INTRODUZIONE AL CONCETTO DI LIMITE

Prendiamo una funzione semplice:

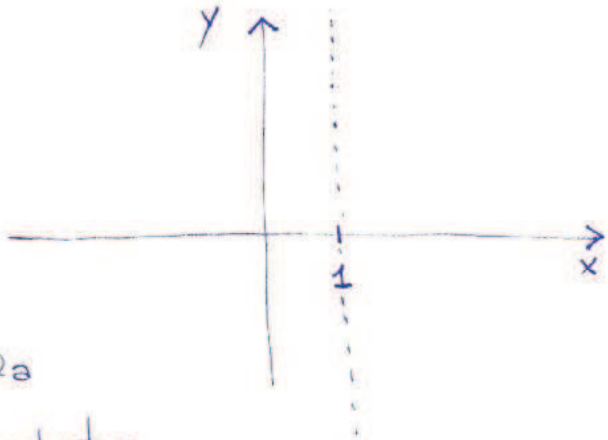
$f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, il dominio di questa funzione è molto semplice:

$$x - 1 \neq 0$$

dunque: $x \neq 1$

$$D_f : \forall x \in \,]-\infty, 1[\, \cup \,]1, +\infty[$$

graficamente non abbiamo zone da sbarrare, solo una retta verticale in corrispondenza di $x=1$



Dal dominio si capisce che la mia funzione può essere calcolata in tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ tranne che per $x=1$, tuttavia $x = 1$ è punto di accumulazione per il dominio, infatti qualsiasi intorno io prenda di $x=1$ riesco sempre a trovare punti del dominio diversi da $x=1$. Questo significa che pur non potendo calcolare la funzione in $x=1$, la posso calcolare in punti "<u>vicini</u> <u>quanto voglio</u>" (si dice anche indefinitamente vicini) al punto $x = 1$.

Ha senso allora porsi la seguente domanda:

"Se calcolo la mia funzione $f(x)$ prendendo dei valori di "x" che si avvicinano indefinitamente ad $x = 1$, verso quale valore "y" si avvicina indefinitamente la mia funzione?"

La risposta alla domanda di cui sopra equivale a chiedersi: quanto vale il limite della funzione "$f(x)$" quando la "x" tende ad 1?

e si scriverà: $\lim_{x \to 1} f(x) = ?$

Capiamo che vi sono diverse possibili risposte a questa domanda:

- non tende da nessuna parte (il limite non esiste)
- tende a $+\infty$ o $-\infty$
- tende verso un numero reale "l"

Ovviamente si capisce che se un punto non è di accumulazione per il dominio, in tal punto non può calcolarsi il limite della funzione:

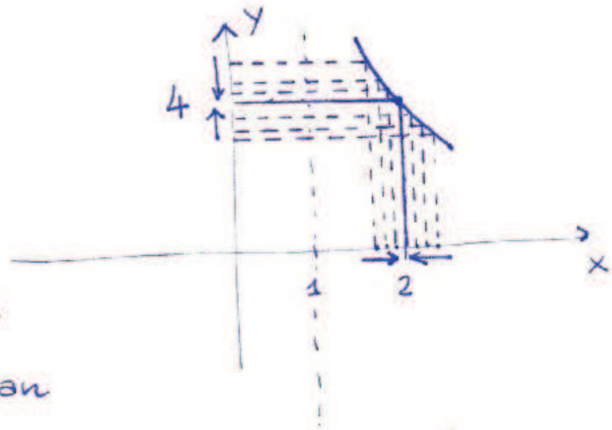
x_0 non è di accumulazione per D_f $\longrightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

semplicemente perché man mano che ci avviciniamo ad x_0, arriveremo ad un punto in cui non ci saranno più punti del dominio e quindi la funzione non potremmo più calcolarla.

Torniamo per un attimo al nostro caso pratico, il dominio era:

$$D_f: \forall x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

in tale insieme tutti i punti sono di accumulazione, inclusi $-\infty$, 1 e $+\infty$. E' dunque possibile calcolare il limite in qualsiasi punto.



