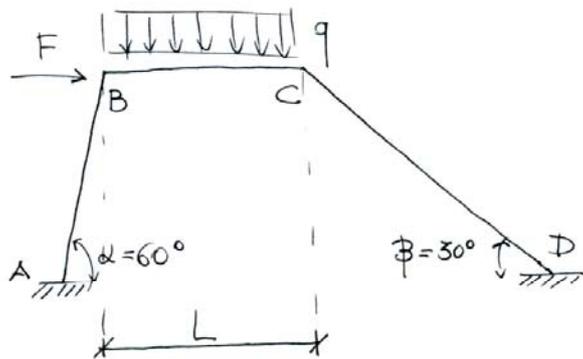


Risoluzione di un telaio piano a maglia generica e nodo spostabile mediante il metodo di Cross



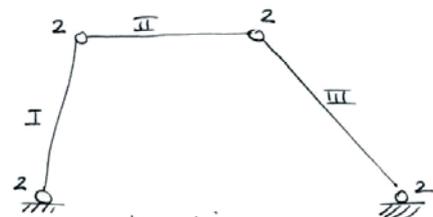
$L = 4 \text{ m}$
 $H = 3 \text{ m}$
 $q = 5 \text{ t/m}$
 $F = 10 \text{ t}$
 sezione trave: 30×60
 sezione pilastri: 30×40

Il primo passo da compiere per la risoluzione di un qualsiasi telaio è comprendere se esso risulta della tipologia a "nodi spostabili" ovvero a "nodi fissi". Un telaio si dice a nodi spostabili se la sua deformata può presentare, oltre che rotazioni, anche traslazioni dei nodi. Il numero di parametri che servono ad individuare la parte "traslazionale" della deformata rappresenta il numero dei nodi spostabili.

Come si calcola il numero di nodi spostabili di un telaio?

Bisogna fare riferimento ad una struttura detta "reticolare associata" ottenuta da quella di partenza liberando le rotazioni, laddove non fossero già libere, in tutti i nodi.

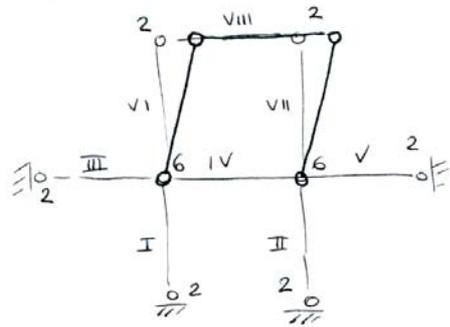
Il numero di nodi spostabili corrisponde al grado di labilità della struttura reticolare associata. Nel caso in esame la struttura analizzata presenta 1 nodo spostabile.



$n = 3t - (v) = 3 \cdot 3 - 8 = 1$
 (struttura reticolare)
 1 volta labile

①

Si ricorda che nella valutazione dei gradi di libertà, il valore " $3t-v$ " non sempre fornisce un'indicazione corretta. A lato è riportata una struttura reticolare che al calcolo sarebbe isostatica e che, invece, è chiaramente 1 volta labile per cattiva disposizione dei vincoli.



$$n = 3t - v = 3 \cdot 8 - 24 = 0$$

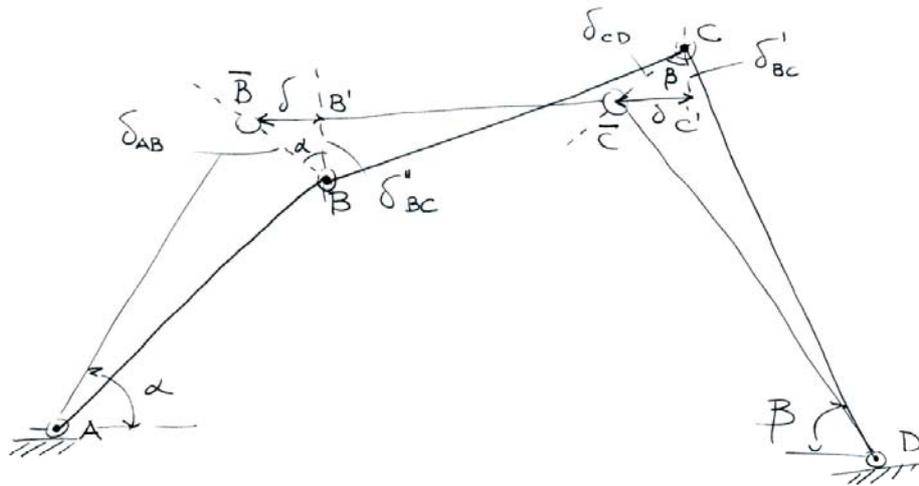
(sistema solo apparentemente isostatico, in realtà labile per cattiva disposizione vincoli)

Verificato che un telaio risulta essere 2 nodi spostabili, è importante

per motivi che saranno chiari in seguito capire come si deforma la struttura reticolare una volta imposto un fissato valore al singolo nodo spostabile (indi se un telaio ha n nodi spostabili si possono tracciare n deformate, che si diranno deformate cinematiche). Per tracciare una deformata cinematica bisogna tener presente due ipotesi:

- inestensibilità delle aste
- piccoli spostamenti, che implica la perpendicolarità degli spostamenti relativi tra gli estremi rispetto alla configurazione dell'asta indeformata.

