Concetto di differenziale e suo significato geometrico

Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile: si dia al valore generico x un incremento Δx, la funzione passerà dal valore $f(x)$ al valore $f(x+\Delta x)$ subendo l'incremento $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Essendo la funzione continua, perché derivabile, quando $\Delta x \to 0$ anche $\Delta y \to 0$. L'incremento della funzione è quindi infinitesimo con l'incremento della variabile indipendente. Se si confrontano i due infinitesimi Δx e Δy, cioè se si valuta il limite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, nell'ipotesi di derivabilità della funzione si ha:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

che assume un valore finito; quindi si ottiene che Δy è infinitesimo o di ordine superiore a Δx (se $f'(x) = 0$) o dello stesso ordine di Δx (se $f'(x) \neq 0$ e finito). Si può quindi scrivere:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x \quad \text{dove} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$

Moltiplicando per Δx si ha:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$$

Tale espressione scompone l'infinitesimo Δy nella somma della sua parte principale $f'(x) \cdot \Delta x$ e nell'infinitesimo $\varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$ di ordine superiore rispetto all'infinitesimo Δx.

La parte principale dell'incremento di una funzione si dice **differenziale della funzione** e si indica con $df(x)$ (o, che è lo stesso con dy):

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$$

In particolare per la funzione $f(x) = x$ si ha:

$$f'(x) = 1 \quad \text{quindi} \quad dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

Il differenziale della variabile indipendente coincide con il suo incremento. Sostituendo il risultato ora ottenuto nell'espressione sopra si ha:

$$df(x) = f'(x) \cdot dx$$

Si ha la seguente definizione di differenziale:

"il differenziale di una funzione, in un punto in cui la funzione è derivabile, è il prodotto della derivata in quel punto per l'incremento della variabile indipendente"

Si ricava quindi che $\Delta y = dy + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$ e si può quindi affermare che: il differenziale di una funzione differisce dall'incremento della funzione di una quantità infinitesima di ordine superiore all'incremento della variabile indipendente.
Questa proprietà giustifica una delle prerogative del differenziale: quella di sostituire, trascurando infinitesimi di ordine superiore, l'incremento della funzione. A meno di infinitesimi di ordine superiore, si può quindi porre:

$$\Delta y = dy$$

<u>Esempio 1</u>:

Si scriva il differenziale della funzione: $y = x^2 + sen(x)$
Si ha: $dy = [2x + cos(x)] \cdot dx$

<u>Esempio 2</u>:

Sfruttando il concetto di differenziale di calcoli $\sqrt{4,3781}$
In questo caso la caso la funzione è $f(x) = \sqrt{x}$. Si tratta di calcolare $f(4,3781) = f(4 + 0.3781)$, essendo quindi $x = 4$ e $\Delta x = 0.3781$.
Poiché $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, risulta $f'^{(4)} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$, si ha quindi:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} \cdot \Delta x = \frac{1}{4} \cdot 0,3781$$

Si ha quindi: $\Delta y = f(4,3781) - f(4) = \frac{1}{4} \cdot 0,3781 + \sigma$, dove σ rappresenta, nel calcolo numerico, l'errore $\varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$ che si commette ponendo $\Delta y = dy$. Pertanto:

$$f(4,3781) = f(4) + \frac{1}{4} \cdot 0,3781 + \sigma$$

$$\sqrt{4,3781} = 2 + 0,094525 + \sigma = 2,094525$$

Le prime dieci cifre decimali di $\sqrt{4{,}3781}$ sono 2,0923909768, si può quindi osservare che le prime due cifre del calcolo approssimato sono esatte.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

Si darà ora una interpretazione geometrica del differenziale.
Si consideri la curva di equazione $y = f(x)$ e la tangente nel punto $P(x, f(x))$ e sia Q il punto della curva di coordinate $(x + \Delta x,\ f(x + \Delta x))$. Dalla figura di presso rappresentata si ha:

$$\Delta y = \overline{MQ} = \overline{MT} + \overline{TQ}$$

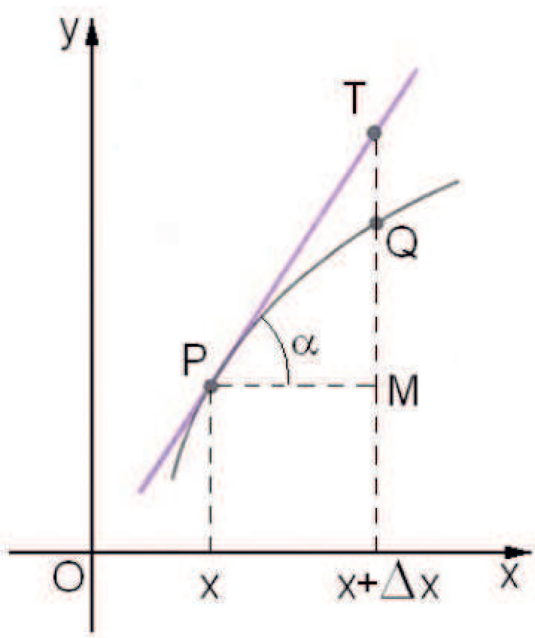
Nel triangolo rettangolo PMT si ha:

$$\overline{MT} = \overline{PM} \cdot \tan(\alpha) = \Delta x \cdot f'(x)$$

quindi:

$$\overline{MT} = df(x) = dy$$

cioè il segmento MT rappresenta geometricamente il differenziale dy.
Si può verificare che queste considerazioni geometriche valgono per qualunque funzione derivabile.



Il differenziale di una funzione, in un punto $P(x, f(x))$ relativo all'incremento Δx, rappresenta quindi la lunghezza del segmento staccato sulla parallela all'asse y, condotta per il punto $(x + \Delta x,\ 0)$, dalla parallela all'asse x condotta per P, e dalla tangente alla curva in P; in altre parole è l'incremento che subisce la tangente alla curva nel passaggio da x a $x + \Delta x$.
La figura indica pure che Δy differisce dal differenzialedy per la quantità TQ che tende a zero quando Δx tende a zero; perciò se si pensa fisso il punto P e si fa muovere sul grafico il punto Q in modo che si avvicini indefinitamente a P, allora i valori:

$$\overline{PM} = \Delta x; \qquad \overline{MQ} = \Delta y; \qquad \overline{MT} = dy; \qquad \overline{TQ} = o(\Delta x) \cdot \Delta x$$

tendono a zero, ma TQ svanisce più rapidamente degli altri, quindi può essere trascurato e il differenziale può sostituire l'incremento della funzione; in altre parole l'arco PQ di curva può essere approssimato dal segmento PT di tangente, purché Q sia sufficientemente vicino a P.