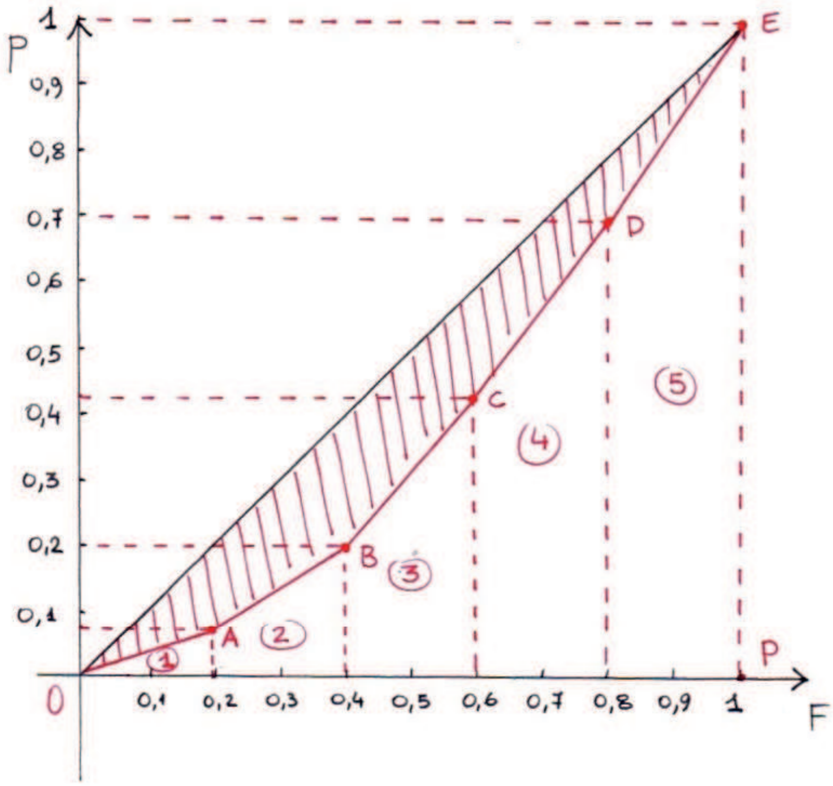
## L'area di concentrazione e la curva di Lorenz

Un'altra misura di concentrazione relativa alla distribuzione di un carattere trasferibile è quella che si ottiene costruendo la cosiddetta "curva di Lorenz".
Ripartiamo dalla stessa tabella utilizzata per calcolare l'indice di Gini, nel caso che abbiamo indicato come "caso 2", che è poi il più interessante per noi, essendo i casi 1 e 3 due casi estremi (massima e minima concentrazione):

| i | X | n | f | F | p | punti |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Baldo | 3 | 0,075 | 0,075 | 0,2 | A (0,2 ; 0,075) |
| 2 | Andrea | 5 | 0,125 | 0,2 | 0,4 | B (0,4 ; 0,2) |
| 3 | Arturo | 9 | 0,225 | 0,425 | 0,6 | C (0,6 ; 0,425) |
| 4 | Luca | 11 | 0,275 | 0,7 | 0,8 | D (0,8 ; 0,7) |
| 5 | Marco | 12 | 0,3 | 1 | 1 | E (1 ; 1) |
| | | 40 | 1 | | | |

La curva di Lorentz è costruita in un riferimento cartesiano in cui sull'asse "x" si mettono le frequenze cumulate p e sull'asse "y" i valori di F. Ogni riga della tabella genera un punto in tale piano le cui coordinate sono appunto (p, F)
Nel nostro caso i punti da piazzare sul piano sono 5, oltre all'origine (0,0) e sono indicati a lato della tabella

Unendo i punti individuati si ottiene una spezzata, a cui viene dato il nome di <u>curva di Lorenz</u>.




Poiche', come abbiamo gia' fatto notare quando abbiamo parlato dell'indice di Gini, risulta $F_i \leq p_i$, questa curva si viene a trovare tutta al di sotto della retta che unisce i punti O ed E. Volendo essere piu' specifici tale curva coincide con la retta $\overline{OE}$ quando il carattere è equamente distribuito, cioè quando la concentrazione è nulla. Al contrario piu' il carattere è concentrato, piu' la curva di Lorenz si allontana da $\overline{OE}$.

L'area compresa tra la retta $\overline{OE}$ e la curva di Lorenz, e che nel grafico si è evidenziata, diventa cosi' una misura di quanto il carattere è concentrato; tale area si dira' <u>area di concentrazione</u>.

Cerchiamo di capire come sia possibile calcolare tale area. La cosa più semplice da fare è calcolare l'area del triangolo $O\hat{E}P$ e a tale area sottrarre quella delle figure piane indicate con i numeri da 1 a 5.

L'area del triangolo $O\hat{E}P$ è quella di un triangolo avente base 1 ed altezza 1, cioè $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$, le aree numerate, invece, sono quelle di trapezi rettangoli (tranne l'area 1 che è quella di un triangolo il quale, tuttavia, può comunque considerarsi come un trapezio con base minore pari a zero), la cui estensione per la generica area "i-esima" si può calcolare come:

$$A_i = \left(\frac{F_i + F_{i-1}}{2}\right) \cdot \left(p_i - p_{i-1}\right)$$

in cui "i" è l'indice di riga e si userà $F_0 = 0$ e $p_0 = 0$ quando $i = 1$

Dunque la formula finale per l'area di concentrazione sarà

$$A_c = \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{F_i + F_{i-1}}{2}\right) \cdot \left(p_i - p_{i-1}\right)$$

Tale misura di concentrazione può andare da un valore minimo che è zero, ad un valore massimo che è $\frac{1}{2}$, volendo ottenere un indice normalizzato, il che vuol dire un indice che vari tra 0 e 1, basterà moltiplicare per 2 l'area di concentrazione

$$I_c = 2 \cdot A_c$$

Proviamo a calcolare tale indice con riferimento al caso che stiamo studiando:

$$A_c = \frac{1}{2} - \frac{0,2 \cdot 0,075}{2} - \left(\frac{0,2+0,075}{2}\right) \cdot (0,4-0,2) - \left(\frac{0,425+0,2}{2}\right) \cdot (0,6-0,4) - \left(\frac{0,7+0,425}{2}\right) \cdot (0,8-0,6) - \left(\frac{1+0,7}{2}\right) \cdot (1-0,8) =$$

$$= \frac{1}{2} - 0,0075 - 0,0275 - 0,0625 - 0,1125 - 0,17 =$$

$$= 0,12 \longrightarrow \boxed{I_c = 0,24}$$

come ci aspettavamo, e come già ci aveva indicato l'indice di Gini, il carattere presenta una bassa concentrazione.

$I_c$ viene detto "coefficiente di Gini", in maniera generale si può utilizzare la seguente tabella per interpretarne il valore:

$0 \leq I_c < 0,25 \longrightarrow$ bassa concentrazione

$0,25 \leq I_c < 0,5 \longrightarrow$ media concentrazione

$0,5 \leq I_c < 0,75 \longrightarrow$ alta concentrazione

$0,75 \leq I_c \leq 1 \longrightarrow$ estrema concentrazione