

che cinematici. La validità del metodo necessita il controllo della compatibilità delle rotazioni plastiche delle cerniere, ciò presuppone che queste siano dotate di sufficiente duttilità.

Tale metodo può utilizzarsi anche nel calcolo delle piastre, per le quali il meccanismo di collasso presuppone la formazione di un numero sufficiente di «linee plastiche».

Il calcolo rigido-plastico allo stato limite ultimo richiede che venga fatto un calcolo elastico-lineare per la verifica degli stati limite di esercizio, in particolare per lo stato limite di deformazione.

## CAPITOLO 5

### ELEMENTI STRUTTURALI

#### 5.1 Generalità

Gli elementi strutturali, secondo la loro forma, possono essere:

- 1) monodimensionali a sezione piena o a parete sottile;
- 2) bidimensionali piani, a curvatura semplice o doppia;
- 3) tridimensionali.

In questo capitolo verranno analizzati i particolari aspetti dell'impiego del cemento armato nella loro realizzazione.

#### 5.2 Elementi strutturali monodimensionali

Per elementi strutturali monodimensionali (o lineari) si intendono quelli la cui forma è generata dal moto di una qualsiasi figura piana, che pur potendo cambiare di forma e di dimensioni si mantiene normale alla linea descritta dal proprio baricentro (asse dell'elemento). Le dimensioni della figura piana (sezione normale o, semplicemente, *sezione*) sono piccole rispetto a quella dell'asse che è prevalente sulle altre.

Nell'ambito della «Scienza delle Costruzioni» tali elementi, comunque sollecitati, prendono genericamente il nome di «travi».

Nella tecnica, assumono nomi diversi a seconda della sollecitazione e della funzione prevalente; si distinguono così: pilastri, travi, archi, tiranti, puntoni, pile, ecc., distinzioni che sono dovute all'uso che se ne fa nel linguaggio corrente; possono aversi infatti, elementi strutturali che hanno un funzionamento tale da non poter fare distinzioni così nette.

##### 5.2.1 Pilastri

Si definisce «pilastro» l'elemento strutturale rettilineo, in genere ad asse verticale, in cui i carichi esterni prevalenti hanno retta di azione parallela al suo asse e la sollecitazione prevalente è lo sforzo normale.

Il pilastro tipico è quello del telaio di un edificio. Nei ponti lo stesso elemento strutturale assume il nome di «pila».

Oltre che a sforzo normale i pilastri possono essere soggetti anche a notevoli momenti e tagli.

Le norme italiane [2], tenuta presente la prevalenza dello sforzo normale, permettono di calcolare i pilastri, anche se sollecitati da piccoli momenti flettenti, come soggetti a pressione centrata, tenendo conto dell'approssimazione al calcolo nel definire il valore delle tensioni ammissibili (cfr. n. 3.5.1).

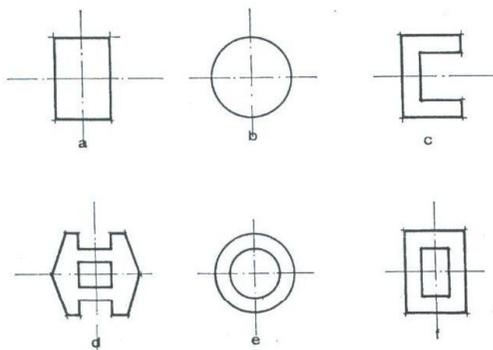


Fig. 5.1 - Forme di pilastri.

Si tenga presente che tale criterio può essere accettato per un pilastro di un telaio di un edificio, che è una struttura fortemente iperstatica, in cui effettivamente il momento flettente nel pilastro è piccolo per lo stesso succedersi delle fasi costruttive della struttura, ed inoltre la resistenza flessionale del pilastro incide poco sull'equilibrio globale della struttura; non altrettanto è ammissibile ad esempio, per una struttura isostatica come una pila di ponte sorreggente travi semplicemente appoggiate, in cui la flessione, anche se piccola, è essenziale per l'equilibrio della struttura.

Relativamente alla scelta della tensione ammissibile con cui vanno calcolati i pilastri di un edificio, va richiamata l'attenzione sulla particolare incertezza che presenta l'analisi dei carichi e lo stesso calcolo delle sollecitazioni.

Si suole infatti ipotizzare una distribuzione dei carichi fra i pilastri assegnando ad ognuno di essi una zona d'influenza, nell'ipotesi che le strutture orizzontali siano semplicemente appoggiate.

Trascurare la continuità vuol dire non tenere conto della diversa distribuzione dei carichi per effetto delle forze di taglio prodotte dai momenti d'estre-

mità, ed inoltre, prescindere dalle azioni flettenti trasmesse ai pilastri. Si omette poi di considerare gli incrementi di carico per cedimenti differenziali delle fondazioni, che con terreni cedevoli possono essere notevoli, e quelli dovuti al diverso accorcimento dei pilastri, che assumono importanza per pilastri molto alti e diversamente sollecitati.

Va inoltre considerato che negli edifici, essendo il carico permanente ben poco inferiore al carico totale di calcolo, tanto più quando nelle analisi dei carichi si riduce il sovraccarico a partire dal piano più alto, i pilastri sono sollecitati effettivamente ad un tasso prossimo a quello di calcolo.

Per tali ragioni è prudente, principalmente nel calcolo delle intelaiature degli edifici, di non lesinare nelle dimensioni dei pilastri, anche perché, il collasso di un solo pilastro, può provocare il crollo di tutta la struttura.

La sezione trasversale (fig. 5.1) può aver forma qualunque e rimanere costante o variabile lungo l'asse; le forme più usate hanno due assi di simmetria; ad esempio negli edifici civili la forma più consueta è quella rettangolare.

Nei pilastri si distinguono due tipi di armature: longitudinali e trasversali.

#### 5.2.1.1 ARMATURE LONGITUDINALI

Sono costituite generalmente da barre disposte parallelamente all'asse del pilastro e distribuite in prossimità della sua superficie che collaborano con il conglomerato sotto le sollecitazioni esterne.

La loro quantità si determina mediante le formule del n. 3.6 nel caso di pressione centrata e con quelle del n. 3.7 nel caso di pressione eccentrica.

Le armature longitudinali hanno inoltre la funzione di assicurare la continuità del pilastro con gli altri elementi strutturali (fig. 5.2). In particolare nei telai degli edifici è importante il buon collegamento delle armature dei pilastri alle riprese dei piani (fig. 5.2).

#### 5.2.1.2 ARMATURE TRASVERSALI

Prendono il nome di «staffe».

In fase di costruzione esse assolvono la funzione di tenere nella loro posizione le armature longitudinali durante il getto e la successiva vibrazione.

In esercizio le staffe si oppongono all'inflessione delle armature longitudinali conseguente allo svergolamento, in quanto ne limitano la lunghezza libera di inflessione.

In assenza di staffe un pilastro perderebbe di resistenza proprio a causa della presenza delle armature longitudinali che svergolandosi farebbero distaccare il ricoprimento di conglomerato.

Nei pilastri frettati (cfr. 5.2.1.3), invece, hanno anche la specifica funzione di contenere le deformazioni laterali del conglomerato aumentando la capacità portante ultima del pilastro, e quindi elevando il carico d'esercizio.

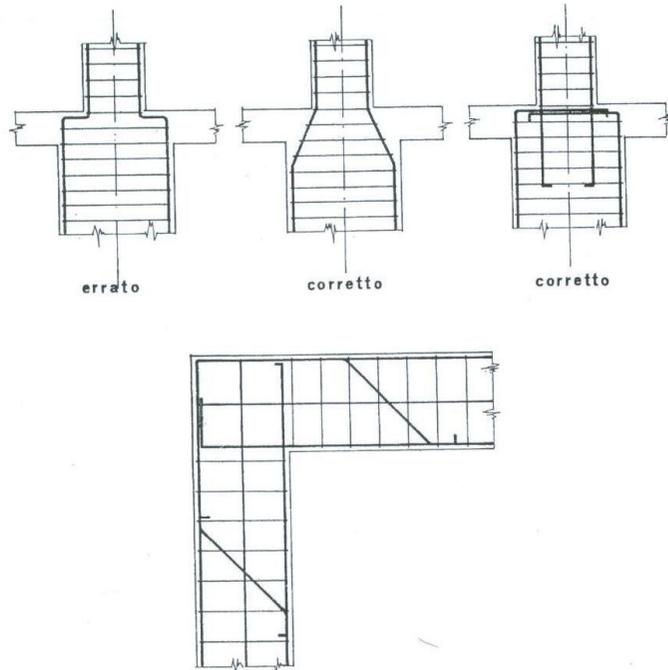


Fig. 5.2 - Disposizioni corrette delle armature longitudinali nei pilastri.

Per il dimensionamento delle staffe, tranne che per i pilastri frettati, non si conduce alcun calcolo. Le norme italiane [2] impongono soltanto un interasse minimo, per garantire dall'inflessione laterale i ferri longitudinali.

Applicando la formula di Eulero ad una barra, per la quale si ipotizzi la luce libera di inflessione  $l_0$  pari all'interasse  $t$  delle staffe si ha:

$$N_c = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (5.1)$$

ed essendo:

$$N_c = A \cdot \bar{\sigma}_n = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \bar{\sigma}_n$$

$$J = \frac{\pi D^4}{64}$$

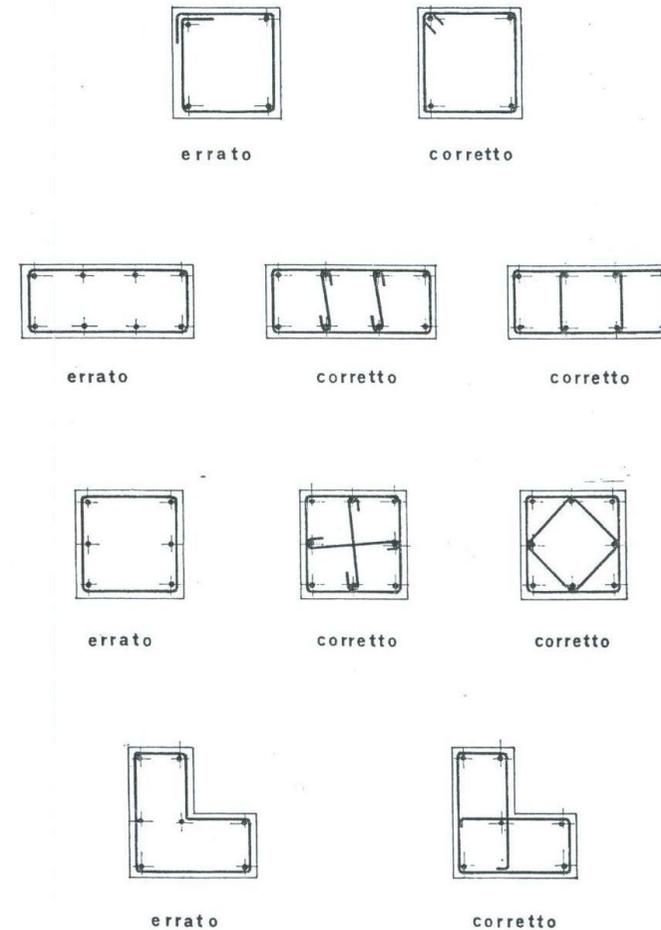


Fig. 5.3 a - Disposizioni errate e corrette delle staffe nei pilastri.

risulta:

$$t = D \cdot \left( \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{\frac{E_n}{\bar{\sigma}_n}} \right) \quad (5.2)$$

La (5.2) per coefficiente di sicurezza 2, con riferimento ad un acciaio di caratteristiche:

$$\begin{aligned} E_n &= 210\,000 \text{ kg/cm}^2 \\ \bar{\sigma}_n &= 2400 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

porta ad un interasse minimo:

$$t_{\min} = \frac{t}{2} = 23,22 D$$

Le norme italiane impongono per i pilastri gettati in opera:

$$t \leq 15 D < 25 \text{ cm}$$

con:

- barre longitudinali di diametro  $D > 12 \text{ mm}$ ;
- staffe di diametro  $> 6 \text{ mm}$  e  $> \frac{D}{4}$  in cui  $D$  è il diametro massimo della barre longitudinali.

Nel caso di pilastri prefabbricati i diametri minimi delle barre longitudinali e delle staffe si riducono rispettivamente a 10 mm e 5 mm.

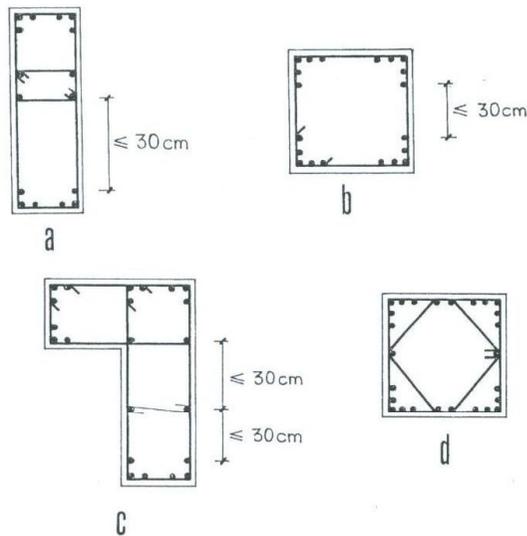


Fig. 5.3 b - Disposizioni delle armature longitudinali nei pilastri per aumentare l'efficacia delle staffe nei riguardi dello svergolamento.

Affinché le staffe siano efficaci esse debbono essere conformate in modo da contrastare lo svergolamento delle armature longitudinali lavorando a trazione e non a flessione, per cui dovranno essere sagomate, a seconda della sezione trasversale del pilastro come rappresentato nella fig. 5.3 a.

A tale riguardo, quando si abbiano numerose armature longitudinali, sono da preferire le disposizioni della fig. 5.3 b, suggerite da Leonhardt [16]. Tali disposizioni sono altresì più efficaci, di quelle consuete di distribuire le armature uniformemente sul perimetro del pilastro, in particolare quando esso può essere sollecitato a pressoflessione deviata, come avviene nelle strutture degli edifici specie per i pilastri d'angolo.

### 5.2.1.3 PILASTRI FRETTATI

Sono pilastri in cui un'elevata armatura trasversale, ostacolando la dilatazione trasversale del conglomerato, aumenta la capacità portante del pilastro.