Nella pagina seguente è tracciata la deformata cinematica della struttura in esame con riferimento ad uno spostamento imposto dell'unico nodo spostabile, ovvero una traslazione orizzontale del traverso BC pari a " δ "



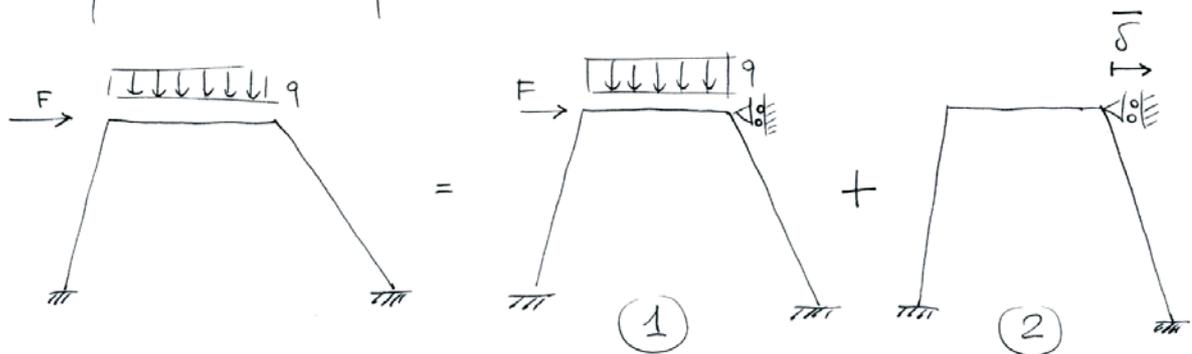
Il procedimento da seguire è basato sul seguente ragionamento: dato lo spostamento " δ " al traverso i punti B e C si verrebbero teoricamente a trovare nelle posizioni B' e C'. Tali posizioni, tuttavia, risultano essere incompatibili con le direzioni delle aste AB e CD, che sarebbero costrette la prima ad estendersi e la seconda a contrarsi. Per trovare la corretta posizione dei punti B e C c'è bisogno allora di tracciare le perpendicolari alle aste AB e CD, le quali individuano l'insieme dei punti compatibili con l'ipotesi di inestensibilità in piccoli spostamenti dei due nitti, e poi le verticali dai punti B' e C' in modo che lo spostamento orizzontale resti comunque pari a " δ ". L'intersezione di tali coppie di rette determinano le posizioni dei punti B e C e permettono il tracciamento della deformata cinematica.

In forza del procedimento di risoluzione è cruciale la determinazione degli spostamenti relativi tra gli estremi delle aste.

Faccendo riferimento ai due triangoli rettangoli $\overline{B'B'B}$ e $\overline{C'C'C}$, applicando note relazioni di trigonometria, si può scrivere:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{AB} &= \frac{\delta}{\sin \alpha} = \frac{\delta}{\sin 60^\circ} = \frac{\delta}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \delta = \frac{2}{3} \sqrt{3} \delta \\ \delta_{BC} &= \delta'_{BC} + \delta''_{BC} = \delta \cdot (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = \delta \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \right) = \frac{4}{3} \sqrt{3} \delta \\ \delta_{CD} &= \frac{\delta}{\sin \beta} = \frac{\delta}{\sin 30^\circ} = \frac{\delta}{1/2} = 2\delta \end{aligned} \right.$$

Siamo pronti a questo punto per applicare il metodo di Cross. Il problema è che tale metodo può di fatto essere applicato solo a telai a nodi fissi, per cui la sua applicazione a telai a nodi spostabili passa attraverso l'impiego di un'equazione di equilibrio.



L'idea è che la struttura a nodi spostabili venga risolta come somma di due schemi a nodi fissi, il primo (1) caricato dalle sole azioni esterne, il secondo (2) caricato da un cedimento anelastico in corrispondenza del vincolo ausiliario, pari esattamente allo spostamento del trasverso a struttura risolta ($\bar{\delta}$).

(4)

Lo schema (1) è facilmente risolvibile, al contrario nello schema (2) non si conosce a priori il valore di $\bar{\delta}$, c'è bisogno di calcolarlo. Dovendosi ottenere la soluzione come somma degli schemi (1) e (2), deve valere anche l'uguaglianza:

$$R_c = R_c^{(1)} + R_c^{(2)} \quad \text{tra le forze nodali applicate nel nodo C.}$$

Tuttavia nella struttura originaria non ci sono forze applicate in C (non c'è alcun vincolo fisso), per cui deve essere

$$R_c^{(1)} + R_c^{(2)} = 0 \quad \text{Si potrebbe obiettare che nulla è risolto poiché anche } R_c^{(2)} \text{ dipende dal valore}$$

di $\bar{\delta}$. Tuttavia essendo in campo lineare l'idea può essere quella di risolvere lo schema (2) nel caso $\bar{\delta} = 1$, in tal caso si riesce a calcolare tutto, e poi, usando la linearità scrivere che $R_c^{(2)} = \bar{\delta} \cdot R_c^{(2)}(\bar{\delta} = 1)$

L'equazione precedentemente scritta diventa così:

$$R_c^{(1)} + \bar{\delta} R_c^{(2)}(\bar{\delta} = 1) = 0$$

da cui l'unica incognita è $\bar{\delta}$:

$$\bar{\delta} = - \frac{R_c^{(1)}}{R_c^{(2)}(\bar{\delta} = 1)}$$

Si notino due cose:

- gli schemi (1) e (2) sono entrambi a nodi fissi per cui essi si possono risolvere con Cross;
- in generale nel caso di "n" nodi spostabili, bisognerebbe risolvere "n+1" Cross e poi un sistema di "n" equazioni in "n" incognite

(5)

Riepilogando i passi che compiremo per risolvere la nostra struttura saranno:

- 1 - Risoluzione dello schema (1) a nodi fissi caricato dalle azioni esterne
- 2 - Risoluzione dello schema (2) a nodi fissi caricato da un cedimento anelastico unitario in corrispondenza del vincolo ausiliario
- 3 - Calcolo del valore dello spostamento effettivo del traverso $\bar{\delta} = -R_c^{(1)} / R_c^{(2)} (\delta=1)$
- 4 - Risoluzione della struttura, utilizzando la linearità, come somma della soluzione dello schema (1) e quello dello schema (2), quest'ultima ottenuta moltiplicando il valore ottenuto per $\delta=1$ con il $\bar{\delta}$ calcolato.
 (x esempio se si vuole il momento all'incastro A, si eseguirà: $M_{A,1} + \bar{\delta} M_{A,2} (\delta=1)$)

