Elementi essenziali di Algebra

Questo capitolo si dividerà essenzialmente in due parti: si parlerà in prima battuta di polinomi, dopodiché ci si concentrerà sulle successioni.

1. POLINOMI

Cominciamo con il dare la definizione di polinomio. Si dice polinomio una espressione del tipo seguente:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad con\ a_n \neq 0 \tag{1}$$

Gli insiemi in cui tipicamente si prendono i termini $a_1, \dots, a_n$ sono quelli che algebricamente si dicono degli "anelli", ovvero Z, Q, R, C, ma anche, per esempio, l'insieme che viene chiamato F_p che è il campo con gli elementi delle classi di resto modulo p (in altre parole si considereranno come coefficienti possibili solo i numeri interi da 0 e $p-1$, cioè tutti i possibili resti di divisione per p).

Un polinomio si dice "monico" se $a_n = 1$, n si dice invece grado del polinomio e lo possiamo indicare con $\deg(p(x))$.

Vediamo alcuni richiami semplici di base sui polinomi, partendo dalla divisione euclidea. Così come è possibile dividere due numeri è possibile dividere tra essi due polinomi. In particolare supponiamo di avere $p(x)$ con $\deg\big(p(x)\big) = n$ e un secondo polinomio $q(x)$ con $\deg\big(q(x)\big) = a$, in questo caso è possibile scrivere il primo polinomio come:

$$p(x) = q(x) \cdot h(x) + r(x) \quad con \quad \deg\big(r(x)\big) < \deg(q(x)) = a \tag{2}$$

Dalla divisione euclidea discendono alcuni risultati noti, come per esempio il **teorema di Ruffini**, il quale ci fornisce un modo per scrivere il polinomio nel caso questo venga diviso per un polinomio di grado 1: $x - a$. In tal caso, infatti, il grado del resto dovrà essere strettamente minore di 1, e di conseguenza il resto sarà un polinomio di grado zero il che equivale a dire una costante:

$$p(x) = (x - a) \cdot h(x) + c \tag{3}$$

Tale costante, è facile verificare sostituendo la posto di x il valore a, sarà proprio il valore del polinomio calcolato nel punto a:

$$p(x) = (x - a) \cdot h(x) + p(a) \tag{4}$$

Dal teorema di Ruffini si può passare ad alcuni corollari interessanti:

"se un polinomio di grado $\leq n$ ha $n+1$ radici distinte, allora esso è il polinomio nullo (cioè il polinomio con tutti coefficienti nulli)"

La dimostrazione di tale proprietà è presto sviluppata per assurdo: diciamo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ le $n+1$ radici distinte del polinomio. Ciò vuol dire che il polinomio può essere scritto:

$$p(x) = (x - \lambda_1) \cdot (x - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_{n+1}) + c \tag{5}$$

se il polinomio può essere scritto in questo modo, il che è assicurato dal teorema di Ruffini, vuol dire che dovrà avere almeno grado $n+1$, il che contraddice l'ipotesi che sia di grado n. L'unica possibilità coerente con tale ipotesi è che il polinomio si annulli non per $n+1$ valori per ma per qualsiasi valore si assegni alla x, ovvero che sia il polinomio nullo.

Questo ci porta a poter individuare il cosiddetto **principio di identità dei polinomi**, il quale si sottolinea subito vale nel caso in cui i coefficienti siano definiti in un insieme contenente infiniti elementi, quindi si tenga per un momento da parte il caso di coefficienti in F_p.

"consideriamo due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ di grado minore uguale di n, e supponiamo che $p(x)$ e $q(x)$ coincidano in $n+1$ punti, allora in tal caso possiamo concludere che essi sono lo stesso polinomio"

Per dimostrarlo basta considerare il polinomio $p(x)-q(x)$. Tale polinomio essendo combinazione lineare di polinomi di grado minore uguale di n, è anch'esso un polinomio di grado minore uguale di n. Questo polinomio, che abbiamo costruito ad hoc, ha la proprietà di annullarsi in tutti i punti in cui sono uguali $p(x)$ e $q(x)$, per cui se tali punti sono maggiori in numero rispetto ad n, questo vuol dire che il polinomio $p(x)-q(x)$ è il polinomio identicamente nullo, il che è la stessa cosa di dire che $p(x)=q(x)$.

Perché teniamo a parte il caso dei polinomi con coefficienti e valori in F_p ?

Possiamo far vedere con un controesempio che il principio di identità per essi non vale. Si consideri infatti il polinomio:

$$p(x)=x^p-x \tag{6}$$

per capirci bene facciamo un esempio, supponiamo di essere in F_5 e che quindi la (6) sia il polinomio x^5-x. Non è difficile capire che questo polinomio si annulla per tutti i possibili valori che possiamo assegnare ad x. Per $x=0$ e $x=1$ è banale, per altri valori abbiamo:

$$p(2)=2^5-2=30=\ 0\ (mod\ 5) \tag{7}$$
$$p(3)=3^5-3=240=\ 0\ (mod\ 5) \tag{8}$$
$$p(4)=4^5-4=1020=\ 0\ (mod\ 5) \tag{9}$$

e potremmo andare avanti per qualsiasi valore di x.

Questo risultato è generale, si chiama **piccolo teorema di Fermat**, esso dice che:

"considerato un numero p primo, allora per ogni intero a, $a^p \equiv a\ (mod\ p)$"

il che nel nostro caso equivale a dire che il polinomio x^p-x ha infinite radici se viene considerato a valori sul campo F_p, eppure non è un polinomio nullo. Da ciò emerge che per questa classe di polinomi il principio di identità non vale. Questo controesempio serve anche a sottolineare la differenza che c'è in algebra tra la definizione di polinomio e di funzione polinomiale. Nel caso in oggetto la funzione polinomiale x^p-x è identicamente nulla, perché assume come valore 0 qualsiasi sia il valore che si assegni ad x nel suo dominio, tuttavia la stessa espressione intesa come polinomio non risulta un polinomio nullo, essendo i coefficienti dei suoi termini distinti da zero.

Un altro modo di vedere tale questione è quella di pensare che se il polinomio definito su F_p è di grado p e che quindi per poterne determinare la "nullità" esso si dovrebbe annullare in $p+1$ punti. Tuttavia in F_p non abbiamo $p+1$ classi di resto distinte, per cui se ne può ottenere l'annullamento in soli p punti significativi, il che non basta per poter affermare che il polinomio sia nullo.