Si consideri infatti (fig. 5.4) un elemento di calcestruzzo di altezza unitaria a sezione circolare, caricato assialmente da una forza  $N$ .

Per effetto di  $N$  il prisma si accorcia longitudinalmente di:

$$\epsilon_l = \frac{N}{A} \cdot \frac{1}{E_c} = \sigma_l \cdot \frac{1}{E_c}$$

e si dilata radialmente di:

$$\epsilon_r = \nu \cdot \epsilon_l = \nu \cdot \sigma_l \cdot \frac{1}{E_c}$$

Si supponga di porre attorno al nucleo un involucro cerchiante per es. una spirale con passo  $p$  molto fitto.

Tale armatura si oppone alla dilatazione  $\epsilon_r$ , per cui nasce sulla superficie verticale di un generico elementino principale, nell'interno del pilastro, una componente radiale:

$$\sigma_l = \alpha \cdot \sigma_r$$

con  $\alpha$  funzione della rigidità dell'armatura trasversale variabile tra 0 e  $\nu$ , che si raggiunge per rigidità infinita.

Supponendo tale armatura infinitamente rigida, per effetto della dilatazione impedita si ha sulla superficie d'elemento una compressione uniforme:

$$\sigma_r = E_c \cdot \epsilon_r = \nu \cdot \sigma_l$$

Pertanto un elemento unitario di calcestruzzo sarà sollecitato come in fig. 5.4 b, mentre in assenza del frettaggio il suo stato di tensione sarebbe quello della fig. 5.4 a.

Considerata allora la curva intrinseca del materiale si vede che il valore  $\sigma_r$  di rottura per l'elemento della fig. a) (caso ① pilastro non frettato), non porta alla rottura dell'elemento della fig. b) (caso ② pilastro frettato) infatti in quest'ultimo nasce uno stato di sollecitazione triassiale per cui il cerchio di Mohr è interno alla curva intrinseca del materiale.

Nell'ipotesi che  $\sigma_r$  rappresenti il valore massimo dell'effetto di conteni-

mento della armatura cerchiante (l'armatura ha raggiunto lo snervamento), per cui rimane costante il crescere di  $\sigma_1$ , la rottura per l'elemento frettato si avrà per il valore di  $\sigma_1' > \sigma_1$  tale che il cerchio di Mohr risulti tangente alla curva intrinseca.

Tale aumento di resistenza a rottura fa sì che, a parità di qualità di conglomerato e di coefficiente di sicurezza, la portata dei pilastri cerchiati sia mag-

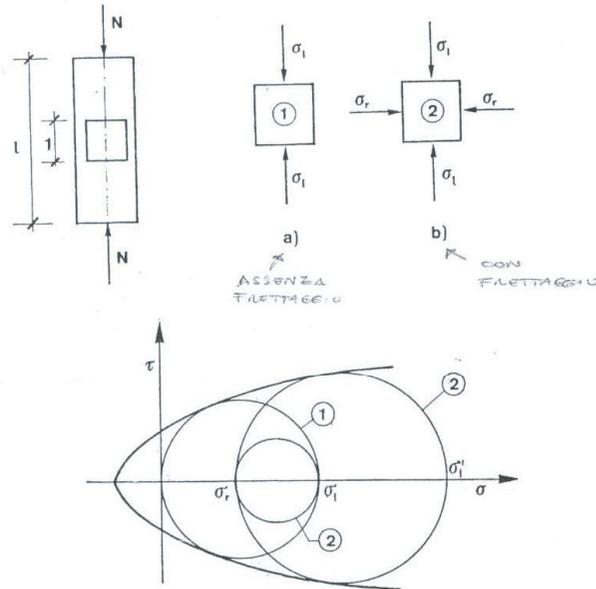


Fig. 5.4 - Stato di tensione in un pilastro frettato ② e non ①.

giore di quelli normali: il suo valore viene valutato mediante formule di origine sperimentale.

Le norme italiane [2] per i pilastri cerchiati, tengono conto dell'aumento di portata considerando, in luogo della (3.14), l'area ideale:

$$A_i = A_n + 15 A_{at} + 45 A_{at} \quad (5.4)$$

essendo (fig. 5.5):

$A_n$  = area del nucleo con la condizione  $A_i < 2 A_n$ ;

$A_{at}$  = area della sezione dell'armatura longitudinale;

$A_{at}$  = area della sezione trasversale di un'armatura longitudinale ideale dello stesso volume dell'elica

$$A_{at} = \frac{\pi \cdot D}{p} A_n \text{ (elica)} \quad (5.5)$$

L'acciaio longitudinale ha anch'esso un importante ruolo nella resistenza e pertanto, ad evitare che venga eccessivamente ridotto, viene posta la condizione:

$$2 A_{at} \geq A_{at} \quad (5.6)$$

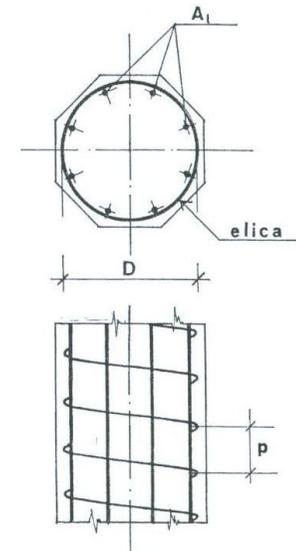


Fig. 5.5. Pilastro frettato.

Inoltre deve risultare.

$$p \leq \frac{D}{5} \quad (5.7)$$

Nelle condizioni limite (minima dimensione realizzabile con la cerchiatura) risulta:

e quindi:

$$A_i = 2 A_n$$

$$A_n = \frac{N}{2 \cdot \bar{\sigma}_c}$$

ed essendo:

$$2 A_n = A_n + 15 A_{at} + 90 A_{at}$$

risulta:

$$A_{at} = \frac{A_n}{105} \approx 1\% A_n$$

Nella formula (5.4) l'acciaio cerchiante viene valutato il triplo di quello longitudinale. Considerare gli attribuisce un'efficacia quadrupla, mentre esperienze più recenti la limiterebbero al doppio. Tale minore valore sarebbe da attribuire al fatto che mentre a rottura la cerchiatura reagirebbe al massimo carico di sneramento, l'acciaio longitudinale, se ben frettato, offrirebbe una resistenza superiore a quella prevista dalla formula (5.4); inoltre le esperienze mostrano che l'acciaio longitudinale è essenziale anche per rendere operante il frettaggio, opponendosi al suo svolgimento.

Guerrin mostra con un significativo esempio l'efficacia dei ferri longitudinali analizzando un cilindro pieno d'acqua ed in esso uno stantuffo. La sezione del cilindro, per resistere ad un dato carico trasmesso dallo stantuffo, risulta doppia di quella dello stesso cilindro sottoposto direttamente al carico come una colonna cava. Quindi appare che sarebbe logico aumentare il coefficiente di  $A_n$  e ridurre quello  $A_n$  della formula regolamentare.

Utilizzando il metodo degli stati limiti l'effetto della cerchiatura viene tenuto in conto calcolando  $N_n$  come somma del contributo del conglomerato del nucleo, dell'armatura longitudinale e dell'armatura cerchiante trasformata in una armatura longitudinale fittizia di ugual peso, come fatto per il metodo delle tensioni ammissibili.

La forza normale ultima risulta pertanto:

$$N_u = A_{cm} \cdot f_{ct} + (A_{nl} + A_{nl}) f_{yt}$$

con le limitazioni:

$$p \leq \frac{D}{5}$$

$$N_u \leq 2 \cdot A_{cm} \cdot f_{ct}$$

$$\gamma_c = 1,25 \cdot 1,6$$

5.2.1.3.1 Esempio.

Si debba verificare il pilastro frettato della fig. 5.6 sottoposto allo sforzo normale centrato  $N = 138\ 000$  kg.

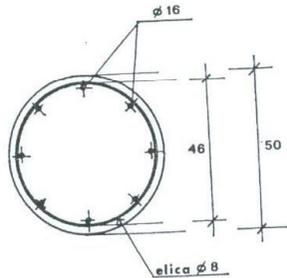


Fig. 5.6 - Esempio di pilastro frettato mediante spirale.

Essendo:

$$d_n = 46 \text{ cm}^2$$

$$\varnothing \text{ (spirale)} = 0,8 \text{ cm} \quad A = 0,5 \text{ cm}^2$$

$$p = 8 \text{ cm}$$

$$A_{st} = \frac{\pi \varnothing^2}{4} = \frac{\pi (0,8)^2}{4}$$

risultano:

$$A_n = 1661,0 \text{ cm}^2$$

$$A_{nl} = 8 \varnothing 16 = 16,08 \text{ cm}^2$$

$$A_{nl} = 9,03 \text{ cm}^2$$

$$A_{et} = \frac{A_{st} \cdot \alpha \cdot D_m}{p}$$

Mediante la (5.4) risultano:

$$A_r = 2308,5 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_r = 59,8 \text{ kg/cm}^2$$

Avendo controllato che:

$2 A_{nl} \geq A_r$	infatti	$32,16 > 9,03$
$p \leq d/5$	"	$8 < 10$
$A_r \leq 2 A_n$	"	$2308,5 < 3322$

5.2.1.4 INSTABILITÀ

Il problema dell'instabilità dei pilastri per carico di punta, che fino a non molti anni fa era tipico delle strutture in acciaio, con il miglioramento delle caratteristiche meccaniche del conglomerato e dell'ardire dei progettisti, oggi interviene anche per il dimensionamento delle strutture in c.a.; basti pensare che si è arrivati a costruire pile da ponte in c.a. che superano l'altezza di 150 m.

Il problema già impegnativo nel caso dell'acciaio lo diventa molto di più nel cemento armato dove la parzializzazione della sezione introduce un'altra variabile nello studio della instabilità.

In questo paragrafo esamineremo il caso del singolo pilastro separato dalla struttura di cui fa parte, limitandoci a fornire alcuni criteri per controllare la stabilità dell'intera struttura.

Il comportamento di un pilastro nei riguardi del carico di punta è influenzato, in maniera determinante, dalla sua lunghezza, dalla natura e dalla disposizione dei vincoli alle estremità, dalla forma e orientamento della sezione.

Numerosi metodi di verifica delle aste cosiddette «snelle», per le quali le sollecitazioni sono funzioni delle deformazioni (effetti del secondo ordine), sono disponibili nella letteratura scientifica.

I metodi più generali di verifica che tengono conto della non linearità geometrica e della non linearità del materiale sono piuttosto complessi e richiedono un processo di analisi al passo, all'aumentare dei carichi o delle deformazioni, che va condotta mediante l'uso del calcolatore.

Per le strutture più semplici che si incontrano nella pratica progettuale sono suggeriti metodi semplificati che sacrificano il rigore dell'impostazione alla facilità dell'uso.

La norma italiana prevede i metodi che verranno di seguito descritti:

5.2.1.4.1 Metodo  $\omega$

Quando il calcolo delle strutture è svolto con il «metodo delle tensioni ammissibili» le N.I. suggeriscono l'uso del cosiddetto metodo  $\omega$ , che nato originariamente per le strutture metalliche è stato esteso a quelle in cemento armato.

5.2.1.4.1.1 Pressione centrata

Con il metodo  $\omega$  la verifica delle sezioni viene eseguita con la formula della pressione semplice considerando uno sforzo normale incrementato:

e quindi:

$$N_c = \omega N$$

$$\sigma_c = \frac{N_c}{A_i} = \omega \frac{N}{A_i}$$

$N_c = \omega N$  INCREMENTATO di  $N$

(5.9)

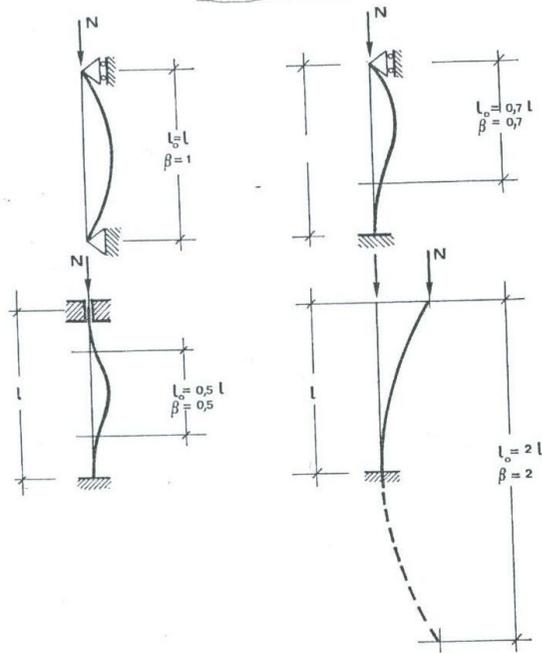


Fig. 5.7 - Lunghezza libera d'inflexione per pilastri diversamente vincolati.

Il coefficiente  $\omega$  di amplificazione dei carichi, è funzione del coefficiente di snellezza:

$$\lambda = \frac{l_0}{i} \quad \lambda = \frac{l_0}{\rho} \quad (5.10)$$

in cui:

$l_0 = \beta l$ : lunghezza libera d'inflexione del pilastro, pari alla distanza tra due flessi consecutivi della deformata dovuta all'inflexione laterale; il suo valore dipende dai vincoli d'estremità del pilastro; nella fig. 5.7 sono riportati i valori di  $\beta$  per diversi casi di vincolo.

$\rho = \sqrt{\frac{J_i}{A_i}}$ : raggio d'inertia della sezione trasversale nel piano d'instabilità, con  $J_i$  e  $A_i$  momento d'inertia ed area della sezione omogeneizzata.

Nelle strutture in c.a. il raggio d'inertia non è necessariamente quello minimo della sezione, perché spesso l'instabilità secondo tale piano è impedita da altri elementi strutturali (fig. 5.8).

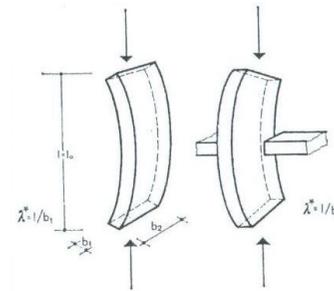


Fig. 5.8 - Influenza dei vincoli sul piano d'instabilità.