Capito ciò che è da svolgere entriamo nella fase operativa. Per il calcolo delle rigidezze delle singole aste è necessario conoscerne sezione, materiale (c.a.)

e lunghezza:

$$L_{AB} = \frac{H}{\sin 60^\circ} = \frac{3m}{\sqrt{3}/2} = 2\sqrt{3}m = 3,46m$$

$$L_{BC} = L = 4m$$

$$L_{CD} = \frac{H}{\sin 30^\circ} = \frac{3m}{1/2} = 6m$$

Calcoliamo le inerzie:

$$I_{AB} = I_{CD} = \frac{30 \times (40)^3}{12} = 160000 \text{ cm}^4$$

(6)

$$I_{BC} = \frac{30 \times (60)^3}{12} = 540000 \text{ cm}^4$$

e di conseguenza le rigidezza

$$W_{AB} = \frac{4 E I_{AB}}{L_{AB}} = \frac{4 \cdot 160000 \text{ cm}^4}{346 \text{ cm}} \cdot E = 1849,71 \cdot E$$

$$W_{BC} = \frac{4 E I_{BC}}{L_{BC}} = \frac{4 \cdot 540000 \text{ cm}^4}{400 \text{ cm}} \cdot E = 5400 E$$

$$W_{CD} = \frac{4 \cdot E I_{CD}}{L_{CD}} = \frac{4 \cdot 160000 \text{ cm}^4}{600 \text{ cm}} \cdot E = 1066,67 E$$

Nello spirito del metodo di Cross ci calcoliamo coefficienti di ripartizione e momenti d'incastro perfetto

$$\tau_{BA} = \frac{W_{AB}}{W_{AB} + W_{BC}} = \frac{1849,71 \cdot E}{1849,71 \cdot E + 5400 \cdot E} \approx 0,25$$

$$\tau_{BC} = 1 - \tau_{BA} \approx 0,75$$

$$\tau_{CB} = \frac{W_{BC}}{W_{BC} + W_{CD}} = \frac{5400 E}{5400 E + 1066,67 E} \approx 0,84$$

$$\tau_{CD} = 1 - \tau_{CB} \approx 0,16$$

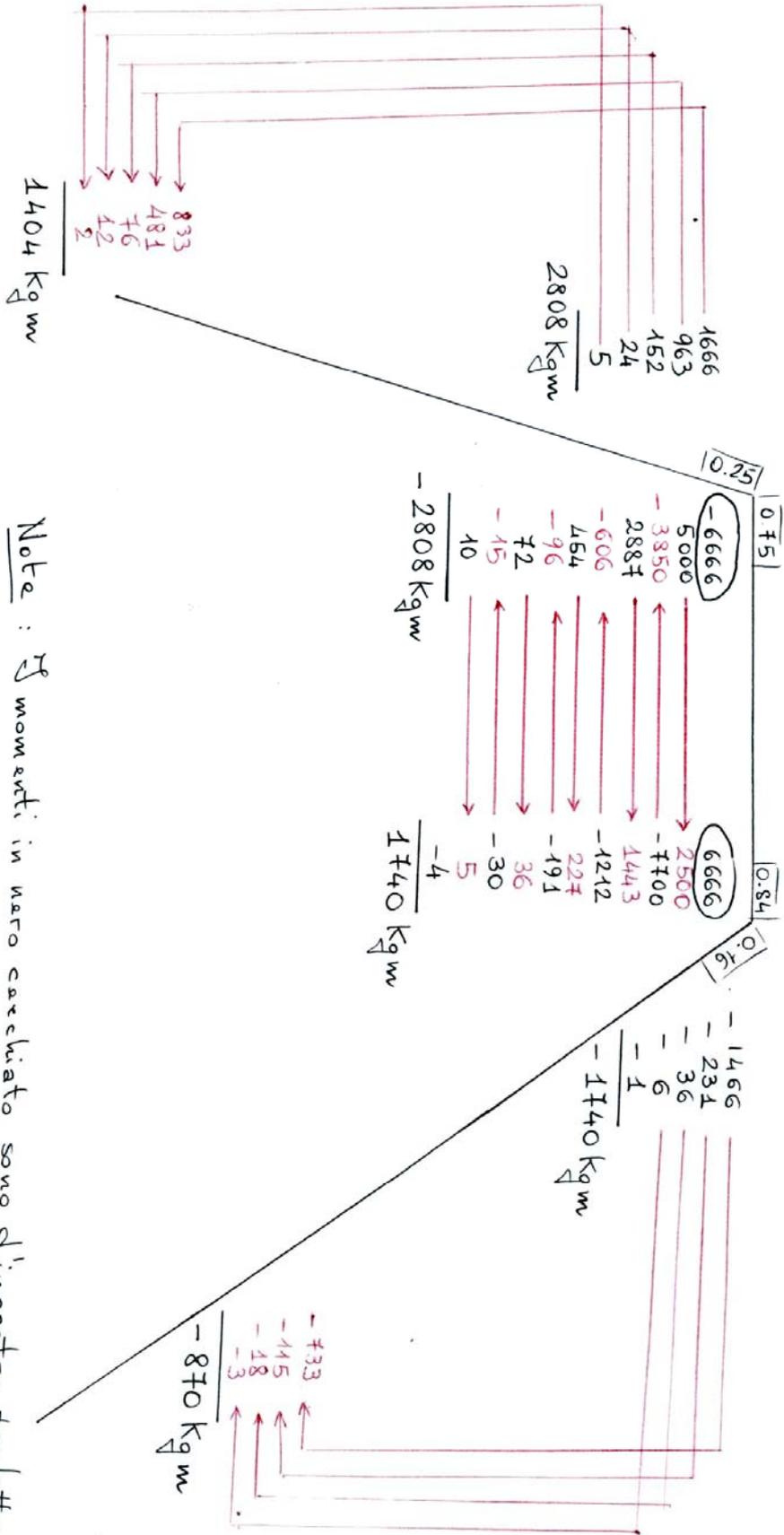
$$-p_{BC} = p_{CD} = \frac{q L_{BC}^2}{12} = \frac{5000 \text{ kg/m} \cdot 16 \text{ m}^2}{12} = 6666 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

La forza F impegna a sforzo normale il traverso BC e viene assorbita dal vincolo ausiliario.