Altra proposizione interessante da un punto di vista applicativo è la seguente:

"esiste un unico polinomio $p(x)$ di grado n che rispetta le condizioni:

$$p(x_i) = y_i \quad per\ i = 1, \dots, n+1 \qquad \textit{(10)"}$$

In altre parole per caratterizzare un polinomio di grado n è necessario fissare almeno $n+1$ valori da esso assunti in punti distinti. Una dimostrazione possibile per tale affermazione si può generare per costruzione. Si può costruire, infatti, la seguente successione di polinomi:

$$p_i(x) = \frac{\prod_{j\in\{1,\dots,n+1\}, j\neq i}(x - x_j)}{\prod_{j\in\{1,\dots,n+1\}, j\neq i}(x_i - x_j)} \tag{11}$$

il singolo polinomio di tale successione si annulla quando $x = x_j$, mentre è pari esattamente ad 1 quando $x = x_i$. Sembra complicato ma non lo è affatto, facciamo un esempio pratico, supponiamo che $n = 3$, i quattro polinomi che si generano sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= \frac{(x - x_2)\cdot(x - x_3)\cdot(x - x_4)}{(x_1 - x_2)\cdot(x_1 - x_3)\cdot(x_1 - x_4)} \\
p_2(x) &= \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_3)\cdot(x - x_4)}{(x_2 - x_1)\cdot(x_2 - x_3)\cdot(x_2 - x_4)} \\
p_3(x) &= \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_4)}{(x_3 - x_1)\cdot(x_3 - x_2)\cdot(x_1 - x_4)} \\
p_4(x) &= \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)}{(x_4 - x_1)\cdot(x_4 - x_2)\cdot(x_4 - x_3)}
\end{aligned} \tag{12}$$

La variabile x è presente solo al numeratore, come deve essere in un polinomio, mentre al denominatore c'è una parte numerica, essendo x_1, x_2, x_3, x_4 numeri assegnati. Questi polinomi è facile verificare che rispettano le proprietà per cui sono stati costruiti: $p_i(x)$ vale 1 per $x = x_i$ e 0 negli altri punti.

Ora con i polinomi definiti dalla (11) è facile costruirsi ed univocare il polinomio che rispetta le $n+1$ identità richieste dalla (10), in particolare esso sarà:

$$p(x) = y_1 \cdot p_1(x) + y_2 \cdot p_2(x) + \cdots + y_{n+1} \cdot p_{n+1}(x) \tag{13}$$

La proposizione appena dimostrata è da specificare un attimo nel caso in cui ci troviamo nel caso di polinomi a coefficienti interi (cioè a coefficienti nell'insieme Z). Infatti quello che va capito bene è che quando ad un polinomio a coefficienti interi si assegnano una serie di valori, esso, indipendentemente dal grado, risulta soggetto a dei vincoli, e quindi in punti che non siano quelli assegnati non può assumere un valore libero, ma solo un insieme di valori compatibili con il fatto che i coefficienti del polinomio sono appunto numeri interi.

Si consideri, per esempio, la seguente situazione:

$p(x)$ polinomio a coefficienti interi per cui $p(1) = 1$ e $p(7) = 7$ vogliamo cercare di capire quali valori può assumere $p(4)$.

Per il teorema di Ruffini possono scrivere che:

$$p(x) = (x-1)\cdot q(x) + p(1) = (x-1)\cdot q(x) + 1 \tag{14}$$

Ora in questa espressione ci vado a sostituire $x = 7$, ottenendo:

$$p(7) = (7-1) \cdot q(7) + 1 = 6 \cdot q(7) + 1 \tag{15}$$

ma noi sappiamo che $p(7) = 7$, per cui:

$$7 = 6 \cdot q(7) + 1 \ \rightarrow q(7) = 1 \tag{16}$$

Ora posso applicare il teorema di Ruffini al polinomio $q(x)$ visto che conosco il suo valore in un punto:

$$q(x) = (x-7) \cdot r(x) + 1 \tag{17}$$

se sostituisco questa espressione nella (14), e faccio qualche semplice passaggio algebrico si ottiene:

$$p(x) = (x-1) \cdot (x-7) \cdot r(x) + x \tag{18}$$

a questo punto mettiamo $x = 4$ all'interno di questa espressione ottenendo:

$$p(4) = (4-1) \cdot (4-7) \cdot r(4) + 4 = -9 \cdot r(4) + 4 \tag{19}$$

ma poiché $r(x)$ è un polinomio a coefficienti interi, il suo valore per $x = 4$ sarà un numero intero, per cui il polinomio di partenza sicuramente assumerà un valore complessivo che è un multiplo di -9 a cui viene aggiunto 4, il che equivale a dire un numero congruo a 4 (mod 9). Per capirci valori possibili sono: $4, 13, 22, 31, -5, -14 \ldots$, valori che non rispettano la proprietà di essere congrui a 4 $mod(9)$ non possono essere ottenuti.

Altro risultato che non può mancare nel bagaglio tecnico di strumenti necessari alla risoluzione dei problemi è il seguente:

"$p(x)$ polinomio a coefficienti interi allora $(a-b)/p(a) - p(b)$"

che si legge (a − b) divide p(a) − p(b). Facciamo un esempio con un polinomio semplice di terzo grado a coefficienti interi prendendo due valori qualsiasi

$$p(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + x + 1 \quad a = 2, b = -1 \tag{20}$$

calcoliamo il polinomio nei punti a e b:

$$\begin{gathered} p(2) = 16 - 12 + 2 + 1 = 7 \\ p(-1) = -2 - 3 - 1 + 1 = -5 \end{gathered} \tag{21}$$

come si può facilmente verificare $p(a) - p(b) = 12$ mentre $a - b = 3$, e resta verificato che 3 *divide* 12.

Questo risultato è generale qualsiasi siano a e b a patto però che il polinomio sia a coefficienti interi.

Questi, insieme alle relazioni coefficienti-radici che diamo per assodate e note, gli elementi di base per i polinomi relativamente alla matematica "olimpica", proviamo ora a fare qualche esercizio per avere una idea di come applicare questi concetti in maniera operativamente utile.

<u>Esercizio 1</u>:

Si determini il resto della divisione di $p(x) = x^{2016} + 3 \cdot x^{1955} + 7$ per $q(x) = x^2 + 1$

In linea teorica si potrebbe effettuare la divisione diretta, ma risulta ovviamente una strada non praticabile (con x^{2016} bisognerebbe scendere il grado di 2015 con 2015 passaggi).

