot E(d) = \frac{Q_{\text{tot}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0};$$

$$2 \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0}$$

da cui è possibile calcolare il campo elettrico

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

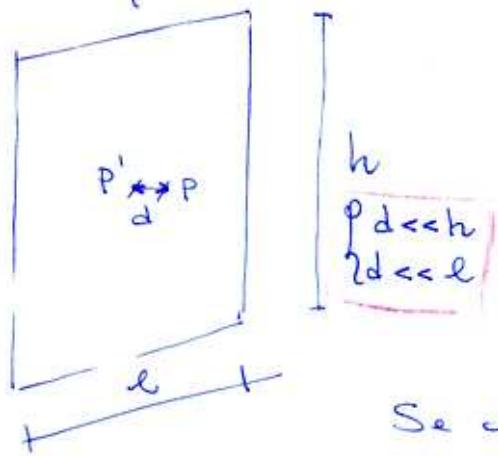
Cioè che salta all'occhio subito è che il campo non dipende nemmeno da "d", cioè nel

caso di un piano infinito uniformemente carico, il campo elettrico è sempre lo stesso qualsiasi punto io scelga.

(6)

Questa affermazione sembra fare a pugni con la logica, come è possibile che allontanandosi dalla "sorgente" del campo, il campo non diminuisca? Tutto è dovuto al fatto che il piano ha dimensioni infinite, il problema è che fisicamente non esiste un piano di dimensioni infinite, in altre parole abbiamo appena risolto un problema che nella realtà non si presenta mai. Perché lo abbiamo fatto allora?

Perché questo modo dello di piano infinito rappresenta



un'ottima approssimazione (praticamente perfetta) di tutte le situazioni in cui la distanza del punto P dal piano è molto più piccola delle dimensioni del piano.

Se ci si ricorda dell'espressione del campo elettrico di una singola carica, si avrà notato come essa si riduci in intensità con il quadrato della distanza ( $r^2$  si trova al denominatore). Questo vuol dire che a fornire un contributo al campo in P saranno le cariche che si trovano vicine a P, quelle lontane non daranno alcun contributo. Di conseguenza nel caso  $d \ll h$  e  $d \ll l$ , studiare il piano infinito rispetto a quello reale significa aggiungere all'intensità del campo un contributo assolutamente trascurabile.

(7)