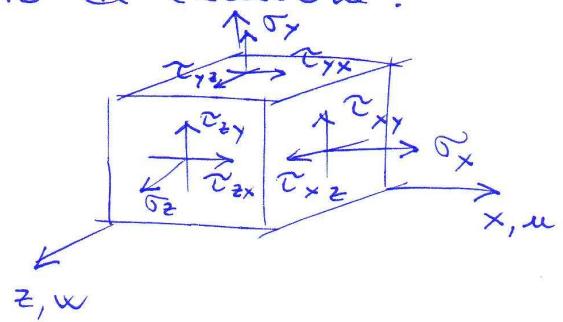
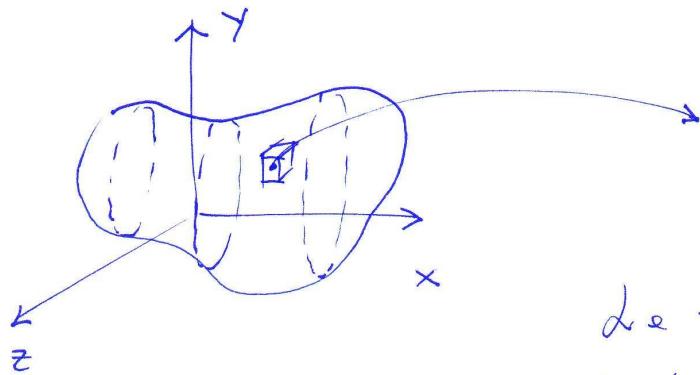


## Elementi finiti tridimensionali

### Ricordi di teoria dell'elasticità

Cominciamo con il prendere in esame un solido generico tridimensionale, estraiamone un elemento e analizziamo lo stato di tensione.



Le tensioni e le deformazioni possono essere espresse mediante vettori di dimensione 6

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

il legame tra questi 2 vettori è fornito dalle equazioni di legame costitutive

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}$$

(1)

In forma simbolica:  $\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} E \\ \underline{\epsilon} \end{pmatrix}$ , matrice di conformità

Nell'approccio che è alla base della definizione di un elemento finito finitivo, le incognite del problema elastico sono gli spostamenti:

$$\underline{u} = \begin{cases} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{cases}$$

da cui mediante le equazioni di conformità è possibile calcolare le deformazioni.

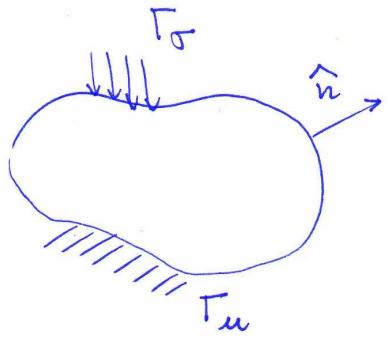
$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Mancano le equazioni di equilibrio in forma generale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{array} \right.$$

ed ovviamente le condizioni al contorno che possono essere sia di tipo cinematico che statico  
(2)



$$u_i = \bar{u}_i \text{ su } \Gamma_U$$

$$t_i = \bar{t}_i \text{ su } \Gamma_U$$

Per risolvere un problema elastostatico va così risolto un problema di 15 equazioni (6 di legame, 6 di congruenza e 3 di equilibrio) in 15 funzioni incognite, non esattamente una operazione semplice. Gli elementi finiti nei problemi di natura generale non sono neanche più una opzione diretta: sovra l'unica strada.

Detti dunque  $u, v, w$  i 3 campi di spostamento incogniti, "N" il numero di nodi,  $u_i, v_i, w_i$  gli spostamenti in corrispondenza del nodo  $i$ -esimo, come è ovviamente chiaro può scriversi:

$$\left. \begin{array}{l} u = \sum_{i=1}^N N_i \cdot u_i \\ v = \sum_{i=1}^N N_i \cdot v_i \\ w = \sum_{i=1}^N N_i \cdot w_i \end{array} \right\}$$

si noti come in generale le funzioni di forma sono pari al numero dei nodi.