Bisogna inventarsi una strada alternativa, e nel caso specifico ce ne sono due: la prima utilizza le proprietà di $x^2 + 1$, la seconda le congruenze tra polinomi, che come vedremo hanno molto in comune con quelle più note relative ai numeri interi.

Vediamo la prima strada. Prima di tutto sappiamo che possiamo comunque formalmente scrivere la divisione euclidea:

$$p(x) = (x^2 + 1) \cdot h(x) + r(x) = (x^2 + 1) \cdot h(x) + (ax + b) \tag{22}$$

essendo $q(x)$ di secondo grado, il resto sarà necessariamente un polinomio lineare, che è nostro compito determinare.

Il polinomio è a coefficienti interi, tuttavia nulla vieta di calcolarlo in un punto qualsiasi, persino per un numero complesso. Nello specifico posso pensare di calcolare la (22) per $x = i$:

$$p(i) = (-1 + 1) \cdot h(i) + (ai + b) = ai + b \tag{23}$$

ma $p(i)$ è facile da calcolare con la scrittura esplicita di $p(x)$, basta ricordarsi che: $i = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, dopodiché i termini si ripetono circolarmente di 4 in 4. Ora il numero 2016 è congruo a 0 modulo 4, per cui $i^{2016} = 1$, mentre 1955 è congruo ad 3 modulo 4, per cui $i^{1955} = -i$, da cui:

$$p(i) = i^{2016} + 3 \cdot i^{1953} + 7 = 1 - 3i + 7 = -3i + 8 \tag{24}$$

da cui si ricava per confronto tra la (24) e la (23) che: $a = -3$ e $b = 8$.

Il resto della divisione sarà: $-3x + 8$.

Questa strada è abbastanza "mirata" perché si sfrutta una proprietà del polinomio $q(x)$, vediamo una seconda strada che può essere utilizzata in maniera più generale.

Considero classi di congruenza modulo : $x^2 + 1$, e quindi posso scrivere che x è congruo ad $x\ mod(x^2 + 1)$, x^2 è congruo a -1:

$$x^2 \equiv -1 \bmod (x^2 + 1) \tag{25}$$

non c'è niente di complicato in questa scrittura, semplicemente che x^2 si può scrivere come un polinomio (in questo caso pari ad 1) per $x^2 + 1$ a cui bisogna aggiungere -1:

$$x^2 = 1 \cdot (x^2 + 1) - 1 \tag{26}$$

Ragionando allo stesso modo non ci vuole molto a capire che x^3 è congruo $-x\ mod(x^2 + 1)$, mentre x^4 è congruo $1\ mod(x^2 + 1)$, infatti in quest'ultimo caso dovrebbe essere $-x^2\ mod(x^2 + 1)$, ma x^2 è congruo -1 per cui $-(-1) = 1$, e così via questo ragionamento si può interare. In altri termini con ciclicità pari a 4, si ripetono le congruità: $x\ mod(x^2 + 1)$, $-1\ mod(x^2 + 1)$, $-x\ mod(x^2 + 1)$ e $1\ mod(x^2 + 1)$.

In particolare avremo che x^{2016} avrà la stessa congruità di x^4 per cui sarà congruo $1\ mod(x^2 + 1)$, mentre x^{1955} avrà la stessa congruità di x^3 per cui sarà congruo $-x\ mod(x^2 + 1)$. Alla fine dunque il resto si potrà scrivere:

$$1 - 3 \cdot (-x) + 7 = -3x + 8 \qquad (27)$$

ottenendo così il medesimo risultato di prima.

<u>**Esercizio 2**</u>:

Sia $p(x)$ polinomio a coefficienti interi, tale che $p^k(a) = a$ per un certo k *intero e* a *intero*. Si mostri che $p(p(a)) = a$.

Si precisa che con la scrittura $p^k(a)$ significa iterare k volte il polinomio su se stesso:

$$p^k(x) = p(p\Big(p\big(\dots.\big(p(x)\big)\dots\big)\Big)) \quad k\ volte \qquad (28)$$

L'idea per risolvere questo esercizio è quello di utilizzare la relazione $(a-b)/p(a)-p(b)$, in cui al posto di a si considera $p(a)$, mentre al posto di b si considera a. Avremo allora che:

$$p(a) - a/p(p(a)) - p(a) \qquad (29)$$

Questa relazione può essere iterata sul termine di destra in continuità ottenendo:

$$p(a) - a/p\big(p(a)\big) - p(a)/p^3(a) - p^2(a)/\dots/p^{k+1}(a) - p^k(a)/p(a) - a \qquad (30)$$

nell'ultimo passaggio si è tenuto conto dell'ipotesi: $p^k(a) = a$.

La relazione (30) porta ai due estremi della catena di divisibilità lo stesso termine, il che vuol dire che tutti quelli interni sono uguali (almeno in valore assoluto). In altri termini se $p(a) - a$ è per esempio 5, e c'è una catena di divisibilità che inizia con 5 e finisce con 5, i termini che la compongono o sono 5 o sono -5, altrimenti la divisibilità non sarebbe verificata.

Applicando questa idea ai primi due termini della sequenza nella relazione (30), si individuano solo due possibilità:

$$p(a) - a = p\big(p(a)\big) - p(a) \qquad (31)$$
$$p(a) - a = -p\big(p(a)\big) + p(a) \qquad (32)$$

Dalla (32) segue direttamente la tesi, l'unica cosa che dobbiamo far vedere è che non si può verificare la (31) perché essa contraddice l'ipotesi : $p^k(a) = a$. Infatti con questa ipotesi stiamo dicendo che dopo k passaggi noi dobbiamo ritornare in a, ma se valesse la (31) se anche tornassimo, per via dei passi successivi, in $p(a)$, una volta giunti ivi ci dovremmo spostare per forza in $p(p(a))$, dovendo essere la differenza uguale anche in segno. Nella sostanza se vale la (31) il polinomio in a non ci torna più.

Dunque la (31) va scartata come possibilità e vale solo la (32), che ci fornisce il risultato che noi cerchiamo.

Ultima cosa che possiamo vedere è un **criterio di irriducibilità di un polinomio con coefficienti in *Z***.

