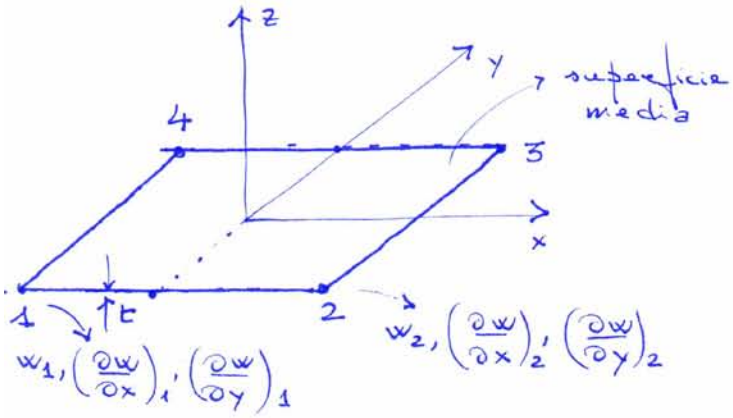
Elementi tipo "plate"

Di seguito si presenterà qualche elemento finito tipicamente adottato nella modellazione delle piastre.

Il più semplice di questa classe di elementi è l'elemento plate alla Kirchoff, che presenta forma quadrilatera e 4 nodi:



i gradi di libertà ad ogni nodo sono tre:

$$w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$$

Su ogni elemento, lo spostamento all'interno della piastra è rappresentato mediante la funzione:

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{4} \left[N_i w_i + N_{xi} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i + N_{yi} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \right]$$

in cui le funzioni di forma N_i, N_{xi} e N_{yi} hanno la seguente forma polinomiale:

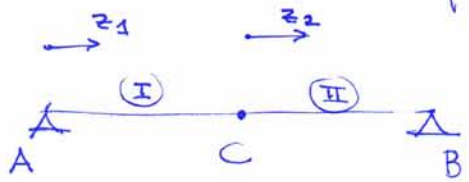
$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & x & y & \\ & x^2 & xy & y^2 & \\ x^3 & x^2y & & xy^2 & y^3 \\ x^3y & & & xy^3 & \end{array}$$

con 12 termini e un grado massimo pari a 4.

Più che addentrarci nella complessa forma delle funzioni

di forma, in questa sede è opportuno parlare di un problema che presenta questo elemento: è "incompatibile"!

Per capire la questione facciamo un passo indietro agli elementi "beam" e consideriamo una trave semplice divisa in due elementi



d'elemento beam presenta delle funzioni di forma di ordine cubico per cui il campo di spostamenti "v" è riprodotto da due funzioni:

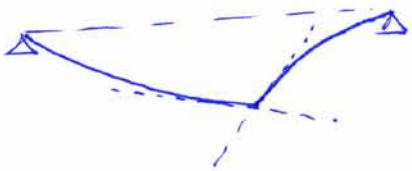
$$\begin{cases} v_I(z_1) = a_1 z_1^3 + b_1 z_1^2 + c_1 z_1 + d_1 \\ v_{II}(z_2) = a_2 z_2^3 + b_2 z_2^2 + c_2 z_2 + d_2 \end{cases}$$

Il fatto che queste funzioni siano delle cubiche consente di rappresentare in maniera completa tutte le condizioni al contorno

- 2 in corrispondenza del punto A
- 2 in corrispondenza del punto B
- 4 in corrispondenza del punto C di cui 2 sono di natura cinematica e servono a garantire la continuità della funzione "v" e della sua derivata $\theta = \frac{dv}{dz}$

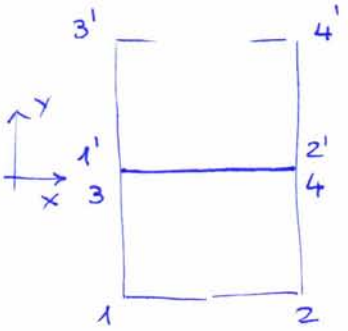
Ci sono così 8 costanti da definire e 8 condizioni al contorno, per cui è possibile evitare situazioni di discontinuità della deformata come quelle di fianco indicate:

discontinuità nella funzione $v(z)$



discontinuità nella funzione $\theta = \frac{dv}{dz}$

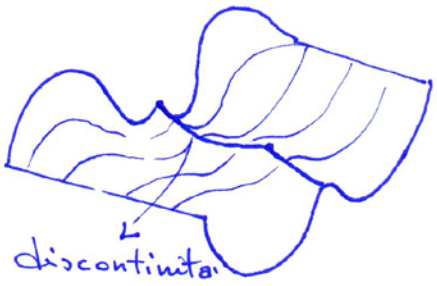
Cosa accade in due dimensioni con l'elemento quadrangolare? La cosa diventa più articolata...



infatti va garantita la continuità di spostamenti e rotazioni in due direzioni (sia lungo "x" che lungo "y"). In altre parole le funzioni di forma devono essere in grado di "modellare" il campo di spostamenti in modo che essi siano uguali sui lati 3-4 | 1'-2' (il che garantisce anche che la derivata lungo "x" e quindi θ_x sia identica), ma anche che sia uguale la derivata lungo "y" (θ_y) su tutti i punti del bordo in comune.

