Disposizioni con ripetizione

Ci sono delle situazioni applicative in cui gli oggetti da sistemare all'interno di un certo numero di posti possono ripetersi in maniera indefinita, il che significa che, al limite, lo stesso oggetto puo' anche occupare tutti i posti.

Per esempio si considerino le seguenti cifre: 2, 4, 7, 9 e ci si chieda quanti numeri di 3 cifre è possibile creare utilizzandole. In questo problema l'ordine ovviamente conta (279 e 792, per esempio, sono numeri diversi), tuttavia la stessa cifra puo' essere usata il numero di volte che si vuole, al limite occupando anche tutti e 3 i posti (222, per esempio, è un numero possibile).

Come si ragiona? Non è difficile... per ogni singolo posto ho sempre a disposizione 4 possibilità, indipendentemente da come si sono occupati i posti precedenti:

$$\underbrace{4}_{\text{possibilita' 1ª cifra}} \cdot \underbrace{4}_{\text{possibilita' 2ª cifra}} \cdot \underbrace{4}_{\text{possibilita' terza cifra}}$$

I possibili numeri che si possono generare sono, dunque, 64 (4·4·4). Volendo generalizzare questa espressione si moltiplica il numero di oggetti "n" tante volte quanti sono il numero di posti:

$$D^{r}_{n,m} = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{\text{"m" volte}} = \boxed{n^{m}}$$

Volendo fare un altro esempio, si consideri la schedina del Totocalcio, 14 partite di cui indovinare l'esito attraverso 3 simboli: "1" vittoria in casa, "2" vittoria in trasferta, "X" pareggio. E' evidente che in una colonna l'ordine conta e che un simbolo puo' ripetersi tutte le volte che si vuole. Si tratta allora di disposizioni con ripetizione:

$n = 3 \quad m = 14$

$$D^{r}_{3,14} = 3^{14} = 4782969$$

Ci sono, quindi, quasi 5 milioni di possibili colonne che si possono giocare.

Una cosa importante da notare è che, mentre nelle disposizioni senza ripetizione il numero di oggetti deve essere per forza maggiore o uguale al numero di posti, altrimenti i posti non si potrebbero riempire tutti, nel caso delle disposizioni con ripetizione tale condizione non è più necessaria potendo un oggetto ripetersi tutte le volte che si vuole.

Permutazioni

Quando nelle disposizioni senza ripetizione il numero di oggetti e il numero di posti sono uguali si parla di permutazioni. Dunque le permutazioni non sono altro che un caso particolare di disposizioni senza ripetizione, per cui il loro numero può essere calcolato con la formula di quest'ultimo imponendo "n = m":

$$P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

nelle permutazioni è inutile indicare 2 indici, visto che n = m

n ed m sono uguali per cui ad "m" si sostituisce "n"

$0! = 1$ per definizione

Dunque le permutazioni di "n" oggetti (ovviamente in "n" posti trattandosi di permutazioni) sono pari al fattoriale di "n"

Facciamo un esempio: la domenica una famiglia di 6 persone mangia tutta insieme occupando un tavolo con 6 sedie: quanti modi diversi ci sono di occupare i posti?
L'ordine conta e il numero di oggetti è uguale al numero di posti, per cui si ha:

$$P_6 = 6! = 720$$

Ci sono 720 modi diversi.

Permutazioni con ripetizioni assegnate

Vi sono alcuni problemi di permutazione che richiedono maggiore attenzione, perchè prevedono la presenza di ripetizioni il cui numero è assegnato.
Cerchiamo di capire la situazione con un esempio: vogliamo calcolare il numero di anagrammi della parola: "pala" (anagrammi anche senza senso)
Si tratta di un problema di permutazione di 4 oggetti (in 4 posti), il problema è che 2 di questi oggetti sono uguali. Per distinguerli da ora in poi li indicherò con un colore diverso:

pala

Se trattassi il problema come un caso di normali permutazioni il numero di anagrammi sarebbe : $P_4 = 4! = 24$

Tuttavia se provo ad elencarli mi accorgo di qualcosa di nuovo:

pala apla lapa aalp
pala apla lapa aalp ...

cio' che appare evidente è che non tutte le permutazioni calcolate vanno considerate perche' di fatto tutte quelle che presentano le 2 "a" semplicemente scambiate di posto sono corrispondenti alla stessa parola. Si ci deve allora chiedere fissata una possibilita' in quanti modi la "a" puo' scambiarsi di posto: poiche' le "a" sono 2 e occupano due posti il numero di modi in cui si puo' scambiare corrisponde alla permutazione di 2 oggetti : $P_2 = 2! = 2$ (il che è evidente dall'elenco di cui sopra).

Dunque se 2 casi sono da considerarsi un'unica permutazione è evidente che il risultato ottenuto va diviso per 2:

$$P_{4,(2)} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

si indica il numero di volte in cui un oggetto si ripete.

e se la parola da anagrammare non fosse "pala", ma "papa".

Stavolta ho due lettere che si ripetono 2 volte, per cui il numero di parole sara' ancora minore. In effetti ora le parole si raggruppano non solo per cambio di posto delle "a", ma anche delle "p", per cui il risultato di prima va ancora diviso per le permutazioni di 2 oggetti, ovvero 2! :

$$P_{4,(2,2)} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{24}{2\cdot 2} = 6$$

2 blocchi con 2 ripetizioni ciascuno.

$$\begin{pmatrix} papa & aapp \\ appa & apap \\ paap & ppaa \end{pmatrix}$$

Capito il meccanismo il calcolo non dovrebbe presentare difficolta'; per esempio calcoliamo gli anagrammi di "cassetta".

Gli oggetti sono 8, ma ne abbiamo 3 che si ripetono 2 volte, per cui si avra':

$$P_{8,2,2,2} = \frac{8!}{2!\,2!\,2!} = \frac{40320}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 5040$$

Un altro esempio possibile può essere: quante colonne del Totocalcio si possono combinare utilizzando 8 segni "x", 4 segni "1" e 2 segni "2". I simboli (oggetti) da posizionare sono 14, ma con uno che si ripete 8 volte, uno 4 volte e l'ultimo 2 volte per cui si avrà:

$$P_{14,8,4,2} = \frac{14!}{8!\,4!\,2!} = \frac{87178291200}{40320 \cdot 24 \cdot 2} =$$

$$= 45045$$

Volendo scrivere una formula generale, dicendo "n" gli oggetti, "r" il numero di oggetti che si ripetono e "K_1", "K_2", ... "K_r" il numero di volte che ognuno degli "r" oggetti si ripete, avremo:

$$\boxed{P_{n,K_1,K_2,\dots K_r} = \frac{n!}{K_1!\,K_2!\dots K_r!}}$$