Infine, essendo gli schemi tutti incastro-incastro, i coefficienti sono tutti pari a $\frac{1}{2}$ per quel che attiene al trasporto. Possiamo sviluppare il

Cross sullo schema ①:

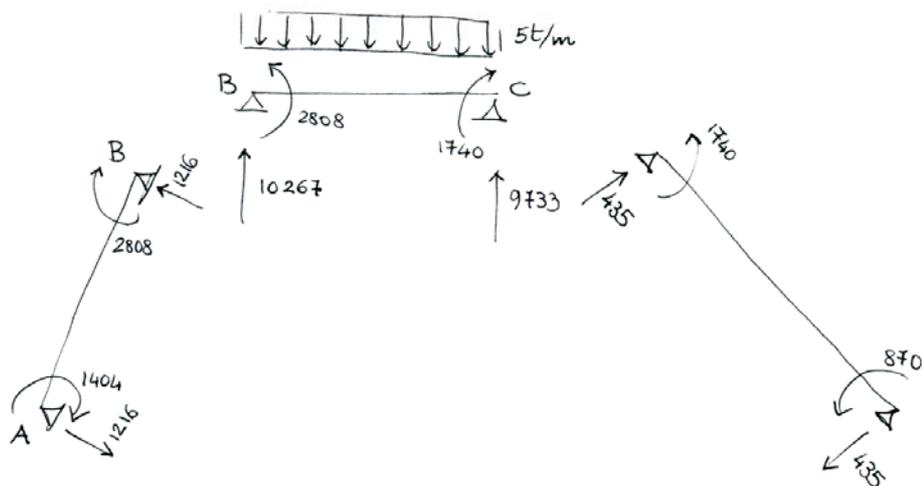
⑦



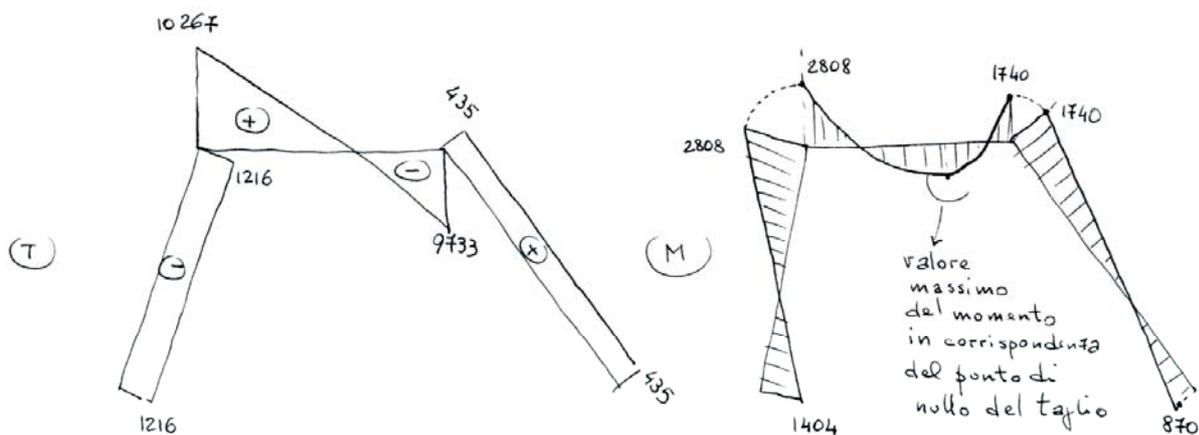
Note

- Il momenti in nero cerchiato sono d'incastro perfetto
- Il momenti in nero sono dovuti ad operazioni di equilibrio del nodo
- Il momenti in rosso sono quelli "di trasporto".
- La procedura è partita dal nodo B.

Trovati i momenti all'estremità delle aste, al fine di individuare l'andamento delle sollecitazioni sul singolo tratto, ognuno di questi può essere studiato alla stregua di una trave appoggiata-appoggiata, caricata dalle eventuali azioni esterne e dai momenti calcolati con il Cross



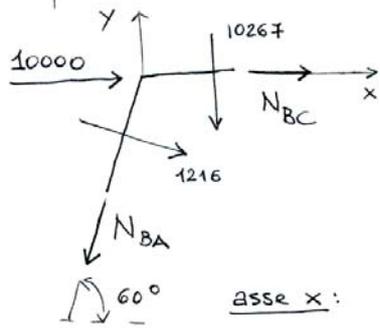
da cui i diagrammi di taglio e momento:



Per quanto riguarda, invece, gli sforzi normali, è necessario individuarne il valore, noto quello dei tagli, scrivendo equazioni di equilibrio alla traslazione in corrispondenza dei nodi B e C:

(9)

Equilibrio nodo B



asse x:

$$1216 \cdot \sin 60^\circ - N_{BA} \cdot \cos 60^\circ + N_{BC} + 10000 = 0$$

asse y:

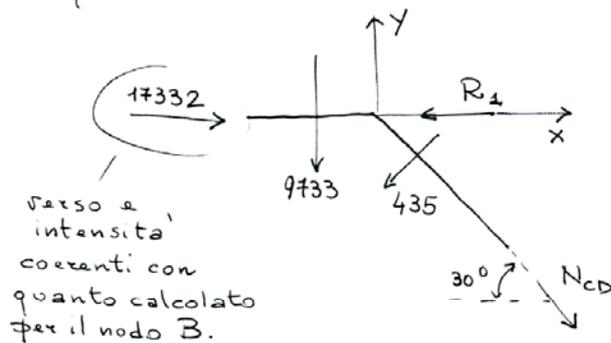
$$-10267 - 1216 \cdot \cos 60^\circ - N_{BA} \cdot \sin 60^\circ = 0$$

Risolvendo questo sistema di due equazioni nelle incognite N_{BA}, N_{BC} si ha:

$$N_{BA} = -12557 \text{ kg} \quad N_{BC} = -17332 \text{ kg}$$

Le aste risultano, come era prevedibile, entrambe compresse. Si noti, inoltre, che, non essendoci azioni ~~o~~ dirette lungo l'asse delle aste, tali valori di sforzo normale risultano costanti lungo lo sviluppo delle stesse.