Tuttavia laddove la funzione esiste è facile intuire che il valore del limite in x_0 corrisponde al valore della funzione in x_0. Ovvero, man mano che mi avvicino a x_0 i valori della funzione si avvicinano proprio al valore della funzione in x_0. Nel grafico si è rappresentatato il caso di $x_0 = 2$ per la funzione in esempio, proviamo ad avvicinarci da sinistra e destra ad $x_0 = 2$

x	$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$
2,1	4,009
2,01	4,0001
2,001	4,000001

(avvicinamento da destra)

x	$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$
1,9	4,011
1,99	4,0001
1,999	4,000001

(avvicinamento da sinistra)

Appare evidente che più mi avvicino, sia da destra che da sinistra, a $x_0 = 2$, la mia funzione si avvicina a 4, per cui posso scrivere:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x-1} = 4$$

tale risultato, però, altro non è che quello che otterrei calcolando direttamente la funzione per $x = 2$. Ciò evidenzia come, nella maggior parte dei casi (purtroppo non in tutti), laddove la funzione esiste, calcolare il limite risulta essere una operazione superflua. D'ora in poi, dunque, ci soffermeremo sul calcolo del limite nei punti che sono di accumulazione per il dominio, ma che non appartengono al dominio. In particolare nel nostro caso tali punti saranno $+\infty$, 1 e $-\infty$, per cui nell'ambito dello studio della funzione saremo interessati al calcolo dei seguenti limiti:

1) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-1}$ 2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1}$ 3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x-1}$

e non perché in altri punti il limite non si possa calcolare, semplicemente perché negli altri punti il calcolo è immediato e poco utile.

Prendiamone uno di questi 3, per esempio il primo e cerchiamo di risolverlo utilizzando solo l'idea di limite:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-1} \longrightarrow$$

la domanda a cui rispondere è: "se con la x mi avvicino sempre di piu' a $-\infty$, il che vuol dire prendo valori negativi sempre più grandi in valore assoluto, la mia funzione verso che valore si avvicina?"

Facciamo due conti:

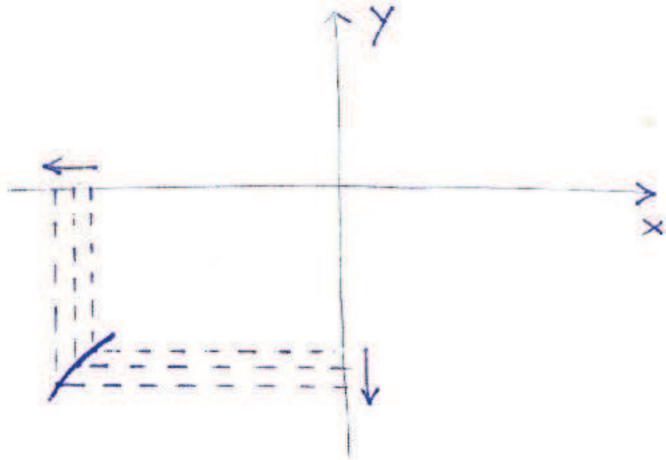
x	$\frac{x^2}{x-1}$
-100	-99.01
-1000	-999.001
-10000	-9999.0001
-100000	-99999.00001

quello che si nota è che più la "x" diventa grande e negativa, più anche la funzione diventa grande e negativa, ergo pure essa tende a $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

Lo studente provi per esercizio a risolvere gli altri 2 casi con lo stesso approccio (per il caso $x \to 1$ si noterà qualcosa di particolare su cui ritorneremo).