Le norme italiane danno per  $\omega$  i valori riportati nella tabella (5.1):

TABELLA 5.1

$\lambda$	$\omega$
50	1,00
70	1,08
85	1,32
100	1,62
120	2,28
140	3,00

$\lambda > 50$   
 $\Rightarrow$  VERIFICA DI  
 INSTABILITÀ

dalla quale si vede come la verifica d'instabilità interessa per valori di  $\lambda > 50$ .

Con snellezza  $\lambda$  maggiore di 100 occorre particolare cautela e quindi procedere alla verifica con i metodi piú approssimati riportati nella bibliografia [22].

La verifica deve essere fatta nel piano di massima snellezza come indicato in fig. 5.8.

Negli edifici in c.a. il problema è la scelta di  $\beta$ . Non è prudente scendere al disotto di 0,8, valore che si può adottare solo nel caso di vincoli d'estremità molto rigidi, come ad esempio quello di un blocco di fondazione.

Se si prevedono degli spostamenti orizzontali,  $\beta$  è compreso tra 1 e 2, con valori tanto piú vicini ad 1 quanto piú i vincoli d'estremità sono rigidi (fig. 5.9).

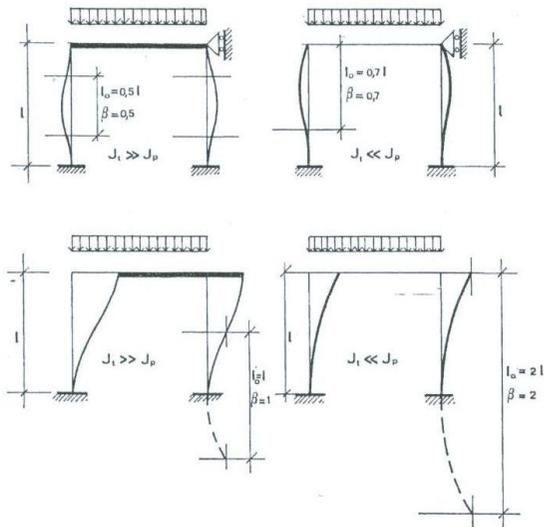


Fig. 5.9 - Lunghezza libera d'inflessione per i pilastri di un telaio.

5.2.1.4.1.2 Pressione eccentrica

Se lo sforzo normale è eccentrico si verifica l'instabilità progressiva. Per tenere conto della curvatura del pilastro è quindi dello spostamento laterale delle sezioni, le norme italiane impongono di fare la verifica con le formule della pressione e flessione considerando uno sforzo normale ed un momento flettente incrementati:

$$N_e = \omega \cdot N \quad (5.11 a)$$

$$M_e = c \cdot M \quad (5.11 b)$$

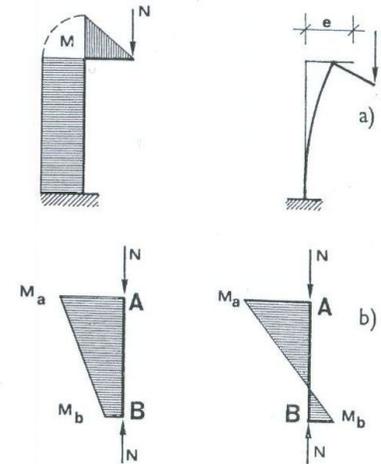


Fig. 5.11 - Diagrammi dei momenti in un pilastro sollecitato alle estremità.

in cui  $\omega$  è valutato come per la pressione centrata e:

*ment'a*

$$c = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_E}} \quad (5.12)$$

dove:

$$N_E = \frac{\pi^2 \cdot E_c^* \cdot J}{l_0^2} \quad (5.13)$$

è il carico critico di Eulero per la snellezza relativa al piano di flessione, nel quale si assume un modulo di elasticità del conglomerato ridotto:

$$E_c^* = 0,4 E_c$$

per cui:

$$N_E = 3,94 \frac{E_c \cdot J}{l_0^2} \quad (5.14)$$

Per pilastri vincolati solo alla base (fig. 5.10 a), ad esempio una pila da ponte incastrata al blocco di fondazione e libera in cima,  $M$  è il momento massimo; per i pilastri vincolati alle due estremità, se il momento varia linearmente tra i valori estremi  $M_a$  e  $M_b$  (fig. 5.10 b), come avviene nei pilastri di un telaio (fig. 5.11), il calcolo va fatto per il momento:

$$M = \sqrt{0,3 \cdot (M_a^2 + M_b^2) + 0,4 \cdot M_a \cdot M_b} \quad (5.15)$$

Nella verifica a pressoflessione, in luogo di  $N_c$  va considerato  $N$ , se più sfavorevole.

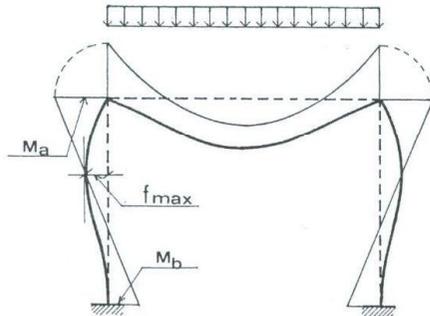


Fig. 5.11 - Diagrammi dei momenti e deformata di un telaio.

#### 5.2.1.4.1.3 Esempio.

Si debba verificare la pila da ponte la cui sezione è riportata nella fig. 5.12; la pila incastrata alla base e libera in cima, è alta  $l = 47,00$  m; è sollecitata da uno sforzo normale  $N = 1729$  t e da due momenti, non contemporanei  $M_y = 5871$  t·m ed  $M_x = 5887$  t·m.

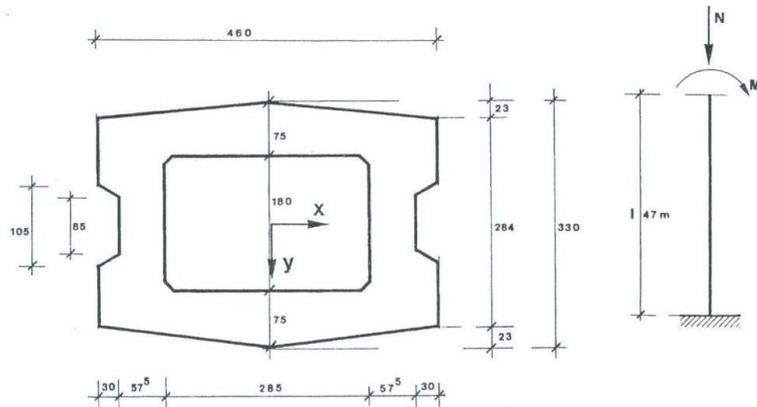


Fig. 5.12 - Esempio di pila da ponte soggetta al carico di punta.

Caratteristiche dalla sola sezione di conglomerato:

$$\begin{aligned} A &= 8,53 \text{ m}^2 \\ J_x &= 9,7816 \text{ m}^4 & \rho_x &= 1,0708 \text{ m} \\ J_y &= 18,733 \text{ m}^4 & \rho_y &= 1,4819 \text{ m} \end{aligned}$$

Assumendo una lunghezza libera d'inflessione  $l_0 = 2 l$ , i coefficienti di snellezza secondo  $x$  e  $y$  valgono:

$$\lambda_x = \frac{2 \cdot 47}{1,0708} = 87,78$$

$$\lambda_y = \frac{2 \cdot 47}{1,4819} = 63,43$$

essendo ambedue i  $\lambda > 50$  va eseguita la verifica al carico di punta.

Verifica nel piano di flessione  $y$ .

Per la (5.11) la verifica andrà eseguita considerando le sollecitazioni:

$$\begin{aligned} N_c &= \omega N \\ M_c &= c M_y \end{aligned}$$

Dalla tab. 5.1, per  $\lambda_x$  si ricava:

$$\omega = 1,3757$$

Dalla (5.12):

$$c = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_E}}$$

Assunto  $E_c = 300\,000$  kg/cm<sup>2</sup>, risulta per la (5.14):

$$N_E(y) = 13\,098 \text{ t}$$

e quindi:

$$c = 1,15228$$

Le sollecitazioni critiche con cui va verificata la sezione valgono pertanto:

$$\begin{aligned} N_c &= 2378,7 \text{ t} \\ M_c &= 6764,5 \text{ t/m} \end{aligned}$$

Verifica sul piano di flessione  $x$ .

In tale caso:

$$\begin{aligned} \omega &= 1,05372 \\ c &= 1,07403 \end{aligned}$$

ed

$$\begin{aligned} N_c &= 1822,0 \text{ t} \\ M_c &= 6323,5 \text{ t} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

## 5.2.1.4.2 Stato limite ultimo di instabilità

Secondo il metodo agli stati limite la verifica di un elemento monodimensionale «snello» consiste nel controllare che:

$$F_d < R_d \left( \frac{1}{R} \right)$$

con:

$F_d$ : sollecitazioni e/o deformazioni prodotte dalle azioni esterne di calcolo tenuto conto degli effetti del secondo ordine.

$R_d \left( \frac{1}{R} \right)$ : resistenza e deformazioni ultime delle sezioni.

Gli elementi monodimensionali a sezione costante vengono considerati «snelli» quando la snellezza massima risulta maggiore della snellezza limite  $\lambda^*$ :

$$\lambda = \frac{l_0}{i} \geq \lambda^*$$

Per le Norme Italiane:

$$\lambda^* = 60 \cdot \frac{1 + 15 \rho}{\sqrt{N_d/A_r}}$$

$\rho$  = percentuale geometrica di armatura  
 $A_r$  = area del conglomerato  
 $N_d$  = forza normale di calcolo.

rispetto al metodo  $\omega$  compaiono come elementi caratterizzanti la snellezza, la resistenza della sezione ( $N_d$ ) e la percentuale di armatura.

Snellezze  $\lambda > 3 \lambda^*$  sono da considerare pericolose e la valutazione della sicurezza va fatta con metodi di verifica più sofisticati di quelli di seguito illustrati. Vengono di seguito illustrati dei metodi semplificati di facile uso.

## 5.2.1.4.2.1 Metodo della colonna modello

Si consideri la colonna rappresentata in fig. 5.13 a, sollecitata in cima dalle forze  $H$  ed  $N$ , per l'azione delle quali si avrà la deformata di fig. 5.13 a.

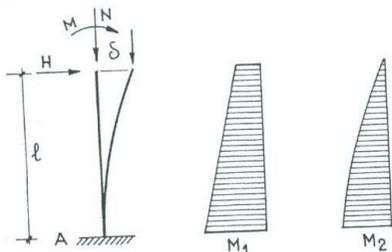


Fig. 5.13 a - Schema di colonna-modello.

Nella sezione A di massima sollecitazione:

$$M_A = M_1 + N \cdot \delta \quad (5.15 a)$$

Il primo termine:

$M_1 = M + H \cdot l$ : rappresenta il momento del 1° ordine;

il secondo termine:

$M_2 = N \cdot \delta$ : rappresenta il momento del 2° ordine.

Se fosse noto il valore massimo (limite) di  $\delta$ , al di là del quale non è garantito l'equilibrio, con la (5.15 a) sarebbe immediatamente calcolabile il momento massimo delle azioni esterne.

Si definisce "Colonna Modello" l'elemento compresso in cui il legame tra freccia massima e curvatura massima è definito dall'assumere come configurazione deformata una sinusoide. Ne segue che:

$$\delta = \left( \frac{l_0}{\pi} \right)^2 \frac{1}{R} \quad (5.15 b)$$

in cui  $\frac{1}{R}$  è la curvatura massima in A.

Si pone  $\pi^2 = 9,86 = 10$  ed essendo

$$l_0 = 2 l$$

si ha:

$$\delta = 0,4 \cdot l^2 \frac{1}{R}$$

La deformata effettiva della colonna può esprimersi mediante una serie di Fourier: la (5.15 b) allora rappresenta il primo termine dello sviluppo in serie. Ciò può fare intendere, nei vari casi, il grado di approssimazione della (5.15 b) e del metodo della "Colonna Modello".

Per una data sezione, percentuale di armatura, caratteristiche del conglomerato e dell'acciaio, mediante i procedimenti di cui al cap. 4, è possibile ricavare, per un valore noto di  $N$ , la funzione  $M - \frac{1}{R}$  (fig. 5.13 b); nella stessa figura è disegnato (retta tratteggiata) la funzione:

$$M_2 - \frac{1}{R}$$

La (5.15 a), tenuto conto della (5.15 b), può sciversi nella forma

$$M_1 = M_A - 0,4 l^2 \frac{1}{R} N \quad (5.15 c)$$

se  $M_A$  è uguale al momento ultimo  $M_u$  della sezione,  $M_1$  rappresenta il massimo momento esterno del 1° ordine corrispondente alla data curvatura ultima.

Ricavato dallo (5.15 c) il massimo valore di  $M_1$  ( $M_{1 \max}$ ) la verifica dello stato limite di instabilità è soddisfatta se il momento esterno di calcolo  $M_{1d}$  gli risulta inferiore:

$$M_{1d} \leq M_{1 \max}$$

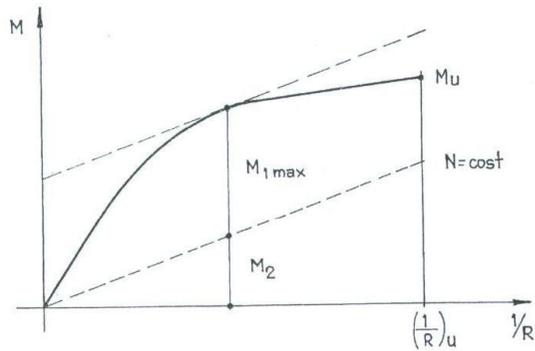


Fig. 5.13 b - Diagramma momento-curvatura.

Se  $M_{1 \max}$  si ha per una curvatura minore di quella ultima (corrispondente ad  $M_u$ ), la rottura si raggiunge per instabilità, altrimenti vorrà dire che la rottura si ha per raggiungimento della resistenza della sezione.