Equilibrio nodo C



asse x:

$$17332 - 435 \cdot \sin 30^\circ + N_{CD} \cdot \cos 30^\circ - R_1 = 0$$

asse y:

$$-9733 - 435 \cdot \cos 30^\circ - N_{CD} \cdot \sin 30^\circ = 0$$

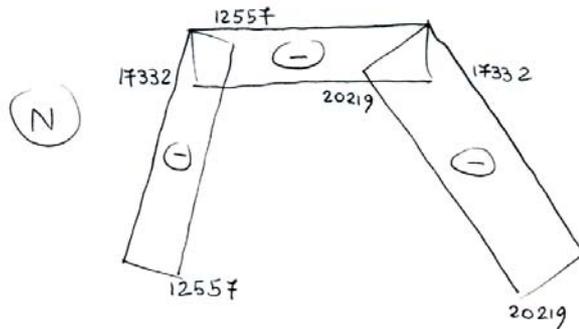
Risolvendo si ottiene sia lo sforzo normale nell'asta CD, sia la reazione del vincolo ausiliario R_1 , fondamentale per il calcolo di $\bar{\delta}$.

Si ottengono i valori:

$$N_{CD} = -20219 \text{ kg}$$

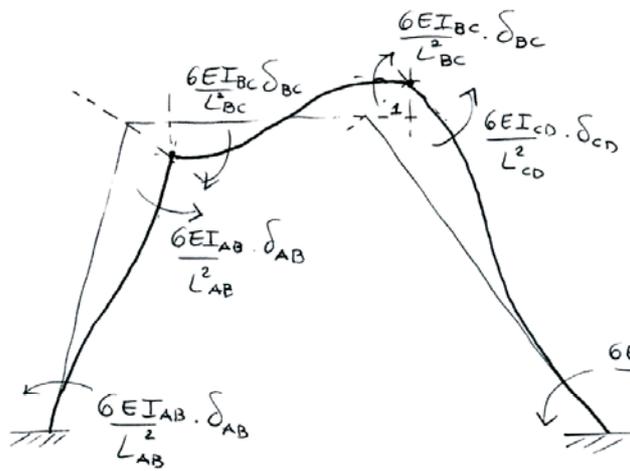
$$R_1 = -395 \text{ kg}$$

È possibile ora tracciare il diagramma di sforzo normale per lo schema (1):



Lo schema (1) è completamente risolto, possiamo passare allo schema (2) con $\delta=1$. La risoluzione di tale schema rispetto al caso precedente presenta un'unica complicazione: l'individuazione dei momenti d'incastro perfetto dovuti agli spostamenti relativi tra gli estremi delle aste.

Gli schemi sono tutti del tipo incastro-incastro, mentre gli spostamenti relativi sono quelli già calcolati



con riferimento alla deformata cinematica

Lo schema a lato individua la deformata reale per $\delta=1$ e rotazioni bloccate in

tutti i nodi (momenti d'incastro perfetto).

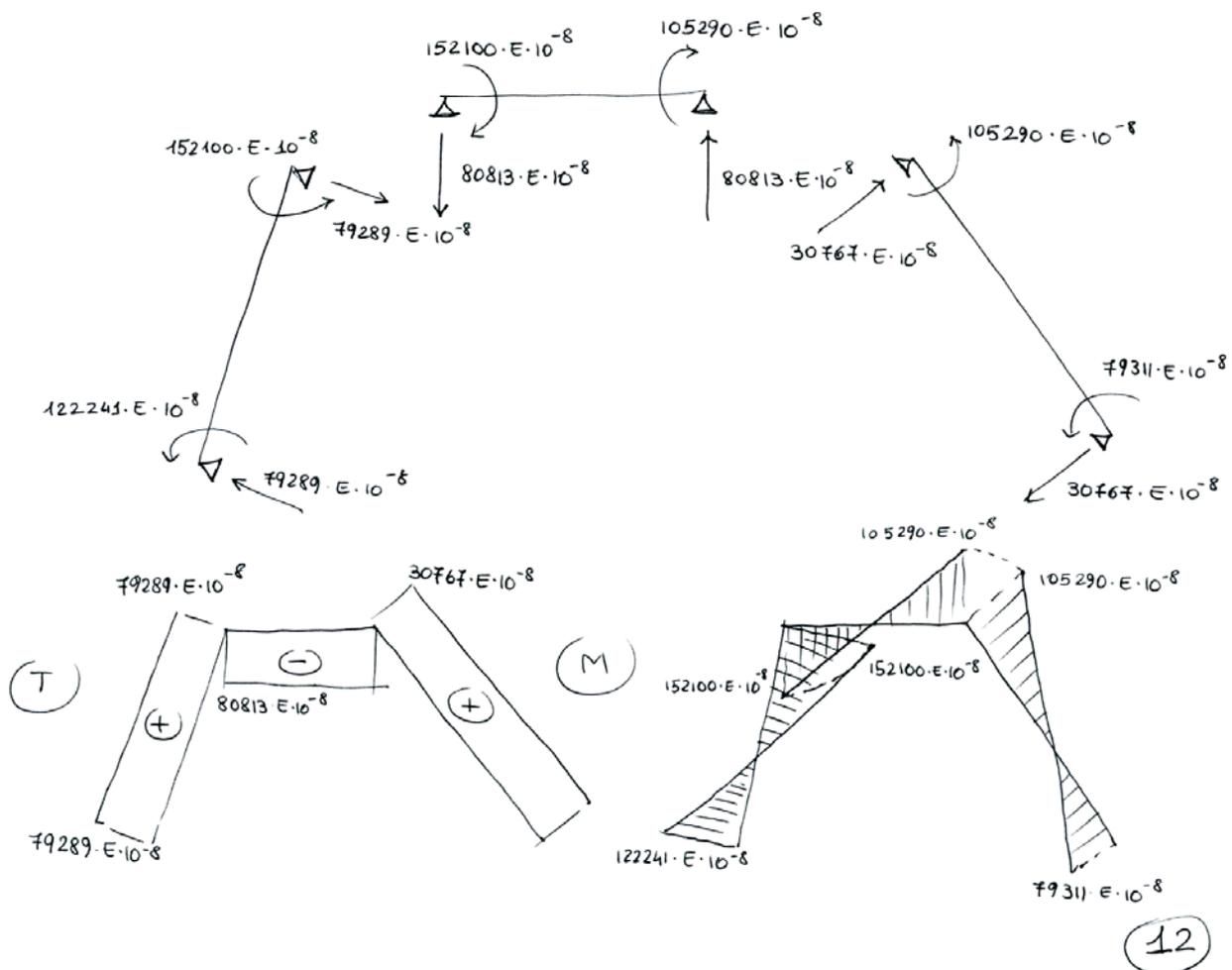
Calcoliamo analiticamente i momenti individuati, con riferimento a quelli dei nodi interni essendo M_{AB} e M_{BC} assorbiti dai vincoli esterni