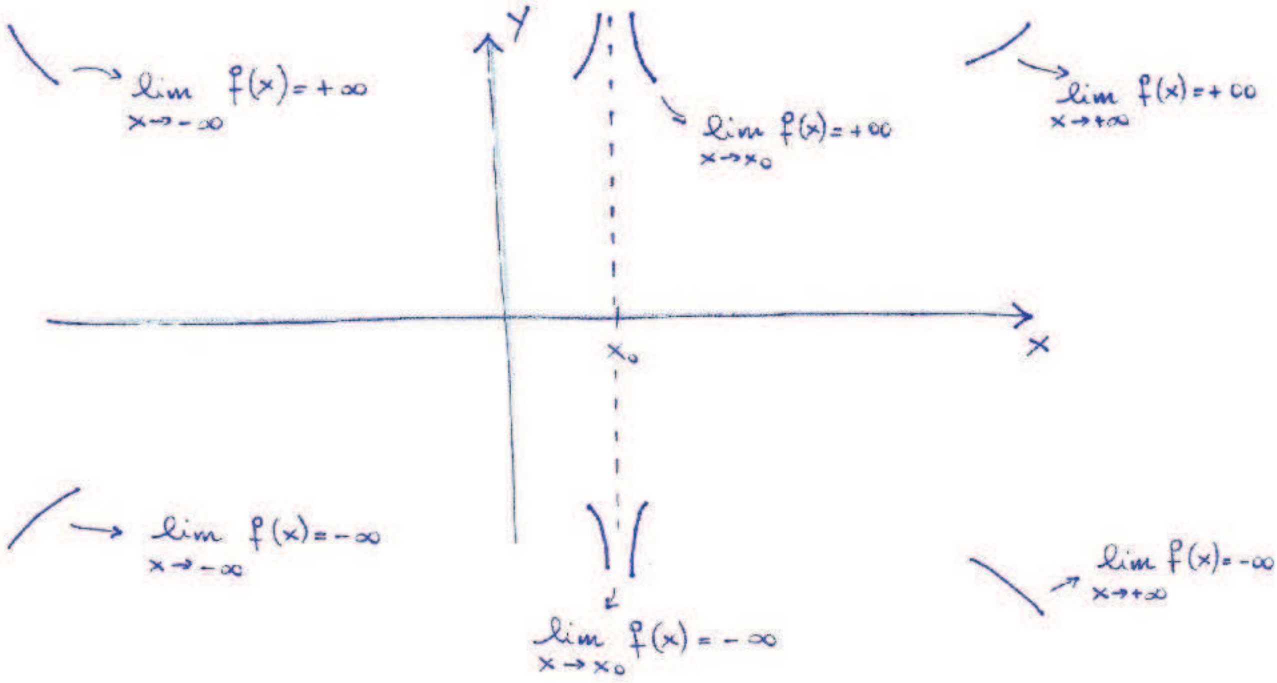
A questo punto è fondamentale capire come il risultato di un limite possa aiutare nel corretto tracciamento del grafico di una funzione.
Esso permette di indicare sul grafico alcuni tratti che consentono di intuire l'andamento del grafico, disegnare correttamente tali "tratti" è importantissimo.



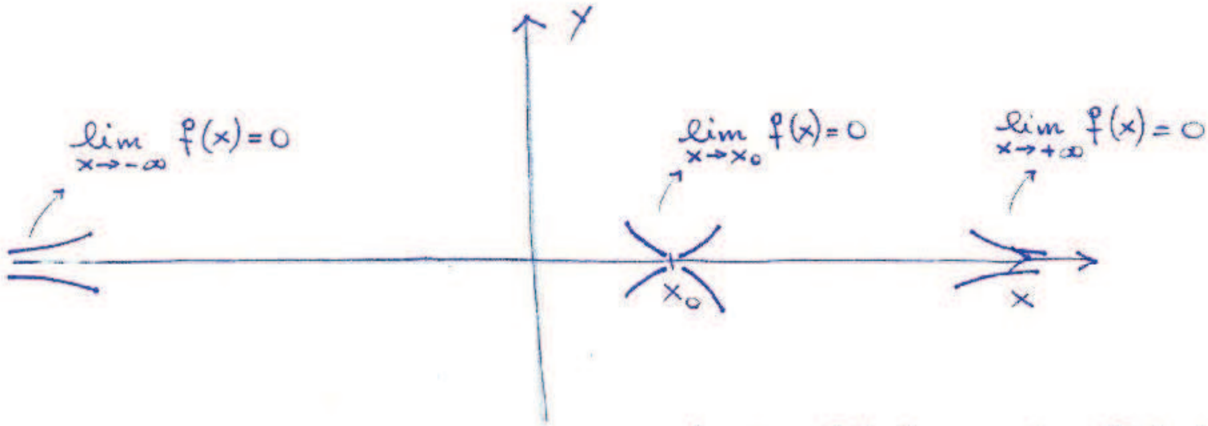
Nell'esempio si è giunti a conclusione che: $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$