Dire che un polinomio è irriducibile significa asserire che non esiste alcun modo per poterlo scrivere come prodotto di due polinomi di grado più basso. In generale non è assolutamente semplice capire quando un polinomio sia irriducibile e quando non lo sia, nel caso in cui i coefficienti siano interi positivi o negativi è possibile utilizzare il cosiddetto **criterio di Eisenstein** il quale asserisce che:

"sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi, e supponiamo che esista p primo che non divide il coefficiente del termine di grado massimo ma che divide tutti i coefficienti fino a quello di grado immediatamente inferiore al massimo, mentre p^2 non divide il termine noto:

$$p \nmid a_n \ , \ p/a_i \ con \ i = 0,1,2,\dots,n-1 \ , \ p^2 \nmid a_0 \tag{33}$$

allora $p(x)$ è irriducibile in Z".

Un esempio può essere il polinomio: $p(x) = 2x^6 + 3x^4 - 6x + 3$, in questo caso si vede come il numero primo 3 non divide il coefficiente di grado massimo, cioè 2, divide tutte gli altri termini, cioè 3, -6 e 3 ed il suo quadrato 9 non divide il termine noto 3. Dunque il polinomio che abbiamo scritto è sicuramente irriducibile.

Vediamo la dimostrazione di questo criterio, che si effettua per assurdo, ovvero supponiamo di avere un polinomio che rispetta le condizioni della (33) e supponiamo che sia riducibile, cioè che lo si possa scrivere:

$$p(x) = (b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k) \cdot (c_0 + c_1x + \dots + c_hx^h) \tag{34}$$

Andiamo a calcolare il termine noto di $p(x)$, esso sarà: $a_0 = b_0 \cdot c_0$. Questo termine per ipotesi viene diviso da un primo p ma non dal suo quadrato p^2, quindi solo uno dei due fattori deve essere divisibile per p, perché se lo fossero entrambi il loro prodotto sarebbe divisibile anche per p^2. Senza perdere in generalità (Wlog) supponiamo che dei due ad avere questa caratteristica sia b_0:

$$p/b_0 \quad e \quad p \nmid c_0 \tag{35}$$

Vediamo cosa succede ai termini successivi, partiamo con $a_1 = b_0 \cdot c_1 + c_0 \cdot b_1$, ebbene per ipotesi questo numero deve essere divisibile per p, il primo addendo lo è senz'altro, perché p/b_0, la divisibilità del secondo invece va garantita imponendo che p/b_1visto che p non divide c_0.

Iterando questo ragionamento è facile verificare che per ogni a_j del polinomio di partenza, con $j \leq k$ bisognerà imporre che p divide b_j. Ora consideriamo il termine a_n dello sviluppo del polinomio di partenza, ebbene tale termine si scriverà: $a_n = b_k \cdot c_h$, ma essendo b_k divisibile per p, lo dovrebbe essere necessariamente anche a_n il che viola una delle ipotesi rilevando l'assurdo.

Come applicazione dei concetti visti, si propone il seguente:

Esercizio 3:

Si mostri che il polinomio $p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ è irriducibile in Z nel caso di p primo.

(Suggerimento: non è possibile utilizzare Eisenstein direttamente, tuttavia l'idea è che se è irriducibile $p(x)$ lo è sicuramente anche $p(x+k)$ con qualsiasi k intero.

2. SUCCESSIONI

Una successione è una applicazione che ha come dominio $\mathbb{N}$ e come codominio $\mathbb{R}$, le successioni possono essere definite per ricorrenza, per esempio come nel caso seguente:

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = 5 \cdot a_n + 7 \ \ \forall n \geq 0 \end{cases} \tag{36}$$

Uno degli obiettivi che ci si pone in maniera stringente in molte applicazioni è quello di passare da una formula per ricorrenza ad un'altra "chiusa", ovvero che esprima a_n come sola funzione di n. In generale si tenga presente che quando si parla di formula per "ricorrenza" il termine $n+1$ può in generale dipendere da tutti i termini precedenti della serie, noi cominceremo a porre la nostra attenzione sul caso particolare in cui il termine successivo dipende solamente da quello precedente:

$$a_{n+1} = c \cdot a_n + d \tag{37}$$

Questo particolare tipo di successione può essere ulteriormente caratterizzato. Per esempio se:

$$\boldsymbol{d=0} \rightarrow \ a_1 = c \cdot a_0 \ , \ a_2 = c \cdot a_1 = c^2 \cdot a_0 \ , \dots \ , \boldsymbol{a_n = c^n \cdot a_0}$$

$$\boldsymbol{c=1} \rightarrow \ a_1 = a_0 + d \ , \ a_2 = a_1 + d = a_0 + 2d \ , \dots \ , \boldsymbol{a_n = a_0 + n \cdot d}$$

Nel primo caso i termini sono in progressione geometrica, nel secondo caso in progressione aritmetica. Consideriamo ora il caso generale ovvero quello in cui $\boldsymbol{d \neq 0}$ **e** $\boldsymbol{c \neq 1}$. Vediamo due modi diversi di rendere questo caso in forma chiusa:

<u>1° modo</u>:

$$\boldsymbol{a_1 = c \cdot a_0 + d} \ , \ \boldsymbol{a_2} = c \cdot a_1 + d = c \cdot (c \cdot a_0 + d) + d = \boldsymbol{c^2 \cdot a_0 + d \cdot (1 + c)}$$

$$\boldsymbol{a_3} = c \cdot a_2 + d = c \cdot \left(c^2 \cdot a_0 + d \cdot (1+c)\right) + d = \boldsymbol{c^3 \cdot a_0 + d \cdot \left(1 + c + c^2\right)}$$

…

$$\boldsymbol{a_n} = c \cdot a_{n-1} + d = c^n \cdot a_0 + d \cdot (1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1}) = \boldsymbol{c^n \cdot a_0 + d \cdot \frac{c^n - 1}{c - 1}}$$

<u>2° modo</u>:

L'idea è di provare a definire una nuova successione b_n partendo dalla (37) in maniera tale che essa si presenti come una successione omogenea (ovvero come nel caso $d = 0$) :

$$b_n = a_n - l \tag{38}$$

Dobbiamo trovare il valore di l per il quale b_{n+1} si può scrivere come $b_{n+1} = c \cdot b_n$, in maniera tale da ricondurci ad uno dei due casi noti e banali.