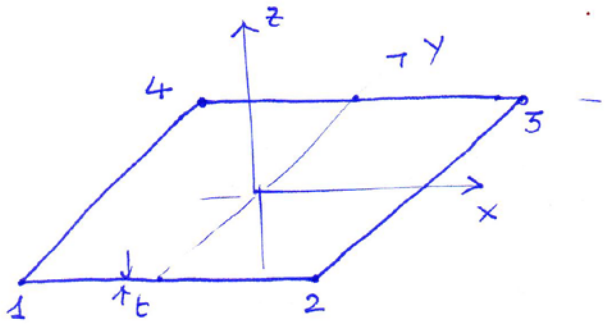
Sul bordo in comune la coordinata "y" è costante per cui si ottiene un polinomio di 3 ordine in "x" i cui quattro coefficienti devono essere identici in corrispondenza del bordo. Questi 4 coefficienti vanno determinati mediante il valore di 4 parametri in corrispondenza dei punti comuni. Essendo i punti in comune 2, si hanno 6 parametri di spostamento assegnati nodali, di cui ne rimangono a disposizione solo "2" per "attaccare" correttamente il campo di spostamenti in direzione "x". Le funzioni di forma, tuttavia, indicano che per "x" costante il campo di spostamenti lungo "y" è una cubica. Servirebbero quindi altri 4 parametri indipendenti laddove ce ne sono solo 2.

Si conclude che l'elemento definito così non consente di ripristinare la continuità nei lati in comune, in particolare si presentano spigoli lungo la direzione "y"

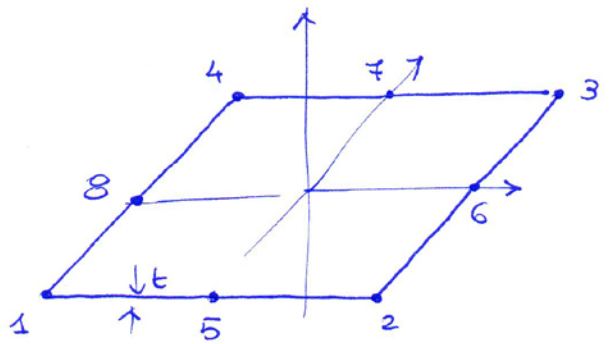


Qualche cenno sull'elemento plate alla Mindlin

L'elemento quadrangolare che si utilizza per le piastre "thick" esiste in due versioni



Elemento quadrilatero a 4 nodi



Elemento quadrilatero ad 8 nodi

Ogni nodo presenta 3 gradi di libertà: w, θ_x e θ_y

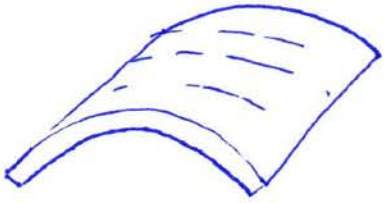
I campi di spostamento sono funzione lineare di tali grandezze valutate in corrispondenza dei nodi, quindi all'interno di ogni elemento:

$$\begin{cases} w(x,y) = \sum_{i=1}^{n} N_i w_i \\ \theta_x(x,y) = \sum_{i=1}^{n} N_i \theta_{xi} \\ \theta_y(x,y) = \sum_{i=1}^{n} N_i \theta_{yi} \end{cases}$$

Nell'elemento a 4 nodi le funzioni di forma sono lineari nelle variabili "x" e "y", in quello ad 8 nodi invece le funzioni hanno andamento quadratico, con conseguente maggiore fedeltà al modello, ma anche maggiore tempo di calcolo.

Shells ed elementi shell

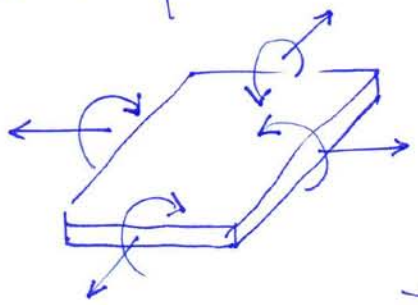
Il termine "shell" significa tradotto letteralmente "guscio", ad esso si fa riferimento quando si si riferisce ad elementi sottili che si sviluppano presentando una superficie curva.



Struttura a guscio.

Gli esempi sono molteplici: containers, serbatoi, coperture di grosse strutture...