#### 5.2.1.4.2.2 Metodo diretto dello stato di equilibrio

Dalla (5.15 a) si deduce che lo stato di equilibrio è verificato se esiste una curvatura tale che:

$$\frac{M}{N_d} - \delta = \frac{M}{N_d} - 0,4 l^2 \frac{1}{R} \geq \frac{M_{1d}}{N_d}$$

ed inoltre:

$$N_n > N_{1d}$$

#### 5.2.1.4.2.3 Verifica degli elementi strutturali

Il metodo della "Colonna Modello" può applicarsi anche ad aste vincolate e sollecitate diversamente da quella di fig. 5.13 a. Anche in questo caso il problema è quello di definire una forma di deformata limite che permetta di calcolare le sollecitazioni del 1° ed 2° ordine nella sezione di massima sollecitazione.

Nel caso di fig. 5.13 d la sezione di massima sollecitazione è quella di mezzeria dove si ha:

$$M = M_1 + M_2 = N \cdot a + N \cdot \delta$$

Ipotizzando una deformata sinusoidale dalla (5.15 b) si ricava  $\delta$ , in funzione della curvatura  $\frac{1}{R}$  della sezione di mezzeria e della lunghezza libera di inflessione  $l_0 = l$ :

$$\delta = 0,1 l^2 \left( \frac{1}{R} \right)$$

Definito così  $M_2$ , il procedimento è uguale al caso della colonna incastrata.

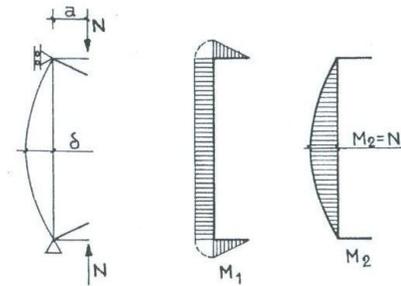


Fig. 5.13 c - Esempio di Colonna Modello per asta incernierata agli estremi.

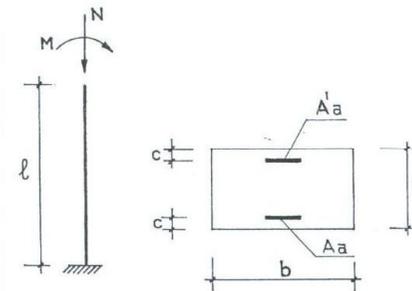


Fig. 5.13 d - Esempio di pilastro soggetto al carico di punta.

#### 5.2.1.4.2.3 Esempio

Si verifichi la colonna singola, riportata in figura 5.13 d, dalle seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} l &= 5,50 \text{ m} \\ b &= 60 \text{ cm} \\ h &= 40 \text{ cm} \\ c &= 3 \text{ cm} \\ A_n = A'_n &= 6 \varnothing 20 = 18,84 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

sottoposta alle seguenti sollecitazioni:

$$\begin{aligned} N &= 75 \text{ t} \\ M &= 10 \text{ tm} \end{aligned}$$

e realizzata con i seguenti materiali:

cls:  $R_{ctk} \geq 350$   
acciaio: Fe B 38 K

Le sollecitazioni di calcolo, considerando una eccentricità non intensionale  $e_0 = \frac{l_0}{300}$ , valgono:

$$N_d = 1,5 N = 112,5 \text{ t}$$

$$M_d = 1,5 M + e_0 N_d = 12,12 \text{ tm}$$

La lunghezza libera di inflessione dell'asta, per il vincolo presente è data da:

$$l_0 = 2 l = 11,00 \text{ m}$$

Pertanto il giratore di inerzia vale:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = 11,52 \text{ cm}$$

e la snellezza dell'asta si ottiene quindi dal rapporto:

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = 95,5$$

Poiché risulta:

$$34 = \lambda^* < \lambda < 3 \lambda^* = 102$$

necessita verifica ad instabilità della colonna.

A tal fine vengono ipotizzati i seguenti legami costitutivi di calcolo dei materiali (figura 5.13 e).

— **Conglomerato:** diagramma parabola rettangolo con tangente orizzontale nel punto:

$$\epsilon_{cu} = 2,0\%$$

$$\sigma_{co} = 0,85 f_{cd} = 0,85 \times 0,83 \times R_{ctk} / 1,6$$

e deformazione ultima

$$\epsilon_{cu} = 3,5\%$$

**Acciaio:** Diagramma elasto perfettamente plastico con ordinata massima

$$\sigma_y = f_{yd} = f_{yk} / 1,15$$

modulo elastico

$$E_s = 2,1 \times 10^{-6} \text{ kg/cm}^2$$

e deformazione ultima

$$\epsilon_{su} = 10\%$$

Tramite un programma di calcolo automatico vengono valutate, per assegnate curvature, le grandezze adimensionali  $\mu$  e  $\nu$  così definite

$$\nu = \frac{N}{N_0} \quad \mu = \frac{M}{M_0}$$

con:

$$N = \int_{A_c} \sigma_c \cdot dA + \sum_i A_{si} \cdot \sigma_{si}$$

$$M = \int_{A_c} \sigma_c \cdot y \cdot dA + \sum_i A_{si} \cdot y_{si} \cdot \sigma_{si}$$

$$N_0 = A_c \cdot f_{cd} = 370 \text{ t}$$

$$M_0 = N_0 \cdot h = 148 \text{ t} \cdot \text{m}$$

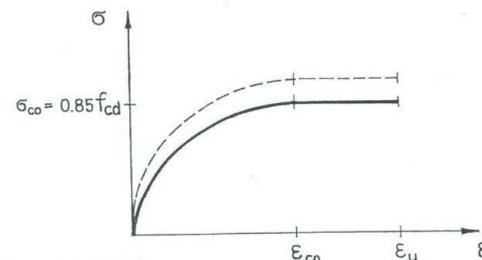
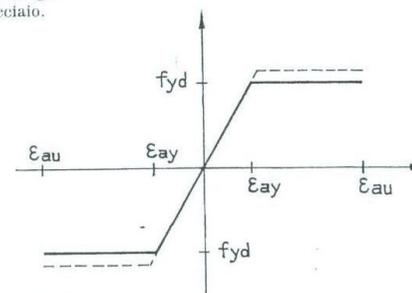


Fig. 5.13 e - Legami costitutivi di calcolo per il conglomerato e per l'acciaio.



e la curvatura adimensionalizzata:

$$\chi = \left( \frac{1}{R} \right) / h$$

In fig. 5.13 f è rappresentato il diagramma  $\mu$ - $\chi$  per il definito valore di:

$$\nu = \frac{N_d}{N_0} = 0,303$$

Nella stessa figura è tracciata la retta  $\mu_2$ - $\chi$ , in cui  $\mu_2$  momento del II ordine adimensionalizzato. Essendo:

$$M_2 = N \left( \frac{l_0}{\pi} \right)^2 \cdot \frac{1}{R}$$

$$\mu_2 \cdot M_0 = \nu N_0 \cdot \left( \frac{l_0}{\pi} \right)^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{h}{h}$$

$$\mu_2 = \nu \cdot \frac{1}{h} \left( \frac{l_0}{\pi} \right)^2 \cdot \chi$$

Risulta dal grafico che il massimo momento del I ordine disponibile si ha per una curvatura:

$$\chi = 0,00358$$

e vale

$$\mu_1 = 0,154$$

Rimane quindi soddisfatta la verifica:

$$M_1(\text{disp}) = 0,154 \times 148 = 22,8 \text{ tm} > M_r = 19,12 \text{ tm}$$

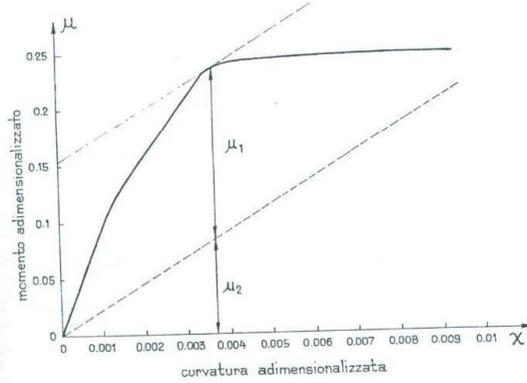


Fig. 5.13 f - Diagramma adimensionale momento-curvatura.

$P_{in}$	$\epsilon_r (\times 10^3)$	$\epsilon_a (\times 10^3)$	$\left(\frac{1}{R}\right)_{int} (\times 10^3)$	$\mu$	$\mu_{disp}$
1	0,000	-0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,828	-0,256	1,170	0,109	0,082
3	0,911	-0,361	1,380	0,122	0,090
4	1,006	-0,486	1,610	0,135	0,098
5	1,115	-0,635	1,890	0,151	0,107
6	1,242	-0,811	2,220	0,168	0,117
7	1,389	-1,018	2,600	0,188	0,128
8	1,563	-1,261	3,050	0,210	0,140
9	1,769	-1,542	3,580	0,236	0,154
10	1,942	-1,942	4,200	0,242	0,145
11	2,163	-2,393	4,930	0,243	0,130
12	2,422	-2,922	5,780	0,245	0,112
13	2,725	-3,543	6,780	0,246	0,090
14	3,082	-4,271	7,950	0,246	0,046
15	3,500	-5,125	9,330	0,247	0,033

5.2.1.5 PRESSIONE LOCALIZZATA

Nello studio della pressione semplice, si è supposto che le tensioni si distribuiscono uniformemente in tutte le sezioni (ipotesi di de Saint Venant).

Può accadere però che il carico nella sezione terminale del pilastro sia applicato sotto forma di carico concentrato, su una parte della sezione, come nel caso delle cerniere a lastra o di un brusco cambiamento nella sezione dei pilastri.

In tale caso la distribuzione delle tensioni trasversali, supponendo un dominio elastico ha l'andamento della fig. 5.14 a, in cui sono mostrate anche le lesioni per effetto cuneo del carico, come rilevato dalle esperienze.

Data la difficoltà di eseguire un calcolo esatto, il dimensionamento delle armature trasversali può farsi con il seguente procedimento approssimato (Mörsch-Lebelle).

Viene ipotizzato che la trasmissione di sforzo avvenga attraverso dei semiarchi fittizi su una altezza pari alla larghezza del pilastro come rappresentato in fig. 5.14 b).

Ricondotto il problema a piano si ha, per una profondità unitaria, per l'equilibrio alla rotazione rispetto al punto A:

$$\frac{N}{2} \cdot \frac{b-b'}{4} = \frac{p \cdot b^2}{2}$$

da cui lo sforzo risultante che deve essere assorbito dalle armature di frettaggio risulta:

$$F_a = p \cdot b = \frac{N(b-b')}{4 \cdot b} \tag{5.16}$$

L'armatura di frettaggio, ripartita all'altezza  $b$ , conviene sia dimensionata ad un tasso di lavoro non superiore a  $\bar{\sigma}_a = 1600 \text{ kg/cm}^2$ .

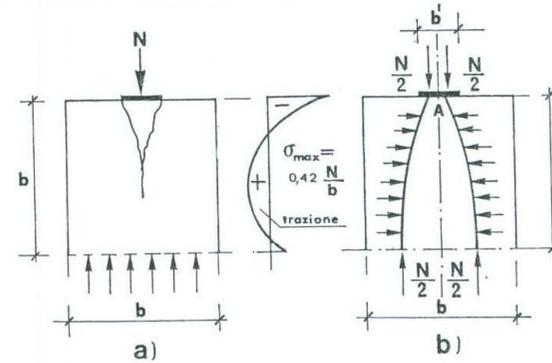


Fig. 5.14 - Pressione localizzata. Ipotesi di ripartizione dello sforzo.

## 5.2.2 Tiranti

I tiranti sono elementi strutturali ad asse rettilineo sollecitati prevalentemente a sforzo assiale di trazione.

Particolare attenzione va data alla verifica a fessurazione e all'ancoraggio delle armature, perchè lo sfilamento delle barre toglie qualsiasi capacità di resistenza; le norme italiane [2] proibiscono, per tale motivo, di eseguire la giunzione delle barre per sovrapposizione e richiedono l'impiego di saldature o manicotti filettati.

## 5.2.3 Travi

Si definiscono «travi» quegli elementi, ad asse generalmente orizzontale, caricati normalmente al proprio asse, in cui le sollecitazioni prevalenti sono flessione e taglio accompagnate, a volte, da torsione ed anche da sforzo normale, ma di entità piccola rispetto alle prime due.

L'asse di una trave può essere rettilineo (fig. 5.15 a), poligonale (fig. 5.15 b), o curvo (fig. 5.15 c).

La sezione trasversale di una trave può avere le forme più diverse (fig. 5.16) e rimanere costante o essere variabile lungo l'asse; si parla allora di trave a sezione costante o sezione variabile.

Si deve però osservare che una trave in c.a., anche se appare a sezione costante, dal punto di vista della resistenza è quasi sempre una trave a sezione variabile, perchè varia lungo l'asse, l'armatura ed inoltre la zona compressa di conglomerato cambia a seconda del segno del momento.

Poichè la resistenza di una trave è legata essenzialmente alla grandezza del

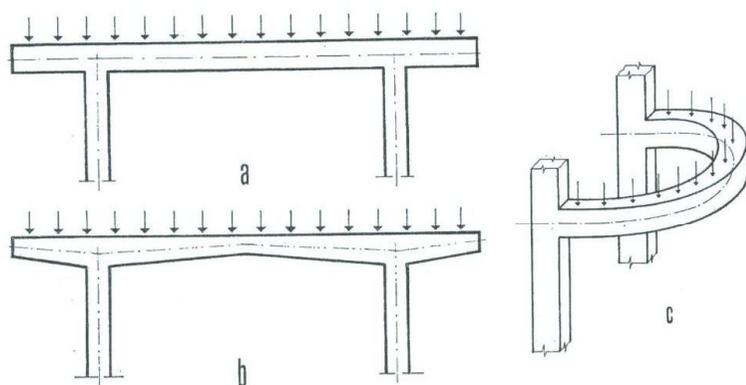


Fig. 5.15 - Travi: a) ad asse rettilineo; b) ad asse spezzato; c) ad asse curvo.

Poichè la resistenza di una trave è legata essenzialmente alla grandezza del proprio modulo di resistenza  $W = J/y$  nel piano di sollecitazione, le sezioni più convenienti sono quelle che, a parità di area, presentano un modulo maggiore, per cui, se non sussistono esigenze particolari, i profili più consueti sono quelli riportati nella fig. 5.16.

Si deve però tenere presente che, poichè la parte di conglomerato reagente è solo quella compressa, nei riguardi della resistenza alla flessione, le sezioni c, d, f, della fig. 5.16, sono equivalenti a sezioni a T, quando la zona compressa è quella superiore.