$$M_{BA} = \frac{6EI_{BA}}{L_{BA}^2} \cdot \delta_{BA} = 6E \cdot \frac{160000 \cdot 10^{-8}}{(3,46)^2} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1\right) = 92384 E \cdot 10^{-8} \text{ Kg} \cdot \text{m}$$

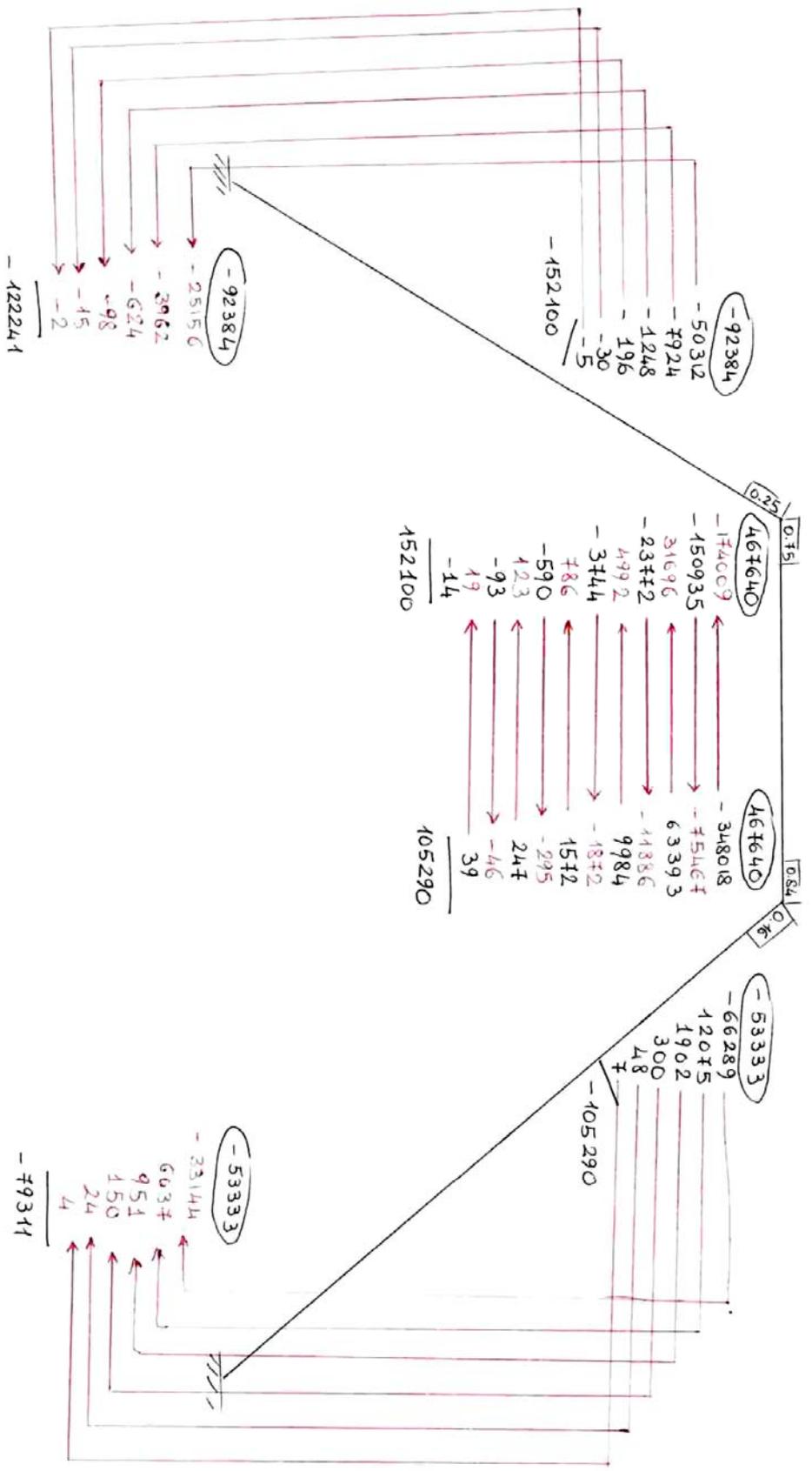
$$M_{BC} = M_{CB} = \frac{6EI_{BC}}{L_{BC}^2} \cdot \delta_{BC} = 6E \cdot \frac{540000 \cdot 10^{-8}}{(4)^2} \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 1\right) = 467640 E \cdot 10^{-8} \text{ Kg} \cdot \text{m}$$

$$M_{CD} = \frac{6EI_{CD}}{L_{CD}^2} \cdot \delta_{CD} = 6E \cdot \frac{160000 \cdot 10^{-8}}{(6)^2} \cdot (2 \cdot 1) = 53333 E \cdot 10^{-8} \text{ Kg} \cdot \text{m}$$