Per definizione risulta:

$$b_{n+1} = a_{n+1} - l = c \cdot a_n + d - l = c \cdot (b_n + l) + d - l = c \cdot b_n + (c \cdot l + d - l) \tag{39}$$

Il nostro obiettivo si ottiene semplicemente annullando il termine noto nell'ultima relazione, ovvero nel caso in cui:

$$(c \cdot l + d - l) = 0 \rightarrow l = \frac{d}{1-c} \tag{40}$$

Possiamo ora sostituire questa espressione di l all'interno della (38) per ricavarci l'espressione generale di a_n, tenendo presente che ora il termine generale della successione b_n si può scrivere, essendoci ricondotti al caso banale, come $b_n = c^n \cdot b_0$:

$$a_n = b_n + l = c^n \cdot b_0 + l = c^n \cdot (a_0 - l) + l = c^n \cdot (a_0 - \frac{d}{1-c}) + \frac{d}{1-c} = \boldsymbol{c^n \cdot a_0 + d \cdot \frac{c^n - 1}{c - 1}} \tag{41}$$

Ottenendo così la stessa espressione rilevata con la prima modalità.

Occupiamoci ora di successioni leggermente più complicate, ovvero quelle in cui il termine "n-esimo" della successione dipende comunque da quello "$n-1$-esimo", ma a sommare quest'ultimo non c'è un termine costante, bensì un termine dipendente da "n":

$$x_{n+1} = a \cdot x_n + f(n) \tag{42}$$

Supponiamo di conoscere x_0 e di conoscere una realizzazione al termine n+1, diciamo: $y_{n+1} = a \cdot y_n + f(n)$. La prima cosa da capire è che in generale in termine y_{n+1} potrebbe non appartenere alla successione (42), in quanto facente riferimento ad un termine di partenza $x_0 \neq y_0$. Nonostante questo tale realizzazione ci può servire nella soluzione cercata, in quanto differirà da quella che stiamo cercando solo per il termine noto.

In altre parole è come se per risolvere la (42) noi spezzassimo in problema in due parti, una realizzazione y_n che risolve un caso particolare, più la soluzione dell'omogenea, che è quella facente riferimento al caso banale, visto precedentemente, ed indicato con $d = 0$. Proveremo ad illustrare che si può sempre scrivere:

$$x_n = c \cdot a^n + y_n \tag{43}$$

Per dimostrare la (43), bisogna compiere due passi: prima di tutto verificare che essa verifica la successione definita per ricorrenza inizialmente, ovvero la (42), e poi dimostrare che tutte le soluzioni si scrivano in tale forma. Per la prima parte basterà prendere x_n e sostituire nella (42) direttamente:

$$x_{n+1} = c \cdot a^{n+1} + y_{n+1} = c \cdot a^{n+1} + a \cdot y_n + f(n) = a \cdot (c \cdot a^n + y_n) + f(n) = a \cdot x_n + f(n) \tag{44}$$

dunque tutte le soluzioni del tipo (43) soddisfano la (42).

Dobbiamo passare a dimostrare che sono tutte di questa forma. Quello che noi conosciamo è una realizzazione:

$y_{n+1} = a \cdot y_n + f(n)$, inoltre sappiamo ora che la x_n costruita con la (43) soddisfa la relazione:

$x_{n+1} = a \cdot x_n + f(n)$, se sottraiamo membro a membro queste due espressioni otterremo:

$$y_{n+1} - x_{n+1} = a \cdot (y_n - x_n) \tag{45}$$

detta $z_n = y_n - x_n$, la (45) può scriversi:

$$z_{n+1} = a \cdot z_n \ \rightarrow z_n = a^n \cdot z_0 \tag{46}$$

Ora ripartendo dalla definizione di z_n, ottengo che:

$$x_n = y_n - z_n = y_n - z_0 \cdot a^n \tag{47}$$

questa espressione è analoga alla (43), in cui $c = z_0$, il che difatto prova che non c'è altro modo, se non la (43), di scrivere le nostre possibili soluzioni.

Per capire meglio tutto quanto detto è indispensabile fare un esempio, e soprattutto cercare di capire come, nella generalità del caso, riuscire a carpire la soluzione particolare y_n la cui conoscenza è alla base di tutto lo sviluppo visto.

<u>Esempio 1</u>:

Si consideri la successione:

$$x_{n+1} = 2 \cdot x_n + (n^2 - 1) \quad in\, cui\, x_0 = 1 \tag{48}$$

Ragioniamo euristicamente: *se $f(n)$ è un polinomio di grado d, si cerca come soluzione speciale y_n proprio un polinomio di grado d. Se invece $f(n)$ è della forma k^n, cerco y_n esponenziale della forma $\lambda \cdot k^n$.*

Nel nostro caso abbiamo un polinomio di grado 2, cerchiamo allora y_n nella forma:

$$y_n = a \cdot n^2 + b \cdot n + c \tag{49}$$

Sostituiamo nella (48) per verificare se esistono valori dei coefficienti per cui questo termine sia soluzione:

$$a \cdot (n+1)^2 + b \cdot (n+1) + c = 2 \cdot (a \cdot n^2 + b \cdot n + c) + (n^2 - 1) \tag{50}$$

Risolviamo questa equazione, che deve valere per ogni n, ed avremo, dopo qualche sviluppo numerico:

$$a = -1\,, b = -2\,, c = -2 \tag{51}$$

Il polinomio soluzione particolare sarà dunque:

$$y_n = -n^2 - 2 \cdot n - 2 \tag{52}$$

Fatto ciò possiamo passare a definire la soluzione generale della nostra successione definita per ricorrenza, ma sappiamo che essa è data dall'espressione (43) caratterizzata al nostro caso (il termine $a^n = 2^n$):

$$x_n = c \cdot 2^n + (-n^2 - 2 \cdot n - 2) \tag{53}$$

Per calcolare la costante c dovremo ora solamente imporre la condizione iniziale, e cioè $x_0 = 1$:

$$x_0 = c \cdot 2^0 + (-0^2 - 2 \cdot 0 - 2) = c - 2 = 1 \to c = 3 \tag{54}$$

Abbiamo così a disposizione una espressione diretta, in forma chiusa, della successione definita per ricorrenza:

$$x_n = 3 \cdot 2^n + (-n^2 - 2 \cdot n - 2) \tag{55}$$

Andiamo avanti complicandoci la vita, e consideriamo successioni definite per ricorrenza ma con dipendenza da due termini precedenti:

$$x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n \tag{56}$$

In questo caso, sempre ragionando euristicamente, diciamo che tutte le soluzioni sono del tipo:

$$x_n = \lambda^n \cdot c_1 + \mu^n \cdot c_2 \tag{57}$$

con λ *e* μ soluzioni del polinomio caratteristico associato, ovvero di: $x^2 - a \cdot x - b = 0$, e con c_1 *e* c_2 costanti da determinare in funzione delle condizioni iniziali.