La forma più frequente di sezione è quella a T; infatti, normalmente, le travi costituiscono la struttura portante di altri elementi orizzontali quali solai misti in laterizio, solette o piastre anch'esse in c.a.

Nel primo caso, di solai in c.a. misto in laterizio, la piattabanda della sezione a T è rappresentata dalla zona piena in c.a. che si prevede nei solai all'attacco con le travi; nel secondo caso è la soletta piena che collabora con la nervatura.

Nel caso delle solette occorre definire la larghezza di piattabanda che collabora effettivamente alla resistenza a flessione della trave, vale a dire definire «la larghezza efficace della piattabanda compressa  $b_e$ » che può considerarsi sollecitata dallo stesso diagramma delle  $\sigma$  della nervatura. Tale larghezza  $b_e$  dipende dai seguenti parametri:

- 1) vincoli della trave considerata: trave appoggiata, continua con altre travi o pilastri, incastrata;
- 2) modi di applicazione dei carichi: carichi ripartiti o concentrati; per i carichi concentrati se applicati al lembo inferiore o superiore delle travi;

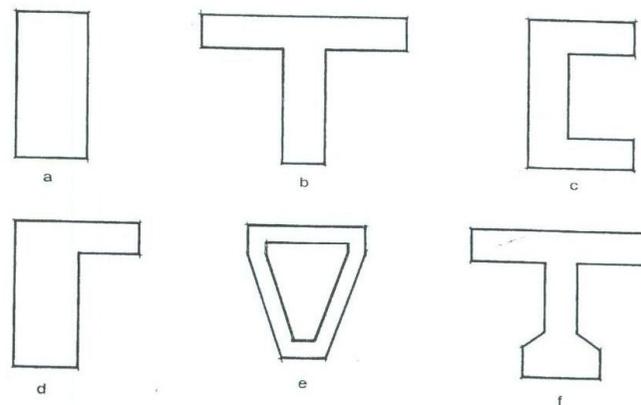


Fig. 5.16 - Tipi di sezioni trasversali di travi.

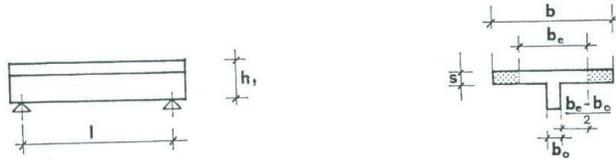


TABELLA 5.II.  
Valori di  $\alpha$ .

$\frac{s}{h}$	$\frac{l}{b}$	$\beta$											
		0	1	2	3	4	6	8	10	12	14	16	18
Piattabanda priva di rigidezza a flessione	0	0	0,18	0,36	0,52	0,64	0,73	0,85	0,92	0,95	0,97	0,98	
	10	0	0,18	0,36	0,53	0,65	0,78	0,87	0,92	0,95	0,98	0,99	1,00
	50	0	0,19	0,37	0,54	0,66	0,79	0,87	0,92	0,95	0,98	0,99	1,00
	100	0	0,21	0,40	0,56	0,67	0,80	0,87	0,92	0,96	0,98	0,99	1,00
	200	0	0,27	0,47	0,62	0,71	0,81	0,88	0,93	0,96	0,98	0,99	1,00
0,10	10	0	0,19	0,37	0,53	0,66	0,79	0,87	0,92	0,95	0,98	0,99	1,00
	50	0	0,22	0,42	0,58	0,69	0,81	0,88	0,92	0,96	0,98	0,99	1,00
	100	0	0,30	0,51	0,66	0,74	0,83	0,89	0,93	0,96	0,98	0,99	1,00
	150	0	0,36	0,60	0,73	0,80	0,86	0,91	0,94	0,96	0,98	0,99	1,00
	200	0	0,40	0,65	0,79	0,85	0,89	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	1,00
0,15	10	0	0,21	0,40	0,57	0,68	0,81	0,87	0,92	0,96	0,98	0,99	1,00
	50	0	0,30	0,52	0,69	0,78	0,86	0,90	0,94	0,96	0,98	0,99	1,00
	100	0	0,40	0,65	0,79	0,86	0,89	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	1,00
	150	0	0,44	0,70	0,85	0,91	0,94	0,95	0,97	0,97	0,98	0,99	1,00
	200	0	0,45	0,73	0,89	0,93	0,96	0,96	0,97	0,98	0,99	1,00	1,00
0,20	10	0	0,28	0,48	0,63	0,72	0,81	0,87	0,92	0,96	0,98	0,99	1,00
	50	0	0,42	0,65	0,83	0,87	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98	0,99	1,00
	100	0	0,45	0,73	0,90	0,92	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1,00
	150	0	0,46	0,75	0,91	0,93	0,95	0,97	0,97	0,98	0,99	1,00	1,00
	200	0	0,46	0,77	0,92	0,94	0,96	0,97	0,98	0,99	0,99	1,00	1,00



TABELLA 5.III.  
Valori di  $\alpha$ .

$\frac{s}{h}$	$\frac{l}{b}$	$\beta$							
		0	1	2	3	4	6	8	10
Piattabanda priva di rigi- dezza a fless.	0	0	0,19	0,38	0,57	0,71	0,88	0,96	
	10	0	0,19	0,38	0,57	0,72	0,89	0,96	1,00
	50	0	0,19	0,39	0,58	0,73	0,89	0,96	1,00
	100	0	0,21	0,42	0,60	0,75	0,89	0,96	1,00
	150	0	0,24	0,45	0,62	0,75	0,90	0,96	1,00
0,10	200	0	0,27	0,48	0,64	0,77	0,90	0,96	1,00
	10	0	0,19	0,39	0,58	0,72	0,89	0,97	1,00
	50	0	0,23	0,44	0,62	0,74	0,90	0,97	1,00
	100	0	0,31	0,53	0,68	0,78	0,91	0,97	1,00
	150	0	0,37	0,61	0,74	0,83	0,92	0,97	1,00
0,15	200	0	0,41	0,66	0,80	0,87	0,93	0,98	1,00
	10	0	0,21	0,42	0,61	0,74	0,90	0,97	1,00
	50	0	0,30	0,54	0,71	0,82	0,92	0,97	1,00
	100	0	0,41	0,66	0,80	0,87	0,94	0,98	1,00
	150	0	0,44	0,71	0,86	0,91	0,96	0,98	1,00
0,20	200	0	0,45	0,74	0,89	0,93	0,97	0,99	1,00
	10	0	0,28	0,50	0,65	0,77	0,91	0,97	1,00
	50	0	0,42	0,69	0,83	0,88	0,93	0,97	1,00
	100	0	0,45	0,74	0,90	0,94	0,96	0,98	1,00
	150	0	0,46	0,76	0,92	0,95	0,97	0,99	1,00
0,30	200	0	0,47	0,77	0,92	0,96	0,98	0,99	1,00

- 3) rapporto tra la luce della trave, intesa come distanza dei punti di momento nullo, la larghezza delle nervature e interasse tra nervature consecutive;
- 4) rapporto dello spessore della soletta rispetto all'altezza della trave;
- 5) presenza di eventuali mensole di raccordo tra nervature e soletta.

Lo studio dell'influenza dei diversi parametri è piuttosto complesso. Le norme italiane [1] suggerivano di assumere semplicemente (fig. 5.17):

$$b_e = b_0 + 10 \cdot s + 6 h_m < i \quad (5.17 a)$$

e

$$b_e = b_0 + 5 \cdot s + 3 h_m < i/2 \quad (5.17 b)$$

per le nervature di bordo.

Le nuove norme [2] impongono il maggiore dei due valori:

$$b_e = b_0 + 10 \cdot s + 2 b_m < i \quad (5.17 c)$$

$$b_e = 0,20 l \quad (5.17 d)$$

e

$$b_e = b_0 + 5 \cdot s + b_m < i/2 \quad (5.17 e)$$

$$b_e = 0,10 l < i/2 \quad (5.17 f)$$

per le nervature di bordo.

Nelle formule precedenti  $l$  è la luce della nervatura ed  $i$  l'interasse. Le norme [10] indicano un modo più rigoroso per stabilire la larghezza  $b_e$ , che cerca di tenere conto dei fattori sopraelencati.

La larghezza  $b_e$  per carichi ripartiti (rettangolari, triangolari ecc.), nel caso di un'unica nervatura, o di una successione di nervature parallele, si ricava, dalle tabelle 5.II e 5.III, che danno in funzione dei diversi parametri geometrici della sezione, la larghezza di piattabanda  $\frac{b_e \cdot b_0}{2}$  da prendere in conto da una parte e dall'altra della nervatura, in cui:

$l$  = distanza tra i punti di momento nullo (nel caso di trave appoggiata è la distanza tra gli appoggi):

$$\alpha = \frac{b_e - b_0}{b - b_0}$$

$$\beta = \frac{2 \cdot l}{b - b_0}$$

Calcolati i coefficienti  $\frac{s}{h}$ ,  $\frac{l}{b_0}$  e  $\beta$  dalle tabelle si ha il valore di  $\alpha$  e quindi:

$$b_e = b_0 + \alpha (b - b_0)$$

Nel caso di più nervature  $b$  il loro interasse.

Per carichi concentrati, applicati su una zona di larghezza  $a$ , i valori indicati nelle tabelle 5.II e 5.III vanno moltiplicati per il coefficiente di riduzione  $\gamma$  riportato nella tabella 5.IV.

TABELLA 5.IV - Valori di  $\gamma$ .

a	$\frac{2l}{b - b_0}$		
	0	10	20
$a \approx 0$	0,6	0,7	0,9
$0 < a < \frac{1}{10}$	I valori di $\gamma$ si ottengono per interpolazione lineare tra quelli superiori ed inferiori.		
$a \geq \frac{1}{10}$	1,0	1,0	1,0

Dai detti limiti deriva che nelle vicinanze di un appoggio, la larghezza  $\frac{b_e \cdot b_0}{2}$ , da prendere in conto da una parte e dall'altra della nervatura, non dovrà superare la distanza tra l'appoggio e la sezione considerata.

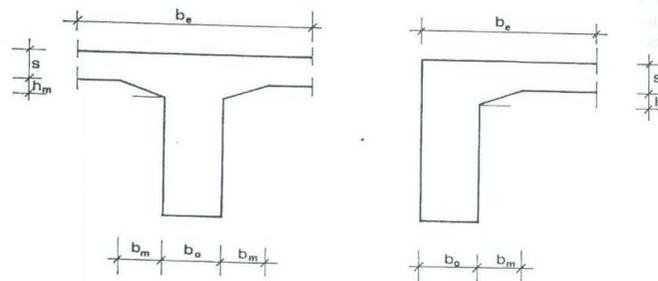


Fig. 5.17 - Sezione a T.

Nel caso che la nervatura sia raccordata alla piattabanda mediante mensole (fig. 5.17), la larghezza  $b_0$  della nervatura dovrà essere sostituita nel calcolo di  $b_e$  con una larghezza fittizia  $b_1$  uguale a:

$$b_1 = b_0 + 2 b_m \quad \text{per} \quad b_m < h_m$$

$$b_1 = b_0 + 2 h_m \quad \text{per} \quad b_m > h_m$$

Va rilevato che la collaborazione della soletta con la nervatura è massima nella sezione d'attacco e va riducendosi mano a mano che ci si allontana, come è indicato nella fig. 5.18, ove è rappresentato l'andamento della tensione  $\sigma_x$  della soletta.

La larghezza di compartecipazione indicata dalle norme rappresenta appunto un tratto equivalente, in cui la pressione possa ipotizzarsi costante, definito dalla uguaglianza:

$$b_e \cdot \sigma_{\max} = \int_0^{i/2} \sigma_x \cdot dy$$

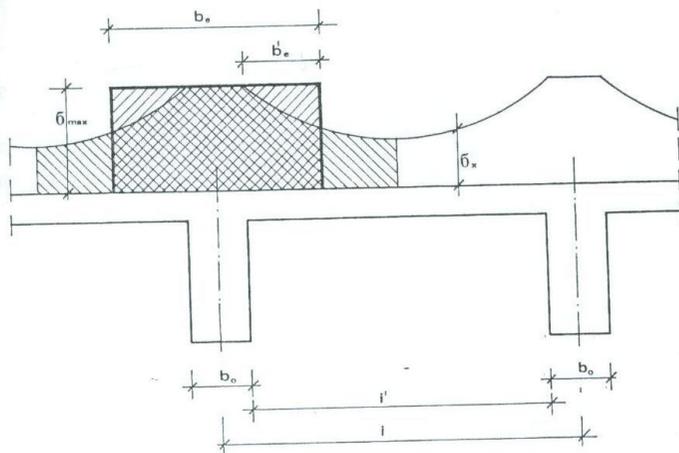


Fig. 5.18 - Andamento delle tensioni  $\sigma_x$  nella soletta di una trave a T.

### 5.2.3.1 TRAVI MISTE

Si definiscono travi miste quelle formate da due o più elementi ad asse dritto o curvo, costruiti separatamente, od in tempi successivi, e collegati quindi fra loro lungo superfici longitudinali, ossia in parallelo.

All'atto del collegamento uno, o tutti gli elementi componenti, possono avere degli stati di tensione interna; ai quali nella trave mista si sovrappone lo stato di tensione provocato dalle ulteriori sollecitazioni che agiscono sull'intera sezione.

Lo stato tensionale iniziale si evolve però nel tempo a causa dei fenomeni lenti del conglomerato (scorrimento viscoso e ritiro) ed in funzione delle modalità costruttive.

L'effetto del diverso valore del ritiro e delle diverse caratteristiche reologiche degli elementi componenti sulla ridistribuzione delle tensioni è problema notevolmente complesso dipendendo da molteplici parametri:

- 1) dimensioni geometriche degli elementi;
- 2) sollecitazioni esterne;
- 3) intervalli di tempo fra le varie fasi di costruzione;
- 4) fattori che influenzano le caratteristiche di viscosità e di ritiro del conglomerato.

Esistono approfonditi studi sull'argomento [36]; in questo paragrafo si espongono dei procedimenti semplificati per la valutazione dello stato di tensione, nel caso di trave mista costituita da una nervatura già stagionata ed autoportante ed una soletta gettata in opera, soluzione questa frequentemente adottata nella costruzione dei ponti.