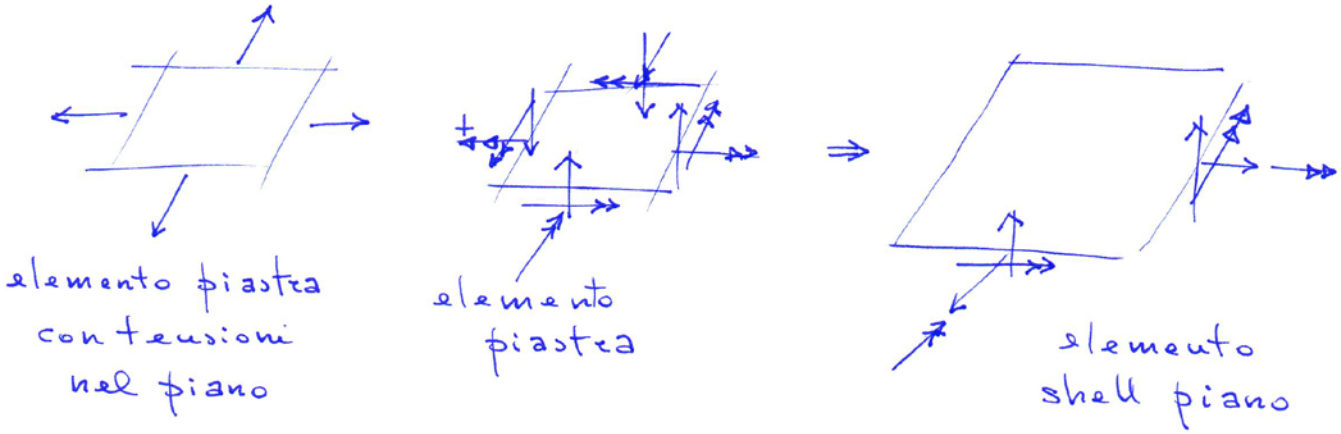
La differenza rispetto ad una piastra piana è che la presenza della superficie curva rende non più trascurabili per azioni normali le forze agenti nel piano dell'elemento.



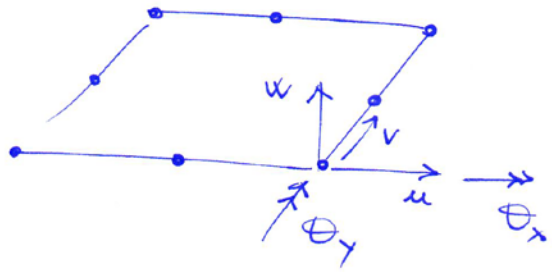
Dunque bisogna considerare sia il comportamento a sforzo normale che quello a flessione dell'elemento.

Così come per le piastre esiste una teoria dei gusci "sottili" ed una dei gusci "spessi", teorie particolarmente complesse sulle quali non ci soffermiamo.

Diciamo solo che l'elemento finito "shell" si può ottenere unendo insieme i gradi di libertà relativi agli spostamenti nel piano, con quelli tipici delle piastre, un po' come quando con l'elemento 1D si sono uniti i gradi di libertà dell'elemento "bar" con quelli dell'elemento "beam"

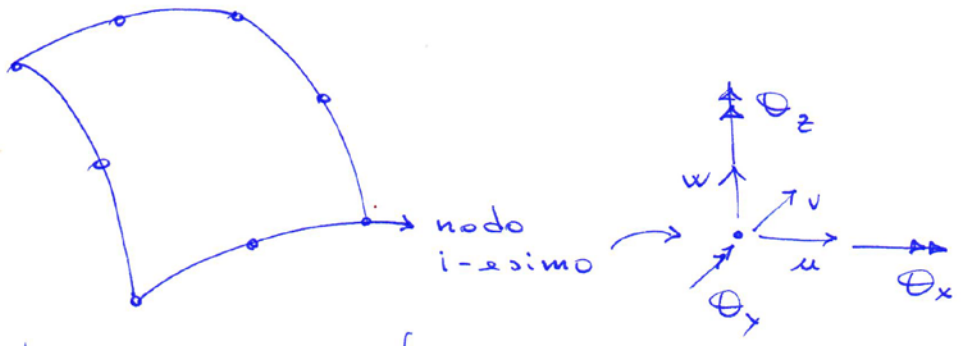


Gli elementi shell sono anch'essi, quando si considerano piani, quadrangolari del tipo Q_4 ovvero Q_8, essi però presentano 5 gradi di libertà per nodo



Rappresentare una superficie curva con elementi piani è di per se una approssimazione, esistono così anche degli elementi shell curvi, in cui per ogni nodo sono presenti tutti i gradi di

liberta'



La formulazione delle funzioni di forma e delle equazioni necessarie alla risoluzione del problema è basata sulla teoria dei gusci, la quale è tutt'altro che semplice.
Nonostante ciò vi sono delle rilevanti situazioni pratiche, come quelle di strutture a spessore non costante (lame, eliche...), o di strutture sottili ma a strati di differenti caratteristiche meccaniche per cui non si può fare a meno di procedere con elementi finiti tridimensionali.