

Combinazioni semplici e con ripetizione

L'ultimo argomento di calcolo combinatorio da affrontare è relativo ai casi in cui l'ordine con il quale gli oggetti vanno ad occupare i posti non ha rilevanza. Ciò capita tutte le volte in cui si è interessati all'insieme degli elementi che occupano i posti senza dare alcun rilievo all'ordine con cui vengono posizionati.

Quando l'ordine non ha importanza si parla di combinazioni. Partiamo dal caso in cui gli oggetti non possano ripetersi, ovvero da quelle che chiameremo combinazioni semplici.

Partiamo da un esempio molto semplice: bisogna scegliere 2 cappotti da portare in valigia per un viaggio, e nell'armadio ne abbiamo 4. Indichiamo i 4 cappotti con le prime 4 lettere dell'alfabeto: A, B, C, D. La domanda che ci poniamo è: in quanti modi posso scegliere i 2 cappotti?

Ovviamente l'ordine di scelta non conta, conta solo quali sono i 2 cappotti che metterò in valigia, e

(1)

inoltre, non si può mettere 2 volte lo stesso cappotto in valigia. Siamo nel caso di combinazioni semplici. Facciamo finta per un attimo che anche l'ordine sia rilevante, se così fosse si tratterebbe di disposizioni semplici di 4 oggetti in 2 posti, e il numero di possibilità sarebbero: $D_{4,2} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$

elenchiamo queste 12 disposizioni:

AB	AC	AD	BC	BD	CD
BA	CA	DA	CB	DB	DC

cio' che si nota è che, in questo caso, se dalle disposizioni si passa alle combinazioni, il numero di possibilità passa da 12 a 6, cio' perché 2 diverse disposizioni corrispondono alla stessa combinazione, essendo tra i 2 casi diversi il solo ordine con cui si presentano gli stessi elementi.

Dunque si conclude che le combinazioni si ottengono dividendo le disposizioni per un numero che rappresenta in quanti modi gli oggetti che occupano i posti possono presentarsi modificando la loro posizione.

(2)

Ma tale numero altri non è, allora, che il numero di disposizioni in cui "m" oggetti possono presentarsi in "m" posti, cioè (essendo il numero di oggetti uguale al numero di posti) le possibili permutazioni di "m" oggetti.

Questo ragionamento spiega allora la seguente formula:

$$C_{n,m} = \frac{D_{n,m}}{P_m}$$

"le combinazioni di "n" oggetti in "m" posti sono pari al rapporto tra le disposizioni di "n" oggetti in "m" posti e le permutazioni di "m" oggetti."

Ma io formule di calcolo per disposizioni e permutazioni le ho già a disposizione, le posso usare per avere una formula relativa alle combinazioni:

$$C_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

$\xrightarrow{D_{n,m}}$ $\xrightarrow{P_m}$

Il rapporto indicato nell'ultima formula prende anche il nome di "coefficiente binomiale" e viene spesso rappresentato con il simbolo $\binom{n}{m}$.

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m! (n-m)!}$$

Facciamo un esempio di applicazione.

Nello scopone vengono date ad ogni giocatore 10 carte su 40 diverse, calcolare in quanti modi possono essere assegnate tali carte.

Si tratta, ormai è chiaro, di combinazioni (l'ordine con cui arrivano le carte non conta, ciò che conta sono le 10 carte che alla fine si hanno in mano) senza ripetizione (non ci sono 2 carte uguali) di 40 oggetti in 10 posti. Con la formula appena vista si può risolvere il problema:

$$\begin{aligned} C_{40,10} &= \binom{40}{10} = \frac{40!}{10!(40-10)!} = \frac{40!}{10!30!} = \\ &= \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \boxed{847660528} \end{aligned}$$

Nota: Nella formula tutti i numeri da 30 a 1 che fanno parte di $40!$ sono stati semplificati con gli stessi termini al denominatore che sono presenti in $30!$

Prendiamo in esame ora un altro problema tipo:

"un gruppo di lavoro è formato da 4 persone. Ogni settimana il loro capo vuole incontrare uno di loro per avere ragguagli sul lavoro svolto. In quanti modi diversi si possono distribuire gli incontri con il capo in 3 mesi (12 incontri)?"

(4)

E' evidente come anche in questo problema l'ordine non conta, non importa alla fine dei 3 mesi quando si è audati dal capo, ma il numero di volte in cui si è audati. Ciò che cambia è che stavolta la stessa persona può andare più volte, anzi poiché il numero di persone del gruppo è minore del numero di incontri qualcuno dovrà per forza andare più volte.

Questa considerazione ci permette di chiarire che mentre nei problemi senza ripetizione il numero di oggetti deve necessariamente essere maggiore o uguale al numero di posti ($n \geq m$), perché nei problemi di calcolo combinatorio i posti vanno occupati tutti, tale condizione può tranquillamente non essere vera nei problemi con ripetizione in cui "n" ed "m" possono essere qualsiasi.

Si tratta, tornando al problema, di combinazioni con ripetizione. Per il calcolo del loro numero forniremo direttamente la formula risolutiva essendo il ragionamento che la sostiene abbastanza complesso e legato ad una tipologia di equazioni (5)

dette "equazioni diofantee" che in genere non vengono studiate nei corsi di matematica degli istituti tecnici. La formula risolutiva è la seguente:

$$C_{n,m}^r = \binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{m! (n-1)!}$$

Nell'esempio che abbiamo proposto $n=4$ e $m=12$ per cui il numero di modi in cui si potranno dividere gli appuntamenti sarà pari a:

$$\begin{aligned} C_{4,12}^r &= \binom{4+12-1}{12} = \binom{15}{12} = \frac{15!}{12! (15-12)!} = \frac{15!}{12! \cdot 3!} = \\ &= \frac{\overset{5}{\cancel{15}} \cdot \overset{7}{\cancel{14}} \cdot 13}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = \boxed{455} \end{aligned}$$