In forma matriciale possiamo scrivere:

(3)

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ (3N \times 1) \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

che formalmente si scrive  $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{d}}$   
Le relazioni di conservazione ponono esprimendo utilizzando una matrice contenente operatori derivate

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ f_{xy} \\ f_{xz} \\ f_{yz} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow \mathcal{D} \\ \tilde{\mathbf{d}} \end{matrix} \quad \left\{ \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \right\} \Rightarrow \tilde{\mathbf{e}} = \mathcal{D}(\tilde{\mathbf{u}}) \end{matrix}$$

usando le funzioni di forma si ottiene

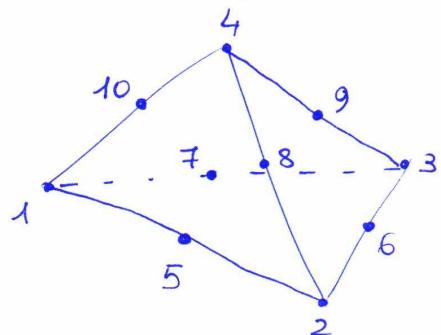
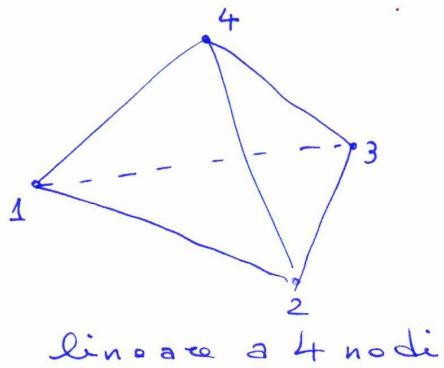
$$\begin{matrix} \tilde{\mathbf{e}} = (\mathcal{D} \tilde{\mathbf{N}}) \tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{d}} \quad \text{Calcolata } \tilde{\mathbf{B}}, \text{ la matrice di rigidità assume la nota forma:} \\ (6 \times 1) \quad (6 \times 3) \quad (3 \times 3N) \quad (3N \times 1) \end{matrix}$$

$$\tilde{\mathbf{k}} = \int \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{B}} d\mathbf{v}$$

La risoluzione di questo integrale va formalmente perseguita per via numerica. (4)

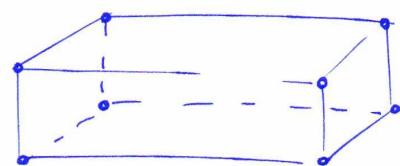
Facciamo una rapida carrellata sugli elementi 3D maggiormente utilizzati:

### Elemento tetraedrico

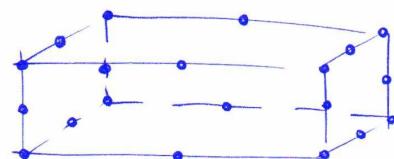


quadratico a 10 nodi

### Elemento esaedrico (detto anche elemento "brick")

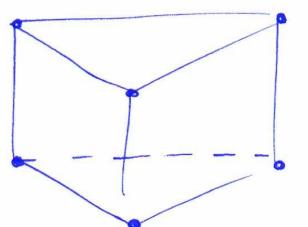


lineare a 8 nodi

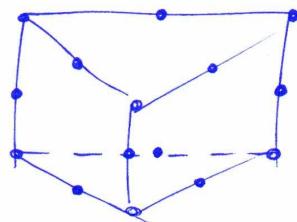


quadratico a 20 nodi

### Elemento pentaedrico



lineare a 6 nodi



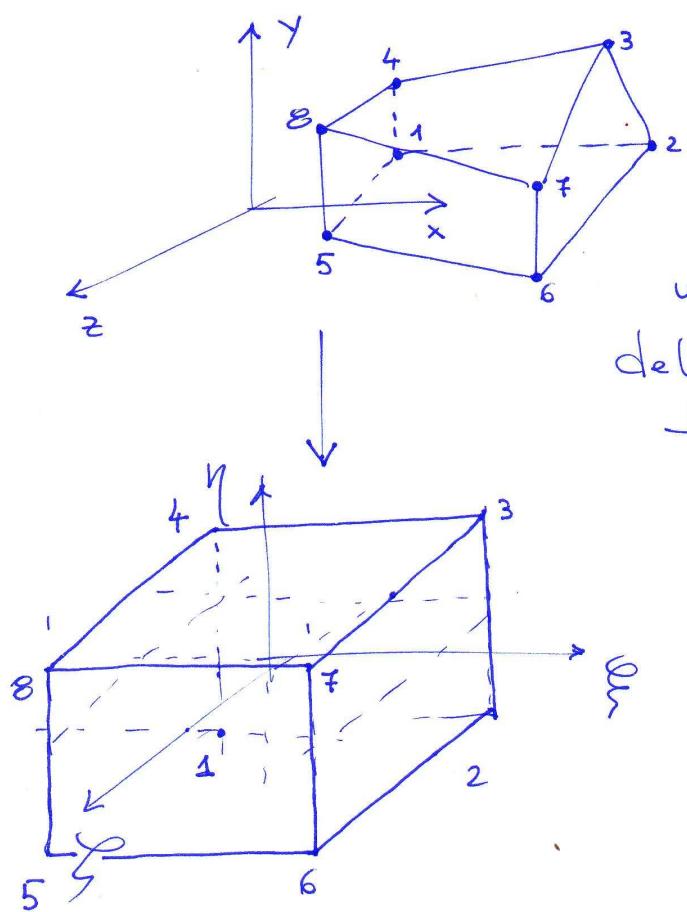
quadratico a 15 nodi

N.B. :

Si consiglia l'utilizzo dell'elemento tetraedrico lineare per analisi degli stati di tensione

(5)

Daremo ora qualche cenno relativamente alla formulazione del solo elemento esaedrico lineare



Assegnato un qualiasi elemento esaedrico è possibile sempre definire una funzione "mappatura" dello spazio tridimensionale, tale da trasformare questo elemento in un cubo centrato nell'origine, avente come vertici

$1 \equiv (-1, -1, -1)$	$2 \equiv (1, -1, -1)$
$3 \equiv (1, 1, -1)$	$4 \equiv (-1, 1, -1)$
$5 \equiv (-1, -1, 1)$	$6 \equiv (1, -1, 1)$
$7 \equiv (1, 1, 1)$	$8 \equiv (-1, 1, 1)$

Per mappatura si intende una funzione che dato un punto dello spazio di partenza associa in maniera univoca un punto nello spazio di arrivo. Nel caso in esame:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \xi(x, y, z) \\ \eta = \eta(x, y, z) \\ \zeta = \zeta(x, y, z) \end{array} \right.$$

Queste funzioni fanno sì che ad ogni punto dell'elemento fisso in  $x-y-z$ , se ne abbinii uno nello spazio  $\xi-\eta-\zeta$

(6)

Il campo di spostamenti nell'elemento puo' essere espresso come sempre dalle funzioni di forma:

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^8 N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^8 N_i w_i$$

Nello spazio "trasformato" le funzioni di forma hanno il seguente andamento

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ N_8(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \end{array} \right.$$

Queste funzioni di forma sono semplici da ricordare, esse sono modellate in maniera da valere 1 in corrispondenza dell'estremo coincidente con la funzione di forma considerata e zero in tutti gli altri punti. La loro somma complessiva in qualsiasi punto e' sempre pari ad 1.

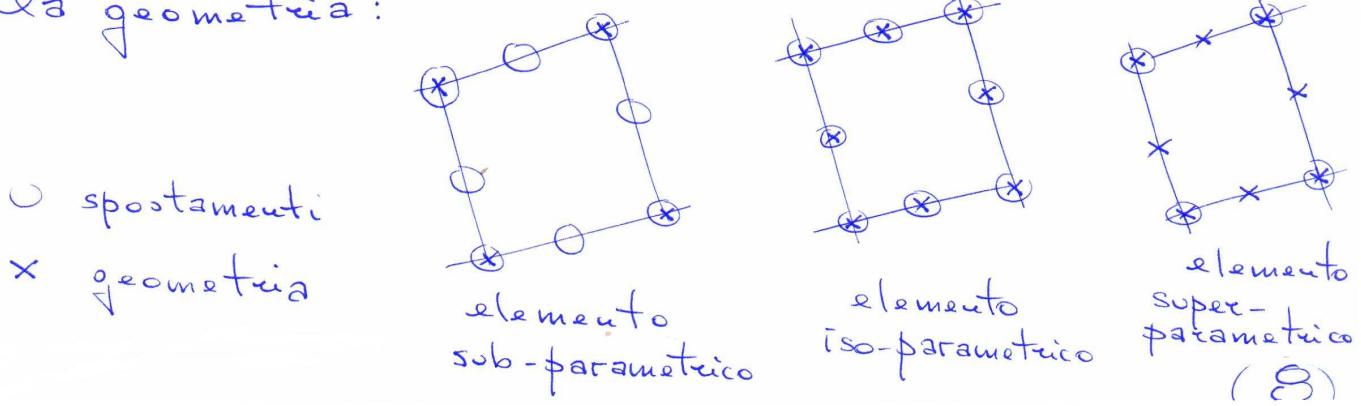
Torniamo un attimo sull'ossessione di mappatura, la potenza di questo approccio e' quella di far riferimento sempre allo stesso elemento semplice, indipendentemente dalla complessita' dell'elemento