Tale risultato corrisponde al tratto indicato in figura. Prendendo i punti che appartengono a tale tratto, infatti, si comprende come esso indichi che a valori grandi e negativi della "x" corrispondano valori grandi e negativi della "y".
Per aiutare il lettore a ragionare su questo tipo di rappresentazione, di seguito riporto diversi esempi di interpretazione grafica del risultato di un limite, con la preghiera di non provare a ricordarli a memoria, bensì di capire il concetto che è dietro il loro tracciamento.

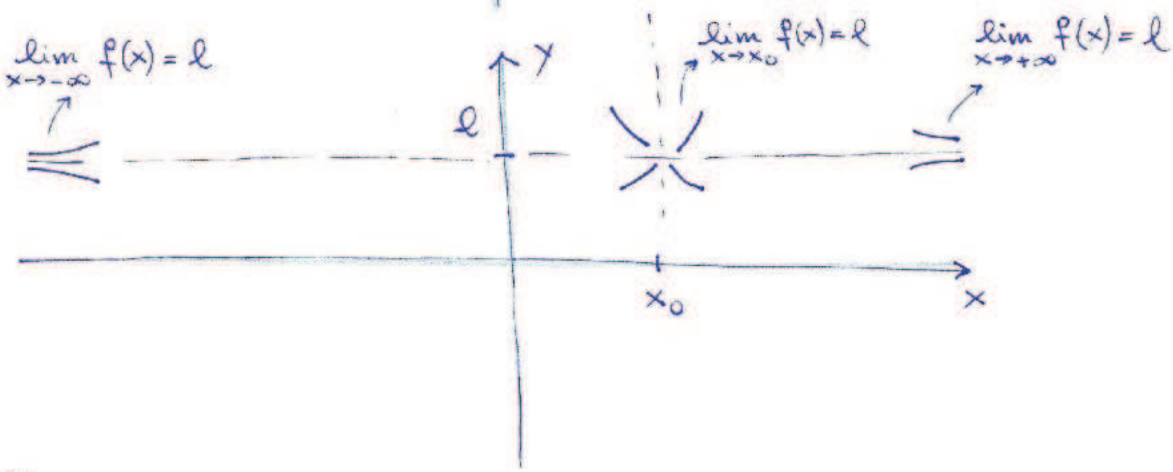
(1)



(2)



(3)



N.B.: I casi rappresentati su di un unico grafico non fanno parte della stessa funzione, alcuni di essi, infatti, non possono verificarsi contemporaneamente. Si sono suddivisi nel modo di cui sopra solo per questioni di comodita'

Prima di chiudere, un'ultima fondamentale considerazione. Quando prima si è ragionato per calcolare il limite di $x^2/_{x-1}$ per x che tende a 2, nella tabellina si sono indicati numeri vicini a 2, ma non 2.

Questo perche' il concetto di limite esplora quello che fa la funzione vicino indefinitamente a x_0, senza preoccuparsi minimamente di quello che alla funzione succede in x_0. Si tratta di due calcoli distinti e separati, anzi vedremo che proprio dal rapporto che esiste tra il limite di una funzione in un punto e il valore della funzione nel medesimo punto scaturiranno una serie di considerazioni molto importanti ... ma non corriamo troppo, questo lo vedremo piu' avanti :-)