#### 5.2.3.1.1 Effetto del ritiro differenziale della soletta.

Se la soletta viene gettata dopo che la nervatura ha già un buon periodo di stagionatura, accade che, mentre la nervatura ha già subito una parte del ritiro, la soletta deve ancora subirlo per intero.

Nasce così uno stato di coazione per effetto del ritiro differenziale tra soletta e nervatura:

$$\epsilon_{rd} = \epsilon_{r\infty}^s - (\epsilon_{r\infty}^n - \epsilon_{rt}^n) \quad (5.18)$$

in cui:

$\epsilon_{r\infty}^s$  = totale ritiro della soletta;

$\epsilon_{r\infty}^n$  ed  $\epsilon_{rt}^n$  = ritiro della nervatura a tempo  $\infty$  ed al tempo  $t$  di getto della soletta.

Se si suppone che i conglomerati della soletta e della nervatura abbiano uguali caratteristiche si può scrivere semplicemente:

$$\epsilon_{rd} = \epsilon_{rt} \quad (5.19)$$

Con riferimento alla fig. 5.19 se la soletta fosse libera di deformarsi, essa si accorcerebbe, rispetto alla nervatura, di  $\epsilon_{rd}$ ; per il collegamento con la nervatura tale accorciamento è ostacolato; nascono pertanto delle azioni mutue sotto forma di una forza  $F$  ed un momento  $M$ .

Per l'equilibrio:

$$F_s + F_n = 0 \quad F_n = -F_s = F \quad (5.20 a)$$

$$M_s + M_n - F_s \cdot \delta = 0 \quad M_s + M_n + F \cdot \delta = 0 \quad (5.20 b)$$

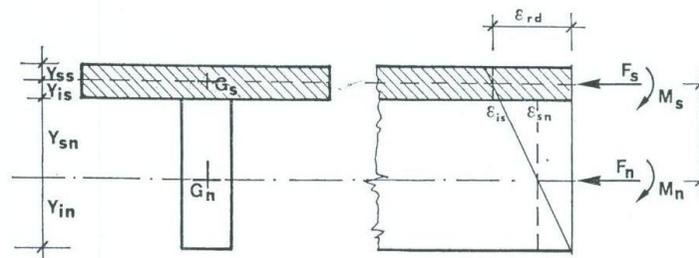


Fig. 5.19 - Sezione mista.

in cui:

$$\delta = y_{is} + y_{sn}$$

è la distanza tra il baricentro della nervatura e quello della soletta.

Per la congruenza:

$$\varepsilon_{rd} + \varepsilon_{is} = \varepsilon_{sn} \quad (5.21)$$

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_n} \quad (5.22)$$

in cui:

$$\varepsilon_{is} = -\frac{F}{A_s \cdot E_s} + \frac{M_s}{J_s \cdot E_s} \cdot y_{is} \quad (5.23 a)$$

è la deformazione unitaria della fibra inferiore della soletta;

$$\varepsilon_{sn} = \frac{F}{A_n \cdot E_n} - \frac{M_n}{J_n \cdot E_n} \cdot y_{sn} \quad (5.23 b)$$

è la deformazione unitaria della fibra superiore della nervatura;

$$\frac{1}{R_s} = \frac{M_s}{E_s \cdot J_s}$$

è la curvatura della soletta;

$$\frac{1}{R_n} = \frac{M_n}{E_n \cdot J_n}$$

è la curvatura della nervatura.

Dalla (5.22) si ha:

$$M_s = \frac{E_s \cdot J_s}{E_n \cdot J_n} M_n = K \cdot M_n$$

avendo posto:

$$K = \frac{E_s \cdot J_s}{E_n \cdot J_n} \quad (5.24)$$

e quindi dalla (5.20 b):

$$M_n = -\frac{F \cdot \delta}{1 + K} \quad (5.25 a)$$

$$M_s = -\frac{K}{1 + K} F \cdot \delta \quad (5.25 b)$$

Le (5.23) diventano pertanto:

$$\varepsilon_{is} = -F \left( \frac{1}{A_s \cdot E_s} + \frac{K}{1 + K} \cdot \frac{\delta}{J_s \cdot E_s} \cdot y_{is} \right)$$

$$\varepsilon_{sn} = F \left( \frac{1}{A_n \cdot E_n} + \frac{1}{(1 + K)} \cdot \frac{\delta}{J_n \cdot E_n} \cdot y_{sn} \right)$$

Sostituendo nella (5.21) viene:

$$\varepsilon_{rd} = F \left[ \frac{1}{A_s \cdot E_s} + \frac{1}{A_n \cdot E_n} + \frac{y_{is}^2 + y_{is} \cdot y_{sn}}{(1 + K) \cdot J_n \cdot E_n} + \frac{y_{sn}^2 + y_{is} \cdot y_{sn}}{(1 + K) \cdot J_n \cdot E_n} \right]$$

da cui posto:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{A_s \cdot E_s} + \frac{1}{A_n \cdot E_n} + \frac{\delta^2}{(1 + K) \cdot J_n \cdot E_n} \quad (5.26)$$

si ricava:

$$F = \alpha \cdot \varepsilon_{rd} \quad (5.27)$$

In genere si assume un uguale modulo a tempo infinito, sia per la soletta che per la nervatura, e si trascura la rigidità della soletta rispetto a quella della nervatura perché piccola.

In tale caso può porsi:

$$K = 0 \\ E_s = E_n = E$$

Si ha di conseguenza:

$$M_n = -F \cdot \delta \\ M_s = 0$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{E} \left( \frac{1}{A_s} + \frac{1}{A_n} + \frac{\delta^2}{J_n} \right) \quad (5.28)$$

$$F = \frac{E \cdot \varepsilon}{\frac{1}{A_s} + \frac{1}{A_n} + \frac{\delta^2}{J_n}} \quad (5.29)$$

È il caso di rilevare infine che, tutto quanto esposto, è valido per il controllo delle condizioni di esercizio mentre perde interesse per il calcolo dello stato ultimo per il quale le forti deformazioni a rottura annullano gli effetti dello stato di coazione.

#### 5.2.3.1.1.1 Esempio

Si vuole calcolare lo stato di coazione dovuto al ritiro della soletta, nella sezione mista della fig. 5.20.

La soletta e la nervatura sono di conglomerato di uguale caratteristiche.

Si assume:

$$\varepsilon_{r,\infty} = 0,0004$$

Il getto della soletta avviene dopo 28 giorni, e si reputa che il ritiro della nervatura

sia già avvenuto nella misura di  $\epsilon_r(28) = 0,00015$ , per cui:

$$\epsilon_{vt} = 0,00025$$

Il modulo elastico, per tenere conto dell'effetto della viscosità, si assume pari a:

$$E_r = 180\,000 \text{ kg/cm}^2$$

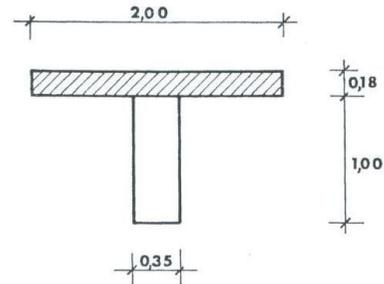


Fig. 5.20 - Esempio di sezione mista.

Essendo:  $A_s = 0,36 \text{ m}^2$   
 $J_s = 0,000972 \text{ m}^4$   
 $A_n = 0,35 \text{ m}^2$   
 $J_n = 0,02916 \text{ m}^4$   
 $\delta = 0,59$

si ha:  $K = 0,033$   
 $\alpha = 1,047 \cdot 10^{11}$   
 $F = 26\,170 \text{ kg}$   
 $M_n = -14\,947 \text{ kg} \cdot \text{m}$   
 $M_s = -493 \text{ kg} \cdot \text{m}$

Assumendo  $K = 0$  si sarebbe avuto:

$$F = 25\,608 \text{ kg}$$

$$M_n = -14\,626 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Lo stato di sollecitazione nella soletta ( $F_n = -F, M_n$ ) e nella nervatura ( $F_n = F, M_n$ ) si sovrappone a quello dei carichi esterni.

A titolo indicativo si calcolano le tensioni nella soletta e nella nervatura, considerando per ambedue la sezione reagente.

Soletta:

$$\sigma_{on} = 11,8 \text{ kg/cm}^2 \text{ (trazione)}$$

$$\sigma_{ni} = 2,7 \text{ kg/cm}^2 \text{ (trazione)}$$

Nervatura:

$$\sigma_{ns} = -33,1 \text{ kg/cm}^2 \text{ (compressione)}$$

$$\sigma_{ni} = 25,6 \text{ kg/cm}^2 \text{ (trazione)}$$

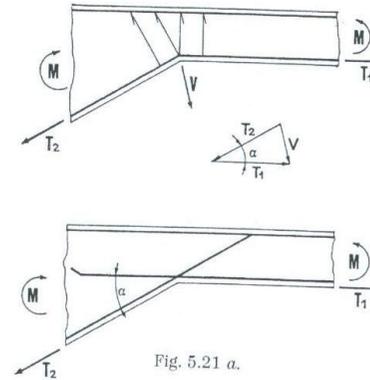


Fig. 5.21 a.

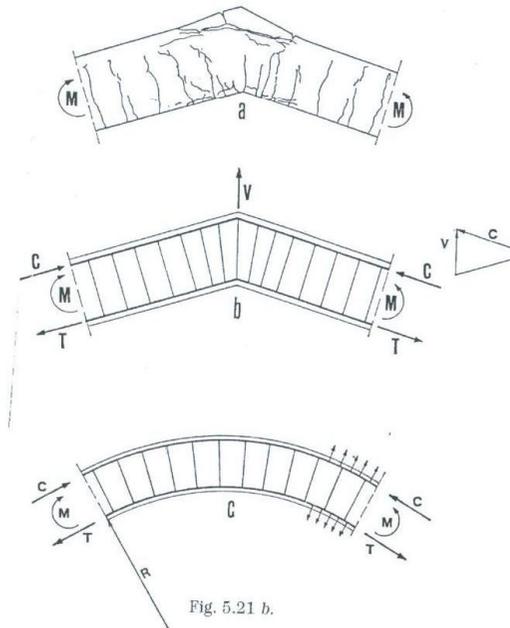


Fig. 5.21 b.

## 5.2.3.2 DISPOSIZIONE DELLE ARMATURE

Nei capitoli precedenti sono stati illustrati i metodi per il calcolo delle armature longitudinali e trasversali, necessarie ad assorbire rispettivamente le sollecitazioni flessionali e trasversali, e per la valutazione delle lunghezze di ancoraggio.

In questo paragrafo viene posta l'attenzione su alcune regole di «buona» disposizione e configurazione delle armature che non derivano direttamente dal calcolo, ma sono essenziali al buon funzionamento degli elementi strutturali.

## 5.2.3.2.1 Armature longitudinali

Le armature nei tratti curvi e nei punti angolosi producono una sensibile pressione sul conglomerato e quindi dal lato della concavità debbono trovare una massa di conglomerato capace di accoglierla; non è quindi sufficiente il copriferro minimo prescritto dalle norme per la protezione delle armature.

Nel caso rappresentato in fig. 5.21 a, la componente  $V = 2T \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ , occorre sia assorbita da opportune staffe, oppure fig. 5.21 b, è preferibile se possibile, incrociare le barre. Nel caso di fig. 5.21 b le staffe devono assorbire sia la componente  $V$ , degli sforzi di compressione, che quella degli sforzi di trazione ad evitare che si abbiano delle rotture premature come quelle mostrate in a); analogo è il caso c) in cui le staffe devono assorbire la trazione uniforme:

$$V = \frac{T}{R} = \frac{A_n \sigma_n}{R}$$

D'altro canto un punto angoloso può essere pericoloso anche se la barra esercita la pressione contro una sufficiente massa di conglomerato, perché, specie con le barre di grosso diametro, si possono avere delle pressioni così elevate da provocare lo schiacciamento del conglomerato; tale circostanza si verifica fre-

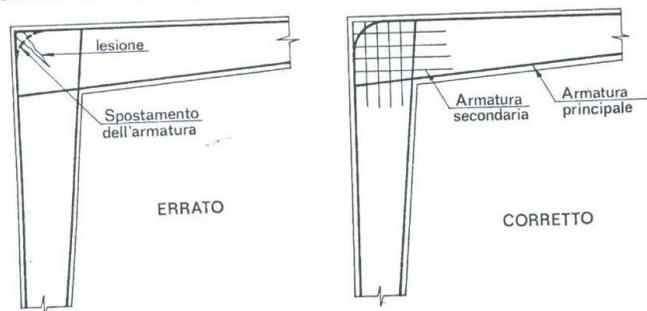


Fig. 5.21 c.

quentemente nei nodi dei telai (fig. 5.21 c), nei quali è necessario sagomare l'armatura con un sufficiente raggio di curvatura.

## 5.2.3.2.2 Staffe

Le staffe oltre ad assorbire gli sforzi di taglio e di torsione assolvono altre funzioni ugualmente importanti e principalmente quella di impedire l'instabilità delle armature longitudinali compresse, specie in vicinanza degli appoggi dove lo sforzo nel conglomerato è inclinato od in presenza di torsione, ed il distacco del corrente teso.

Per cui particolare importanza assume la loro configurazione, e sarebbe sempre da preferire la configurazione chiusa.

## 5.2.4 Archi

Gli archi sono elementi ad asse curvo che giace nel piano dei carichi. Pur potendo essere assimilati alle travi nei riguardi della loro funzione statica sono in effetti, per lo stato di sollecitazione più vicini ai pilastri, perché la sollecitazione prevalente è lo sforzo normale.

L'arco che nei secoli è stato la struttura più usata, nella nostra epoca è stato sostituito da altri tipi strutturali di più facile costruzione, per quanto oggi l'evolversi dei sistemi di costruzione a sbalzo lo ripropone come elemento di elevate capacità di resistenza.

## 5.3 Elementi strutturali bidimensionali

Per elementi bidimensionali (o superficiali) si intendono quegli elementi strutturali in cui la dimensione normale alla superficie media <sup>(1)</sup> è piccola rispetto alle altre due.