Tutto questo vale se $\lambda \neq \mu$, altrimenti la (57) va modificata e l'espressione risulta:

$$x_n = \lambda^n \cdot c_1 + n \cdot \lambda^n \cdot c_2 \tag{58}$$

Proviamo almeno un accenno di dimostrazione di questo risultato.

Quello che si osserva è che l'insieme delle soluzioni della (56) è chiuso rispetto sia all'operazione di somma che all'operazione di prodotto per uno scalare, per cui esso risulterà chiuso rispetto a combinazioni lineari. Ora cerchiamo una soluzione della (56) nella forma: $x_n = k^n$, sostituiamo nella successione ed otteniamo:

$$k^{n+2} = a \cdot k^{n+1} + b \cdot k^n \tag{59}$$

A questo punto semplificando un k^n, cosa che si può fare se $k^n \neq 0$ (in altre parole stiamo scartando il caso della successione identicamente nulla) avremo:

$$k^2 = a \cdot k + b \tag{60}$$

che ci dice che il valore di k che stiamo cercando deve essere soluzione dell'equazione $x^2 - a \cdot x - b = 0$. Trovate tali due soluzioni, che chiamiamo $\lambda\ e\ \mu$, allora io so che sia λ^n che μ^n soddisfano la mia successione, quindi lo farà, poiché l'insieme delle soluzioni è chiuso, anche una qualsiasi loro combinazione lineare, il che dimostra che la (57) è la forma generale della soluzione.

Se abbiamo a disposizione due dati iniziali, senza i quali la successione non si può definire, è possibile imporre il valore di x_0 ed x_1 e calcolare le due costanti c_1 e c_2. Con un po' di calcoli la soluzione totale si potrà scrivere in funzione delle condizioni iniziali come segue:

$$x_n = \lambda^n \cdot \frac{x_1 - x_0 \cdot \mu}{\lambda - \mu} + \mu^n \cdot \frac{x_0\lambda - x_1}{\lambda - \mu} \tag{61}$$

La soluzione così costruita è univocamente determinata e ben definita, per cui possiamo considerare questa una valida dimostrazione, anche se formalmente non puntuale. Nel caso particolare in cui $\lambda = \mu$, si procede nella stessa identica maniera partendo dal far vedere che è la (58), in tali condizioni, a rispettare l'equazione imposta dalla (56), dopodiché si procede in maniera analoga.

Anche in questo caso vediamo un esercizio che ci consenta di verificare applicativamente quanto abbiamo appena detto.

Esempio 2:

Si consideri la successione:

$$x_{n+2} = 4 \cdot x_{n+1} - 3 \cdot x_n \quad in\ cui\ x_0 = 0\ ed\ x_1 = 4 \tag{62}$$

vogliamo trovare una forma chiusa di tale successione definita in modo ricorsivo, per farlo iniziamo a scrivere l'equazione caratteristica e risolverla:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \tag{63}$$

le soluzioni di tale equazioni sono: $\lambda = 1$ ed $\mu = 3$, per cui la successione potrà scriversi:

$$x_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 3^n = c_1 + c_2 \cdot 3^n \tag{64}$$

per trovare le costanti c_1 e c_2, basterà imporre le due condizioni iniziali della successione:

$$\begin{gathered} x_0 = c_1 + c_2 \cdot 3^0 = \ c_1 + c_2 = 0 \\ x_1 = c_1 + c_2 \cdot 3^1 = \ c_1 + 3c_2 = 4 \end{gathered} \tag{65}$$

Le soluzioni di tale sistema portano a: $c_1 = -2$ e $c_2 = 2$, il che conduce alla soluzione nel caso specifico:

$$x_n = -2 + 2 \cdot 3^n = 2 \cdot (3^n - 1) \tag{66}$$

Come ultimo caso che intendiamo analizzare, mettiamo insieme le ultime due situazioni viste, ovvero consideriamo una successione in cui il termine generale ha dipendenza da due termini precedenti più una funzione che dipende dal valore di n.

$$x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n + f(n) \tag{67}$$

Come già visto precedentemente, supponiamo in questo caso di conoscere una soluzione particolare di questa successione definita per ricorrenza, ovvero una successione y_n, tale che:

$$y_{n+2} = a \cdot y_{n+1} + b \cdot y_n + f(n) \tag{68}$$

si ripete anche stavolta come questa successione in generale non risolve la (67) perché non è congruente con i valori iniziali x_0 ed x_1.

Tutte le soluzioni della (67) sono della forma:

$$x_n = c_1 \cdot \lambda^n + c_2 \cdot \mu^n + y_n \tag{69}$$

con $\lambda\ e\ \mu$ soluzioni del polinomio caratteristico associato, ovvero di: $x^2 - a \cdot x - b = 0$, e con $c_1\ e\ c_2$ costanti da determinare in funzione delle condizioni iniziali. Analogamente al caso precedente se $\lambda = \mu$, la (69) va modificata e l'espressione risulta:

$$x_n = \lambda^n \cdot c_1 + n \cdot \lambda^n \cdot c_2 + y_n \tag{70}$$

La dimostrazione di quanto appena detto è veramente molto simile a quanto già visto nel caso in cui la ricorrenza riguardava un unico termine, più che ripetere stesse idee, vediamo qualche esempio istruttivo di applicazione.

<u>Esempio 3</u>:

Si consideri la successione:

$$x_{n+2} = 5 \cdot x_{n+1} - 6 \cdot x_n + 4^n \quad in\ cui\ x_0 = \frac{1}{2}\ ed\ x_1 = 0 \tag{71}$$

Stavolta il termine $f(n)$ è un esponenziale, per cui si cerca come soluzione particolare: $y_n = k \cdot 4^n$.