(f)

di forma. Il modo più diretto per effettuare una operazione di mappatura sarà' quello di definire una sorta di interpolazione delle quantità geometriche che definiscono l'elemento, vale a dire delle coordinate nodali. In altre parole quando si effettua la mappatura si interpolano le coordinate  $x, y, z$  come se fossero una funzione qualsiasi, mediante delle funzioni identiche a quelle utilizzate per le funzioni di forma:

$$x = \sum_{i=1}^m N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^m N_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^m N_i z_i$$

Si noti una cosa importante, in testa alla somma sopra indicata non si è indicato  $\delta$ , bensì un numero generico "m", questo perché il numero di nodi che si utilizza per interpolare gli spostamenti (funzioni di forma propriamente dette) può essere diverso da quello che si utilizza per interpolare la geometria:



Nel caso in esame, dunque, se  $m < 8$  l'elemento è sub-parametrico, se  $m = 8$  isoparametrico, se  $m > 8$  super-parametrico.

La distinzione che abbiamo compiuto è nella pratica puramente accademica infatti per le caratteristiche di buon funzionamento, ma soprattutto per la semplicità di utilizzo, si tende ad implementare sempre elementi di tipo isoparametrico, ovvero a considerare le stesse funzioni di forma sia per gli spostamenti che per la geometria.

Capito questo facciamo alla valutazione del setore delle deformazioni  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{ \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz} \}^T$  esse sono legate al campo di spostamenti mediante derivate parziali prime, tuttavia ora gli spostamenti sono conosciuti come funzioni delle variabili dello spazio di arrivo della mappatura:

$$\begin{cases} u = u(\xi, \eta, \zeta) \\ v = v(\xi, \eta, \zeta) \\ w = w(\xi, \eta, \zeta) \end{cases}$$

Mentre le deformazioni necessitano del calcolo delle derivate rispetto alle variabili nello spazio originale.

(9)

Tuttavia le funzioni di mappatura sono note:

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta) \\ y = y(\xi, \eta, \zeta) \\ z = z(\xi, \eta, \zeta) \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \xi = \xi(x, y, z) \\ \eta = \eta(x, y, z) \\ \zeta = \zeta(x, y, z) \end{cases}$$

e le si può sfruttare per il calcolo delle derivate parziali nei due spazi e per legarle fra di esse:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(x(\xi), y(\xi), z(\xi)) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

(formula di  
derivazione  
delle funzioni  
composte)

Se estendiamo questa scrittura anche alle derivate rispetto a " $\eta$ " e a " $\zeta$ ", il tutto si puo' forse in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}$$

→ questa matrice è detta "J"  
Jacobiano della funzione di  
mappatura. Essa è sempre (10)

Noi, tuttavia, siamo interessati alla trasformazione inversa, che puo' scriversi:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}$$

si ricordi che la singola derivata

partiale rispetto alle variabili  $\xi, \eta$  e  $\zeta$  puo' essere svolta direttamente utilizzando le funzioni di forma:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} u_i \dots$$

Ne concludiamo che nella nota formulazione

$\underline{\xi} = \underline{B} \underline{d}$  in  $\underline{B}$  ora ci saranno ancora le derivate parziali in  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial}{\partial z}$ , esse tuttavia possono essere espresse

anche rispetto alle variabili trasformate a fatto di tenere in conto dei termini della matrice jacobiana inversa. In altre parole  $\underline{\xi}$ , e

di conseguenza anche  $\underline{x}$ , ha due possibili formulazioni, una piu' semplice nello spazio di partenza, l'altra piu' complessa nello spazio trasformato. Ma se in quest'ultimo la formulazione e' piu' complicata nasce spontanea la domanda:

cosa l'abbiamo fatto a fare la trasformazione?

La risposta è semplice: perché il dominio su cui bisogna integrare per calcolare la matrice di rigidezza è molto più semplice. Infatti:

$$\tilde{k} = \int_V \tilde{B}^T \tilde{\epsilon} \tilde{B} dV \quad \text{nello spazio ordinario} \\ (\text{con } V \text{ anche molto complesso})$$

$$\tilde{k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{B}^T \tilde{\epsilon} \tilde{B} (\det \tilde{J}) \cdot d\xi dy d\xi \quad \text{nello spazio della mappatura.}$$

Per chiudere una semplice considerazione: si noti che generalmente negli elementi 3D non vengono utilizzate le rotazioni come gradi di libertà.