In relazione alla forma della superficie media si distinguono in strutture a:

a) *Superficie media piana.*

Elementi bidimensionali piani: lastre, piastre, solette.

b) *Superficie media a curvatura semplice.*

Lastre curve: volte cilindriche, coniche, serbatoi cilindrici, serbatoi a superficie conica, tubi, ecc.

c) *Superficie media a curvatura doppia.*

Lastre curve: cupole sferiche, ellissoidiche, a forma di iperboloidi di rivoluzione, conoidi, paraboloidi iperbolici, ecc.

## 5.3.1 Lastre piane. Travi pareti

Le lastre piane sono strutture bidimensionali piane sollecitate nel loro piano medio o in un piano parallelo; possono essere studiate nello stato non fessu-

(1) Definita come il luogo dei punti di mezzo degli spessori.

rato (*Stato I*) mediante la teoria dell'elasticità. Dopo la fessurazione se ne può valutare la resistenza mediante schemi di funzionamento a traliccio oppure ad arco.

Un caso particolare di lastra piana è la *trave parete*: assume tale nome la trave generalmente a sezione costante, in cui il rapporto (fig. 5.22 a), tra la luce e l'altezza è inferiore a 2, per la trave ad una sola campata, a 2,5 per quelle a più campate; si incontrano come pareti portanti nei silo e nei serbatoi o nei fabbricati come travi di fondazione.

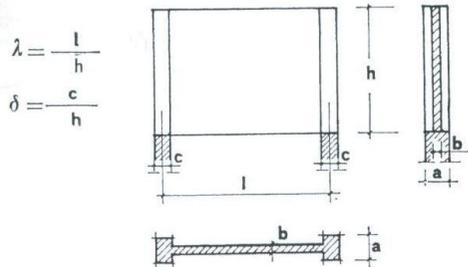


Fig. 5.22 a - Trave parete.

L'ipotesi di distribuzione lineare delle tensioni nella sezione trasversale (ipotesi di Navier), posta nei precedenti capitoli per il calcolo delle strutture monodimensionali, non è più sufficientemente approssimata e lo è tanto meno quanto più diminuisce il rapporto:

$$\lambda = \frac{l}{h} \tag{5.30}$$

che definisce la *snellezza* di una trave.

Come si può osservare nella fig. 5.22 b a partire da  $\lambda = 2$  la ripartizione delle tensioni si discosta sempre più da quella lineare. È pertanto necessario sviluppare i calcoli con diverse metodologie. Nel caso di materiali omogenei ed isotropi, quale può anche essere assimilato il cemento armato nello stadio non fessurato, la teoria elastica delle lastre [6], a mezzo dell'equazione differenziale:

$$\nabla \nabla F(x, y) = 0$$

in cui  $F(x, y)$  è la funzione degli sforzi di Airy, o mediante la tecnica degli elementi finiti, consente di valutare la distribuzione delle tensioni. Con la fotoelasticità è poi possibile controllare i risultati ottenuti analiticamente risolvendo quei casi in cui l'algoritmico matematico è eccessivamente complesso.

Questi strumenti di indagine statica perdono di efficacia quando l'elemento in cemento armato si fessura, né d'altra parte, possono semplicemente dimensionarsi le armature, in modo da assorbire gli sforzi di trazione nel conglomerato

calcolati nello stadio non fessurato, e disporli secondo l'andamento delle isostatiche di trazione in tale stadio. Ciò in quanto a fessurazione avvenuta cambia, e la ripartizione degli sforzi interni e l'andamento delle isostatiche. Per altro tale tecnica è spesso adottata e può essere accettata nei riguardi della sicurezza alla fessurazione.

Rimangono sempre a disposizione, come ausilio del calcolo, i risultati sperimentali.

5.3.1.1 ANALISI DELLO STATO NON FESSURATO

Tale stato può essere studiato analiticamente come per i materiali omogenei, trascurando la presenza dell'armatura ed i risultati possono venire utilizzati anche come guida allo stato fessurato.

Dalle esperienze si evince che la distribuzione delle tensioni dipende dalla snellezza  $\lambda$ , dalle dimensioni degli appoggi, dalle modalità di applicazione del carico, nonché dalla esistenza di irrigidimenti in corrispondenza degli appoggi, vi influisce quindi una serie di parametri che, invece, sono trascurabili nel comportamento delle travi snelle.

$\lambda$	$y_i$	$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_s$	$z$	$F$
4	0,5 h	12 q	0,67 h	0,75 q l
2	0,40 h	3 q	0,67 h	0,38 q l
1	0,28 h	0,75 q	0,62 h	0,20 q l
<1	0,28 l	—	$\approx 0,62 h$	0,20 q l

$\bar{\sigma}_x$  = tensioni nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane

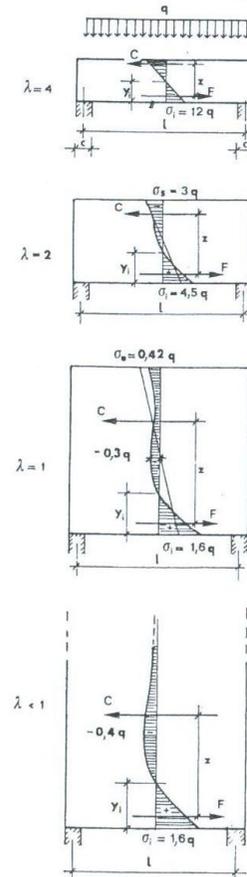


Fig. 5.22 b - Diagrammi delle tensioni  $\sigma_x$  in travi parete non fessurate per diversi valori di  $\lambda$ .

Dall'esame della fig. 5.22 b, in cui sono riportati gli andamenti delle  $\sigma_x$  per diversi valori di  $\lambda$ , si rileva che:

a) il diagramma delle  $\sigma_x$ , nella sezione di mezzo, si discosta notevolmente da quello lineare per  $\lambda < 2$ ;

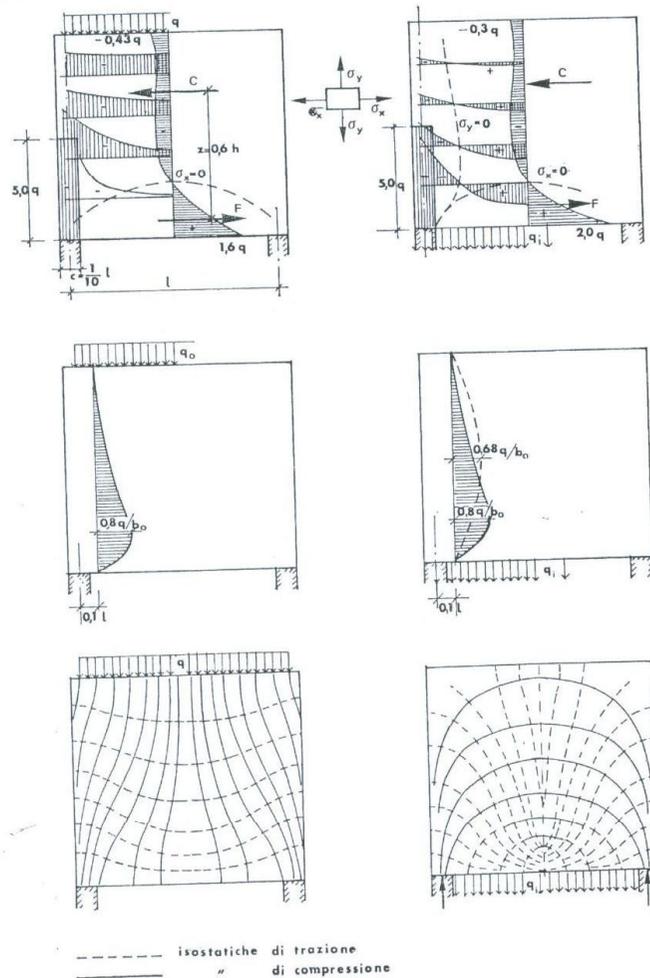


Fig. 5.23 - Andamento delle isostatiche e delle tensioni in travi parete, caricata in alto e in basso (da [48]).

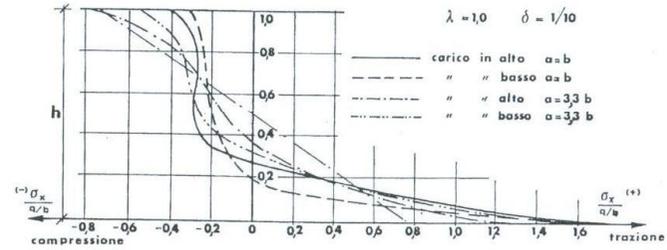


Fig. 5.24 - Diagrammi delle tensioni in mezzera per diverse condizioni di carico e dimensioni dell'appoggio (da [49]).

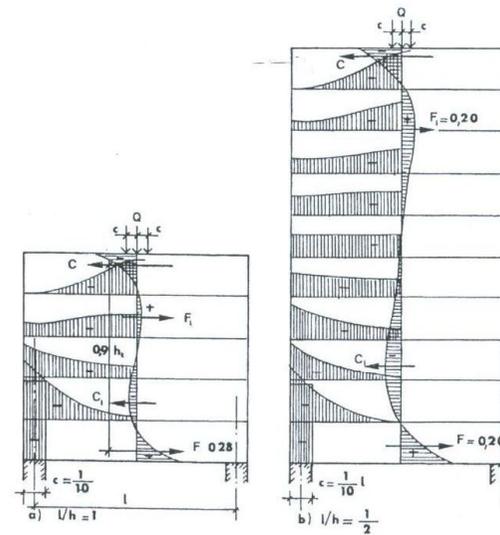


Fig. 5.25 - Diagrammi delle tensioni per carico concentrato (da [48]).

b) per pareti con  $\lambda < 1$ , l'andamento del diagramma nella parte tesa non è praticamente dissimile da quello delle pareti con  $\lambda = 1$ : il che vuol dire, che la parte superiore della parete non partecipa alla resistenza a flessione, ossia che per le travi parete con  $h > l$  può considerarsi resistente unicamente una trave fittizia di altezza pari ad  $l$ ;

c) nelle fibre inferiori tese, le tensioni, rispetto a quelle dedotte nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, sono 1,5-2 volte quelle rispettivamente per  $\lambda = 2$  e  $\lambda = 1$ ; al contrario le tensioni di compressione sono circa la metà;

d) il braccio delle forze interne, minore di quello per distribuzione lineare, conserva un valore quasi costante al variare di  $\lambda$ , ciò che cambia è la posizione di C ed F.

Le figg. 5.23 e 5.24 mettono in luce l'influenza della modalità di applicazione del carico: nella (5.23) si vede che, passando dal carico applicato in alto a quello in basso, cambiano di poco i diagrammi e i valori delle tensioni  $\tau_{xy}$  e  $\sigma_x$ , mentre cambia il segno di  $\sigma_y$ , di conseguenza è completamente diverso l'andamento delle isostatiche: le isostatiche di trazione, per il carico applicato in basso sono molto più inclinate, il che ha una notevole influenza sul panorama fessurativo e sulla migliore disposizione delle armature. La fig. 5.25 mostra che il carico concentrato, induce una distribuzione delle  $\sigma_x$  affatto diversa da quella per il carico ripartito ed in particolare nel tratto centrale della trave si ha una zona compressa e una tesa, a causa delle trazioni trasversali prodotte dalla diffusione del carico; tale tratto è tanto maggiore tanto più piccolo è  $\lambda$ .

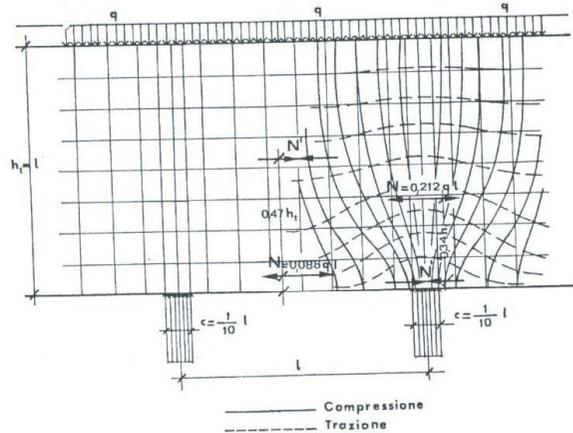


Fig. 5.26 - Andamento delle isostatiche in una trave continua (da [48]).

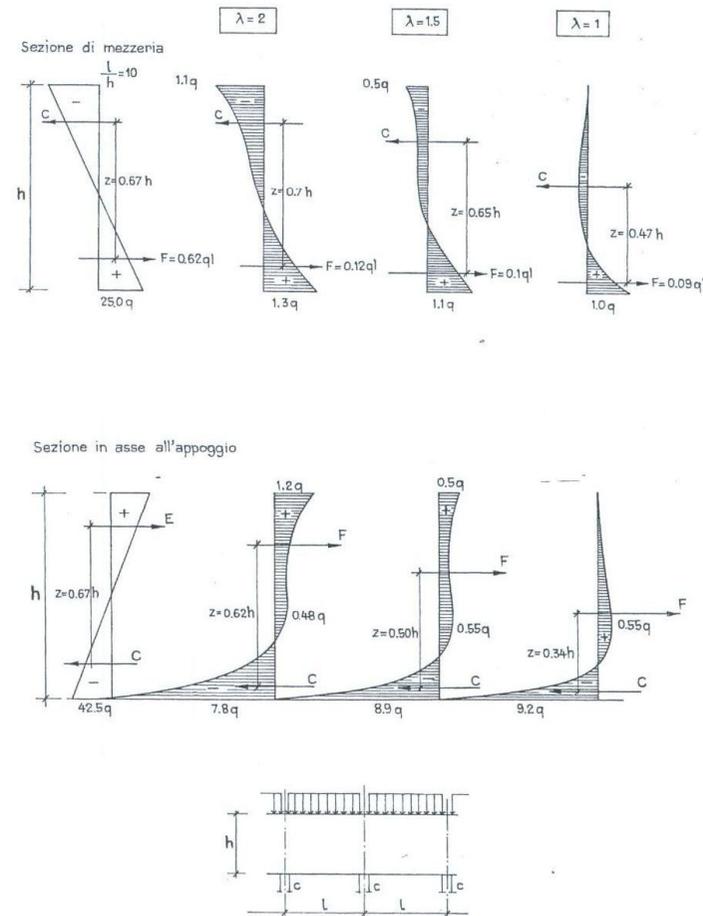


Fig. 5.27 - Diagrammi delle tensioni nella sezione di mezzzeria ed in quella in asse all'appoggio per diversi valori del coefficiente  $\lambda$  (da [48]).