Sostituiamo nella (71) e calcoliamo k:

$$y_{n+2} = 5 \cdot y_{n+1} - 6 \cdot y_n + 4^n \to k \cdot 4^{n+2} = 5k \cdot 4^{n+1} - 6k \cdot 4^n + 4^n \tag{72}$$

dividiamo la (72) per 4^n, ottenendo:

$$k \cdot 4^2 = 5k \cdot 4^1 - 6k + 1 \to 16k = 20k - 6k + 1 \to 2k = 1 \to \boldsymbol{k = \frac{1}{2}} \tag{73}$$

Dunque la soluzione particolare sarà:

$$y_n = \frac{1}{2} \cdot 4^n \tag{74}$$

Ora passiamo alla soluzione dell'omogenea per la quale dobbiamo risolvere la seguente equazione caratteristica:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \to \quad \lambda = 2 \text{ e } \mu = 3 \tag{75}$$

cosicché possiamo scrivere la soluzione chiusa:

$$x_n = 2^n \cdot c_1 + 3^n \cdot c_2 + \tfrac{1}{2} \cdot 4^n \tag{76}$$

Imponiamo le condizioni iniziali e calcoliamo le costanti:

$$\begin{gathered} x_0 = c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ x_1 = 2c_1 + 3c_2 + 2 = 0 \end{gathered} \tag{77}$$

da cui: $c_1 = 2$ e $c_2 = -2$, e quindi la soluzione in forma chiusa della successione:

$$x_n = 2^n \cdot 2 - 3^n \cdot 2 + \tfrac{1}{2} \cdot 4^n = 2 \cdot (2^n - 3^n + 4^{n-1}) \tag{78}$$

(Nota: Se 4 era soluzione dell'omogenea, la soluzione particolare non poteva più essere espressa come $k \cdot 4^n$ ma era necessario considerare $k \cdot n \cdot 4^n$. Interessante è inoltre il caso in cui l'equazione caratteristica presenta un $\Delta < 0$, in tal caso infatti bisognerebbe lavorare con i numeri complessi).

Vediamo ora qualche esercizio in cui l'utilizzo delle successioni per la risoluzione non è affatto intuitivo, ma in cui scopriremo che gli elementi che abbiamo presentato sono essenziali per giungere ad uno svolgimento efficace.

Esercizio 4:

Consideriamo $2n$ numeri, con $n \geq 1$. Siano essi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$, e supponiamo che essi possano assumere solo valori all'interno del seguente insieme $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Vogliamo trovare quante sono le $2n - ple$ tali che:

$$\sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \cdot a_i \equiv 0 \ mod(6) \tag{79}$$

Davanti ad un problema di questo tipo, uno comincia a provare dal caso più semplice, diciamo che iniziamo con $n = 1$, per cui la condizione (79), si scriverà:

$$a_0 - a_1 \equiv 0 \, mod(6) \tag{80}$$

il che significa che i due termini a_0 ed a_1 devono essere per forza uguali, e potendo assumere 5 valori, significa che esisteranno 5 coppie per cui vale tale proprietà: $N_1 = 5$.

Già quando lo si prova a fare per $n = 2$ la situazione diventa molto più contorta, perché la condizione da rispettare diventa la seguente:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \equiv 0 \, mod(6) \rightarrow \ (a_0 + a_2) - (a_1 + a_3) \equiv 0 \, mod(6) \tag{81}$$

Il che equivale a dire che $(a_0 + a_2)$ ed $(a_1 + a_3)$ devono avere la stessa congruità modulo 6, quindi dovranno essere entrambi uno qualsiasi dei valori da 0 a 5 possibili. Se per esempio si vogliono entrambi congrui a zero, allora non ci vuole molto a capire che le coppie possibili sono 4 per $(a_0 + a_2)$, ovvero:

$$(a_0 = 0, a_2 = 0); (a_0 = 3, a_2 = 3) \, ; (a_0 = 4, a_2 = 2) \, ; (a_0 = 2, a_2 = 4)$$

e altrettante, con gli stessi valori per $(a_1 + a_3)$, il che comporta che le quadruple totali sono 16.

Se tale calcolo lo si fa anche per 1,2,3,4 e 5, alla fine il numero totale di quadruple, ottenute sommando i diversi casi sarà pari a: $N_2 = 105$.

Passare al caso $n = 3$, rende difatto praticamente impossibile contare i casi in un tempo efficiente.

Come affrontare allora questo problema ? L'idea può essere quello di scriverlo in generale per il caso $2n$ e vedere se si riesce a trovare la relazione tra questo caso e quelli precedenti.

Consideriamo con riferimento al caso $2n$, la possibilità che i primi $2n - 1$ siamo stati scelti casualmente nell'insieme dei valori possibili. La condizione che io debbo rispettare, isolando l'ultimo termine sarà:

$$\sum_{i=0}^{2n-2}(-1)^i\, a_i - a_{2n-1} \equiv 0 \; mod(6) \tag{82}$$

Ora ragionando su questa espressione si ci rende conto che, è sempre possibile scelti liberamente i primi $2n - 1$ termini ottenere la congruità a zero, semplicemente scegliendo a_{2n-1} in modo da avere la stessa congruità della somma. C'è però un caso in cui tale scelta non può avvenire, infatti se il primo addendo è congruo 5, non è possibile scegliere a_{2n-1} pari a 5 visto che i valori possibili arrivano fino al 4. Si conclude che tutte le somme dei primi $2n - 1$ termini che risultano congrue 5, sono parte di 2n-ple che non stanno tra quelle che io cerco.

Dunque le 2n-ple che io posso considerare sono tutte quelle possibili tranne quelle per cui la somma dei $2n - 1$ primi termini sia congrua a 5 mod (6). Indichiamo tale ultima quantità $N_{2n-1,5}$:

$$N_{2n} = 5^{2n-1} - N_{2n-1,5} \tag{83}$$

Ora ci possiamo concentrare sulla quantità che dobbiamo eliminare, ovvero le 2n-1-ple congrue a 5 modulo 6. La somma che esprime tale quantità può essere ancora spezzata isolando l'ultimo termine e imponendo la condizione richiesta:

$$\sum_{i=0}^{2n-3}(-1)^i\, a_i + a_{2n-2} \equiv 5 \; mod(6) \tag{84}$$

Facendo lo stesso ragionamento del caso precedente la somma dei primi $2n - 2$ termini può essere qualsiasi tranne un valore congruo a zero modulo 6, infatti in tal caso avremmo bisogno che il termine restante fosse 5 per verificare la condizione (84), il che non è possibile. Dunque il numero di 2n-1-ple congrue a 5 si può ottenere come somma di tutte le possibili combinazioni, meno quelle che portano la somma ad essere congrua zero, che indicheremo con N_{2n-2}, ovvero proprio i termini richiesti dal problema nel caso in cui gli elementi non fossero $2n$, ma $2n - 2$. Possiamo allora scrivere che:

$$N_{2n-1,5} = 5^{2n-2} - N_{2n-2} \tag{85}$$

Questa espressione la possiamo sostituire nella (83) ottenendo una relazione un po' più generale per ciò che dobbiamo ottenere:

$$N_{2n} = 5^{2n-1} - 5^{2n-2} + N_{2n-2} = 4 \cdot 5^{2n-2} + N_{2n-2} \tag{86}$$