È possibile ora risolvere lo schema alla Cross (vedi pagina seguente) e analogamente a quanto fatto per lo schema (1) risolvere le sollecitazioni

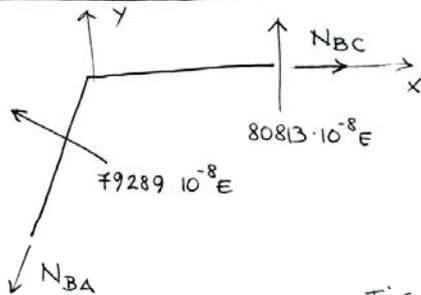


N.B.: Oltre a tutte le indicazioni date per lo schema precedente, si noti che si è omesso per brevità il termine "E-10⁻⁸", a che si è partiti nell'applicazione del metodo dal nodo C



Svolgiamo, dunque, gli equilibri nei nodi B e C per la soluzione degli sforzi normali

Equilibrio nodo B :



asse x :

$$-79289 \cdot 10^{-8} \cdot E \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - N_{BA} \cdot \frac{1}{2} + N_{BC} = 0$$

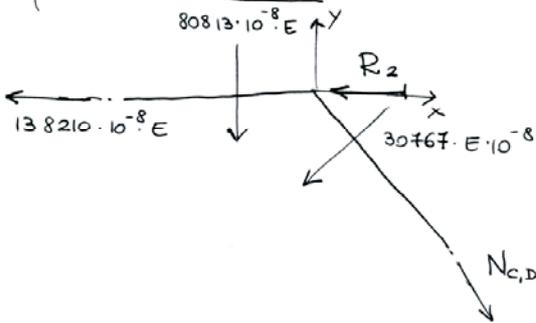
asse y :

$$80813 \cdot 10^{-8} \cdot E + 79289 \cdot 10^{-8} \cdot E \cdot \frac{1}{2} - N_{BA} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

risolvendo si ottiene:

$$\begin{cases} N_{BA} = 139088 \cdot 10^{-8} \cdot E \text{ kg} \\ N_{BC} = 138210 \cdot 10^{-8} \cdot E \text{ kg} \end{cases}$$

Equilibrio nodo C :



asse x :

$$-138210 \cdot 10^{-8} \cdot E - R_2 + \frac{30767 \cdot E \cdot 10^{-8}}{2} + N_{CD} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

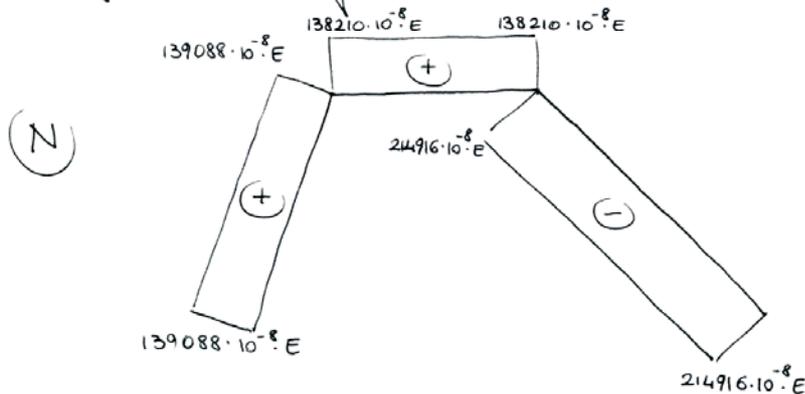
asse y :

$$-N_{CD} \cdot \frac{1}{2} - 80813 \cdot 10^{-8} \cdot E - 30767 \cdot E \cdot 10^{-8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

risolvendo si ha:

$$\begin{cases} N_{CD} = -214916 \text{ kg} \cdot 10^{-8} \cdot E \\ R_2(\delta=1) = -308949 \text{ kg} \cdot 10^{-8} \cdot E \end{cases}$$

Diagramma di sforzo normale:



La cosa più importante è che ora è possibile calcolare il valore di $\bar{\delta}$, noti R_1 e $R_2(\delta=1)$

$$\bar{\delta} = -\frac{R_1}{R_2(\delta=1)} = -\frac{-395 \text{ kg}}{-308949 \text{ kg}} \cdot \frac{10^8}{E}$$

$$= -\frac{395}{308949} \cdot \frac{10^8}{3 \cdot 10^9} = -4,26 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

attenzione:

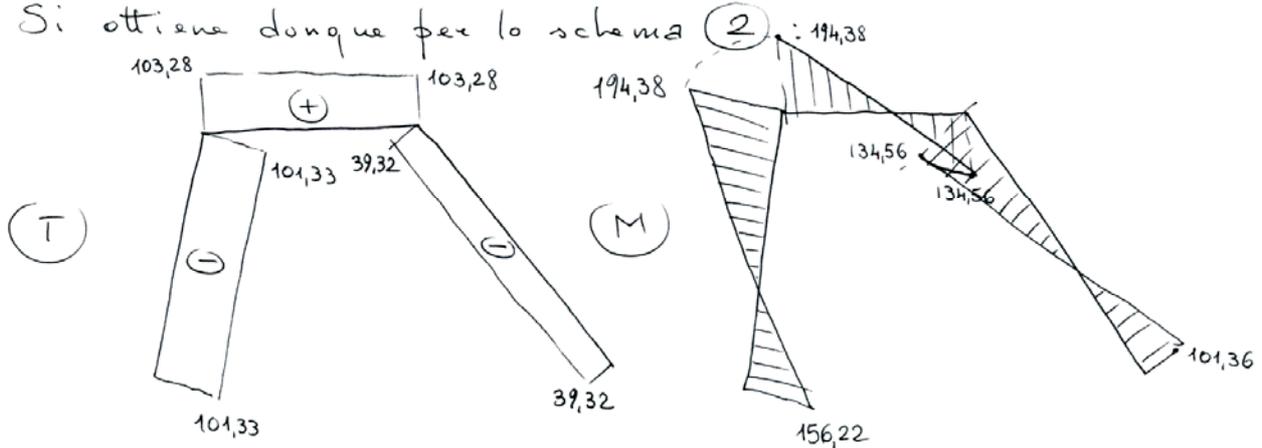
"E" va espresso in kg/m^2 perché nel calcolo dei momenti d'incastro perfetto si sono usati i $\text{kg}\cdot\text{m}$

$$(E = 300000 \text{ kg}/\text{cm}^2 = 3 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \frac{1}{10^{-4} \text{ m}^2} = 3 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2})$$

Per ottenere i diagrammi dello schema (2) con lo spostamento reale $\bar{\delta}$, tutti i valori ottenuti vanno moltiplicati per un coefficiente:

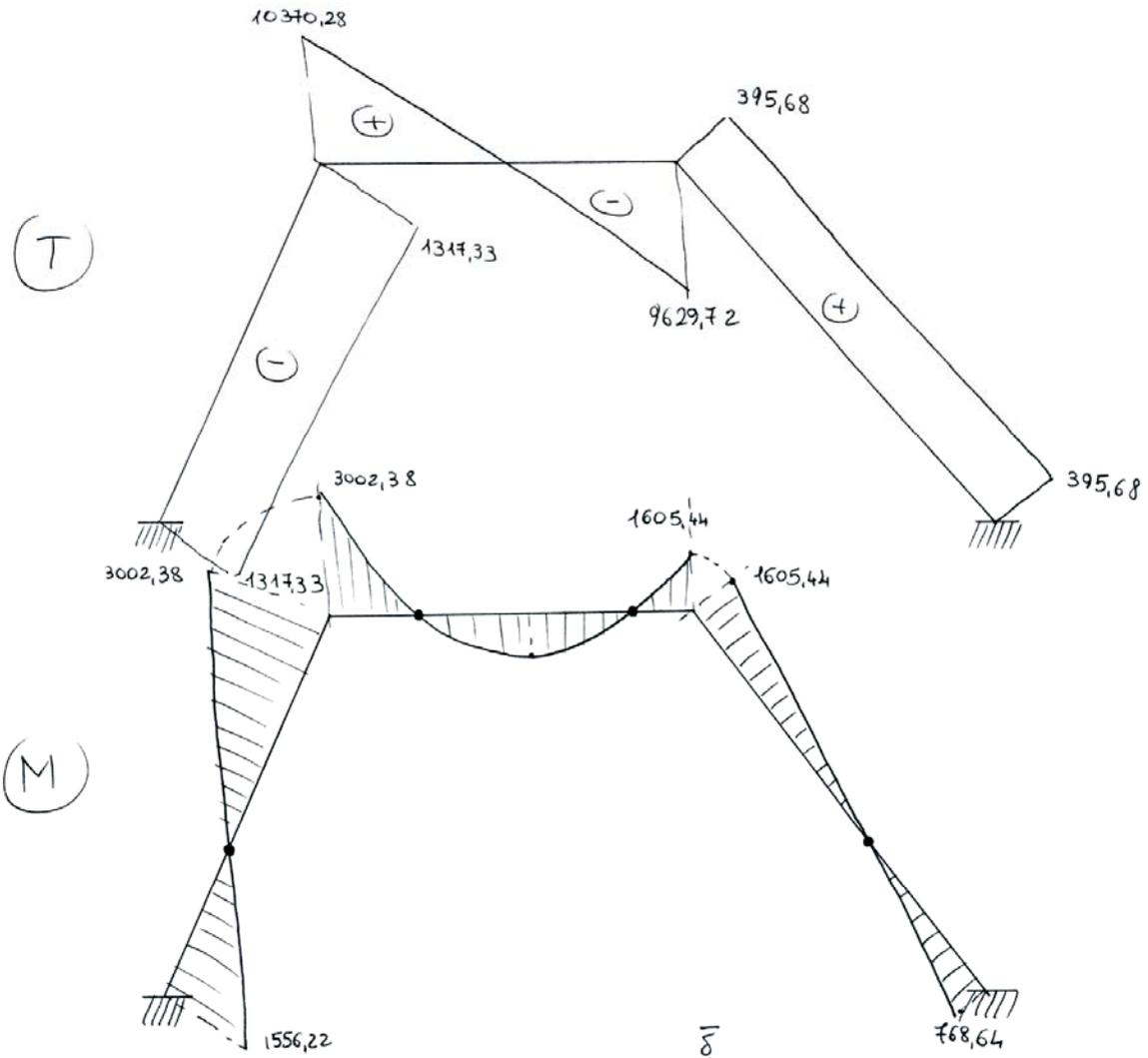
$$\bar{\delta} \cdot 10^{-8} \cdot E = -4,26 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^9 = -12,78 \cdot 10^{-4} = -0,001278$$

Si ottiene dunque per lo schema (2):



La soluzione finale della struttura si ottiene sommando le sollecitazioni dello schema (1) e quelle ottenute appena sopra per lo schema (2), ed è rappresentata alla pagina successiva.

Analogamente si procede per lo sforzo normale.



• punti di
 flesso
 della
 deformata