Nella (86) ora è proprio definita una successione in maniera ricorsiva, se chiamiamo, per esempio, $Z_n = N_{2n}$, la (86) può scriversi:

$$Z_n = Z_{n-1} + 4 \cdot 5^{2n-2} \tag{87}$$

che è una successione definita mediante ricorsività di un termine, a cui si somma una funzione $f(n)$ del tipo esponenziale. Di questa abbiamo imparato a trovarne una forma chiusa. La soluzione particolare sarà del tipo $y_n = k \cdot 5^{2n}$, sostituiamo nella (87) per trovare k:

$$k \cdot 5^{2n} = k \cdot 5^{2n-2} + 4 \cdot 5^{2n-2} \quad (88)$$

che risolta viene:

$$25k = k + 4 \ \rightarrow k = \frac{1}{6} \quad (89)$$

La soluzione particolare sarà allora: $y_n = \frac{1}{6} \cdot 5^{2n}$, mentre quella dell'omogenea sarà semplicemente una costante c, visto che stiamo chiedendo che due termini successivi siano uguali.

La soluzione generale risulta allora:

$$Z_n = N_{2n} = \ c + \frac{5^{2n}}{6} \quad (90)$$

Per calcolare c, imponiamo che nel caso $n = 2$ coppie possibili siano 5, come abbiamo calcolato banalmente all'inizio, il che comporta:

$$N_2 = \ c + \frac{5^2}{6} = c + \frac{25}{6} = 5 \rightarrow c = \frac{5}{6} \quad (91)$$

Di conseguenza la formula generale che risolve il nostro problema è:

$$N_{2n} = \ \frac{5}{6} + \frac{5^{2n}}{6} = \frac{5^{2n}+5}{6} \quad (92)$$

Vediamo un ultimo esercizio, preso dalla competizione internazionale denominata Balkan.

<u>Esercizio 5</u>:

Consideriamo una successione di reali a_n tale che

$$\boldsymbol{a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}) \quad \forall m, n \geq 0, m \geq n \ \ ed \quad a_1 = 3} \quad \textbf{(93)}$$

Calcolare a_{2004}.

Qui il problema sta fondamentalmente nel doppio indice, dovremmo cercare di fare qualcosa per eliminarlo e per ricondurci ad un indice singolo. All'inizio la strada principale può essere quella di provare a sostituire qualche valore ad m ed n. Vediamo alcuni casi che possono essere utili, soprattutto se utilizziamo i risultati ottenuti in un caso in quello successivo:

<u>caso $m = n$</u>: $\boldsymbol{a_{2m} + a_0 - 1 = a_{2m} \ \rightarrow \ a_0 = 1}$

<u>caso $n = 0$</u>: $\boldsymbol{a_m + a_m - m - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_0) \ \rightarrow \ a_{2m} = 4a_m - 2m - 3}$

Quest'ultima relazione ci permette di calcolare a_2 a partire da a_1: $\boldsymbol{a_2 = 4a_1 - 2 - 3 = 12 - 5 = 7}$

<u>caso $n = 1$</u>: $\boldsymbol{a_{m+1} + a_{m-1} - m = \frac{1}{2}(a_{2m} + 1)}$

In quest'altra è possibile sostituire il valore di a_{2m} ottenuto nel caso $n = 0$

$$\boldsymbol{a_{m+1} + a_{m-1} - m = \frac{1}{2}(4a_m - 2m - 3 + 1)}$$

Tale relazione semplificata ci porta a quella ben più rilevante:

$$a_{m+1} + a_{m-1} = 2a_m + 2 \qquad (94)$$

Questa è una successione ricorsiva dipendente da due termini precedenti a cui è sommata una funzione $f(n)$ costante e pari a 2.

Conosciamo il modo di renderla in forma esplicita, anche grazie al fatto che abbiamo determinato i valori di $a_0 = 1$ ed $a_1 = 3$, che ci serviranno per il calcolo delle costanti.

Partiamo dall'equazione caratteristica che in questo caso è:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \ \rightarrow \ (x-1)^2 = 0 \ \rightarrow \ x = 1 \qquad (95)$$

Essendo la soluzione con molteplicità doppia, la successione da considerare sarà: $a_m = c_1 + m \cdot c_2$.

Manca la soluzione particolare. In questo caso bisogna scegliere un polinomio, ed è facile verificare che non basta uno di grado zero o di primo grado, anche perché non aggiungeremmo niente all'omogenea. Al netto di quest'ultima possiamo provare come soluzione speciale: $y_m = k \cdot m^2$. Sostituendo nella (94) si avrà allora:

$$k \cdot (m+1)^2 + k \cdot (m-1)^2 = 2 \cdot k \cdot m^2 + 2 \qquad (96)$$

In questa relazione i termini di primo e secondo grado sono identicamente uguali a sinistra e a destra, restano solo i termini noti:

$$k + k = 2 \rightarrow k = 1 \qquad (97)$$

La forma chiusa del termine della successione risulterà la somma della omogenea più questa soluzione particolare:

$$a_m = c_1 + m \cdot c_2 + m^2 \qquad (98)$$

Imponiamo le condizioni per $a_0 \ ed \ a_1$:

$$\begin{gathered} a_0 = c_1 = 1 \\ a_1 = c_1 + c_2 + 1 = 3 \ \rightarrow \ c_2 = 1 \end{gathered} \qquad (99)$$

che ci conduce alla espressione finale:

$$a_m = 1 + m + m^2 \qquad (100)$$

Il termine 2004 di questa successione potrà così calcolarsi come:

$$a_{2004} = 1 + 2004 + 2004^2 = 4018021 \qquad (101)$$