Ulteriori differenze si notano nelle travi continue a più campate: se si esamina la fig. 5.26, in cui è riportato l'andamento delle isostatiche, e la 5.27 che contiene i diagrammi delle tensioni nella sezione di mezzo e in quella di appoggio di una trave continua caricata uniformemente al lembo superiore, appare che:

- nella sezione di mezzo l'andamento delle tensioni è simile a quello della trave ad una sola campata, mentre l'intensità risulta ridotta;
- il braccio delle forze interne diminuisce andando dalla sezione di mezzo a quella d'appoggio;
- nella sezione d'appoggio l'asse neutro è situato molto in basso e la tensione massima di compressione raggiunge valori elevati che sono quelli in definitiva che determinano lo spessore della trave.

In una zona molto estesa della parte alta della trave in corrispondenza degli appoggi si hanno delle trazioni dovute alla diffusione della reazione concentrata. L'intensità delle tensioni tangenziali raggiunge i valori di quelle di compressione.

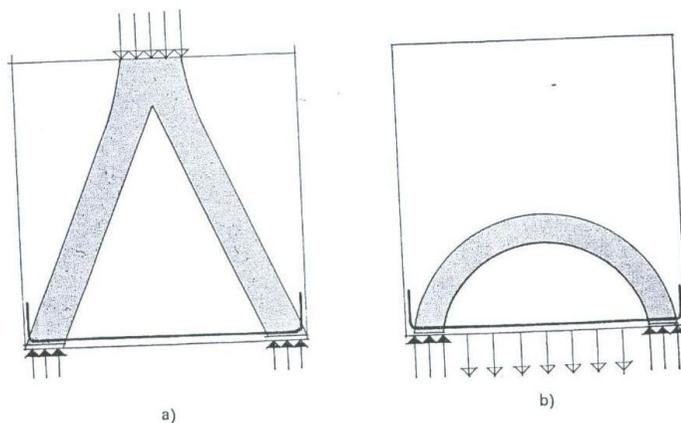


Fig. 5.28 - Schema di funzionamento a traliccio (a), ad arco (b).

### 5.3.1.2 ANALISI DELLO STATO FESSURATO

Come già detto sia la teoria delle lastre che la fotoelasticità poco si prestano ad analizzare lo stato fessurato. La via è quella dell'esame del comportamento di prototipi sperimentali e di strutture da cui possono ricavarsi utili indicazioni

che forniscono un orientamento per la progettazione:

a) la resistenza alle azioni taglianti aumenta fortemente al diminuire di  $\lambda$ , per effetto di un esaltarsi del funzionamento ad arco o a traliccio a seconda che il carico sia applicato superiormente od inferiormente (fig. 5.28). Ne consegue che l'armatura composta da barre piegate non ha alcuna giustificazione e quindi è del tutto inutile;

b) la migliore disposizione della armatura è quella che risponde al funzionamento a traliccio o ad arco del conglomerato (fig. 5.29 b) ossia formata da barre dritte orizzontali, bene ancorate, alle estremità in modo da assolvere la funzione di catena, associate a staffe verticali ed orizzontali che realizzano un graticcio atto ad assorbire gli sforzi principali di trazione.

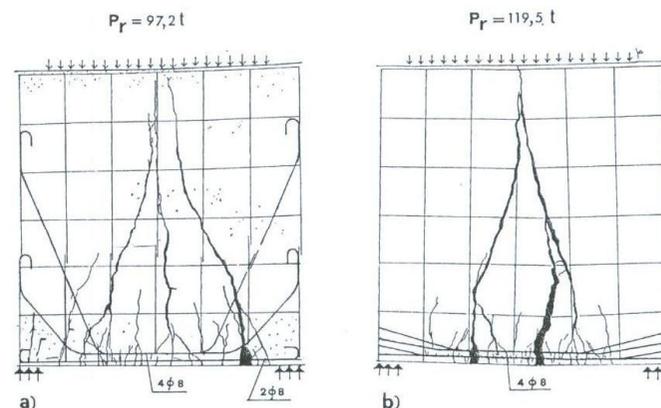


Fig. 5.29 - Rottura di travi parete per carico applicato al lembo superiore (da [48]).

Tale schema di armatura è ancora più necessario se il carico è applicato al lembo inferiore della trave, perché, come è mostrato, nella fig. 5.30 l'andamento delle fessure segue proprio la forma ad arco, in accordo con le traiettorie delle isostatiche di compressione. Le armature longitudinali assolvono la funzione di catena mentre le staffe verticali servono a riportare nel corpo della trave il carico applicato in basso.

### 5.3.1.3 DIMENSIONAMENTO E CALCOLO DELLE ARMATURE

Da quanto detto si vede come l'analisi dello stato fessurato non sia ancora giunta a conclusioni così generali da permettere di impostare un calcolo rigoroso delle travi-parete in c.a.

I metodi di calcolo in uso sono un giusto compromesso, tra i risultati delle esperienze e le indicazioni teoriche relativamente alla fase non fessurata; questa impostazione è quella seguita dal Codice Modello [3] alle quali verrà fatto essenzialmente riferimento nei paragrafi successivi.

Come per le travi snelle la sollecitazione dei carichi esterni in una sezione viene espressa mediante le componenti momento flettente, taglio, ecc.

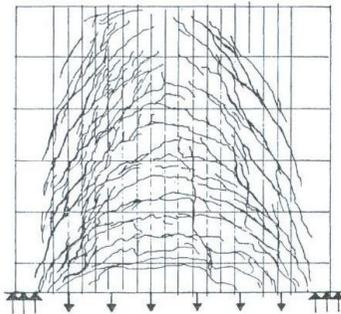


Fig. 5.30 - Rottura di trave parete per carico applicato al lembo inferiore (da [48]).

Questa convenzione rappresenta un comodo strumento di calcolo. Va però rilevato che per le travi continue, i valori delle sollecitazioni così calcolati, sono diversi da quelli reali: le ricerche fatte da Bay [49] su travi a due campate mostrano, ad esempio, che i momenti sull'appoggio centrale sono notevolmente più piccoli che in una trave snella, mentre sono più grandi in campata (fig. 5.31).

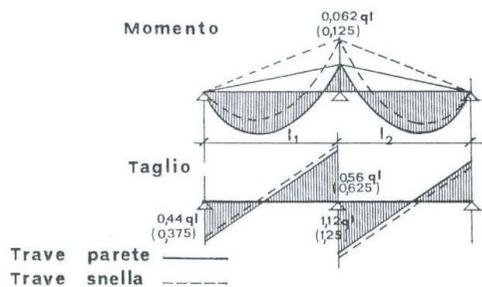


Fig. 5.31 - Diagrammi delle sollecitazioni per una trave parete ed una snella.

Questa differenza si spiega con la maggiore deformabilità della zona d'appoggio, per la ridotta altezza dell'area di conglomerato compresso, con elevati valori della compressione. Si ha come un effetto di cerniera plastica a produrre una ridistribuzione dei momenti con un abbassamento del valore sull'appoggio.

a) Armatura principale longitudinale.

a.1) Travi ad una sola campata.

Lo sforzo nell'armatura si calcola mediante la formula:

$$F_n = \frac{M_0}{z} \tag{5.31}$$

in cui  $z$  è il braccio delle forze interne che può assumersi

$$z = 0.2 \cdot (l + 2h) \quad \text{per } 1 < \lambda < 2 \tag{5.32 a}$$

$$z = 0.6 \cdot l \quad \text{per } \lambda < 1 \tag{5.32 b}$$

Come si vede nella fig. 5.32 per  $\lambda \rightarrow 2$ ,  $z$  tende ad assumere il valore delle travi snelle.

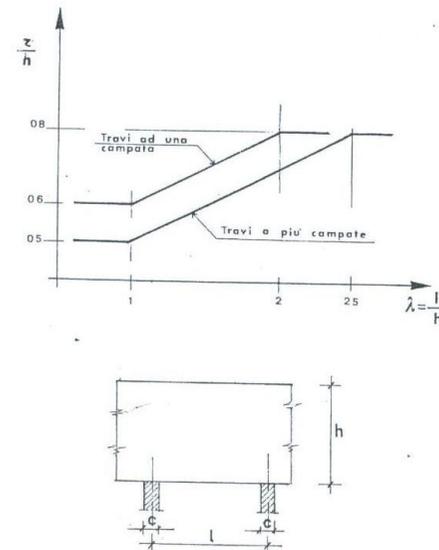


Fig. 5.32 - Variazioni del braccio delle forze interne al variare di  $\lambda$ .

Nello stato fessurato, come già visto, lo sforzo di trazione nella armatura tesa resta praticamente costante su tutta la luce; per tale motivo l'armatura dovrà essere prolungata senza interruzioni fino agli appoggi ed essere perfettamente ancorata, per resistere ad uno sforzo non inferiore a  $0,8 F$ .

Tale armatura va ripartita su una altezza compresa tra  $0,15-0,25 h$  (fig. 5.33) ed è importante che sia realizzata mediante barre di piccolo diametro, sia per limitare l'apertura delle lesioni, sia per facilitare la realizzazione degli ancoraggi sugli appoggi.

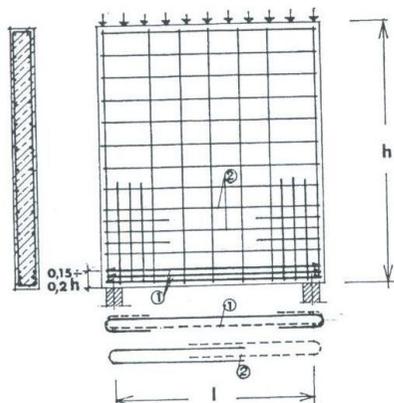


Fig. 5.33 - Disposizione delle armature in una trave parete ad una campata.

a.2) Travi a più campate.

Il dimensionamento viene fatto considerando il momento massimo  $M_m$  in mezzzeria e quello  $M_n$  sull'appoggio, calcolati con una trave snella di rigidezza  $EJ$  costante, ancora mediante la formula:

$$F_n = \frac{M}{z} \quad (5.33)$$

in cui:

$$z = 0,2 \cdot (l + 1,5 h) \quad \text{per } 1 \leq \lambda < 2,5 \quad (5.34 a)$$

$$z = 0,5 \cdot l \quad \text{per } \lambda < 1 \quad (5.34 b)$$

Per quanto riguarda la disposizione delle armature dovranno essere rispettate le seguenti regole:

- 1) l'armatura di campata dovrà essere prolungata fino all'appoggio con le stesse prescrizioni della trave ad una campata.

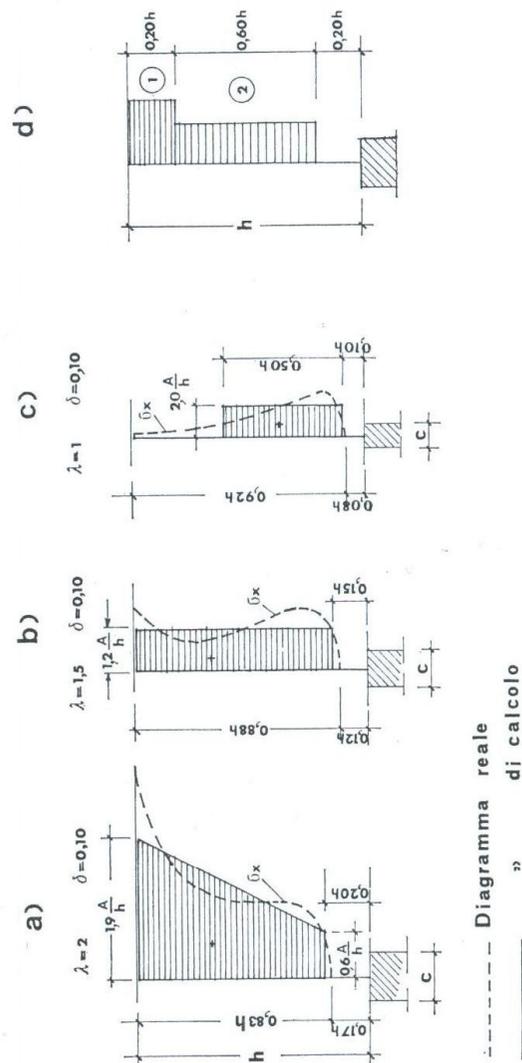


Fig. 5.34 - Diagrammi delle  $\sigma_x$  di trazione sull'appoggio di una trave continua.

2) la disposizione dell'armatura sugli appoggi andrebbe studiata in funzione della larghezza dell'appoggio in modo da assorbire i diversi diagrammi della  $\sigma_x$  di trazione (fig. 5.34). I diagrammi effettivi possono venire sostituiti con quelli di calcolo riportati nella fig. 5.34 d.

Il Codice Modello [3] suggerisce la ripartizione di fig. 5.34 d.

Zona superiore ①

$$A_1 = \frac{1}{2} (\lambda - 1) \cdot A_t \quad (5.35 a)$$

Zona intermedia ②

$$A_2 = A_t - A_1 = (1,5 - 0,5 \lambda) \cdot A_t \quad (5.35 b)$$

Per  $\lambda < 1$  si assume  $\lambda = 1$ ; per cui  $A_1 = 0$  e l'armatura va disposta nella zona intermedia ②.

Nella fig. 5.35 è dimostrata la disposizione delle armature in una trave parete continua.

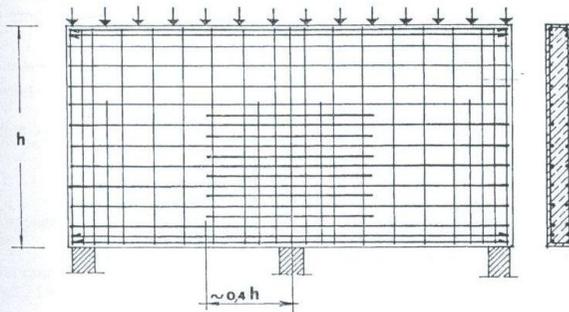


Fig. 5.35 - Armatura in una trave parete continua.

b) verifica del conglomerato compresso;

b.1) Tensioni di compressione dovute alla flessione.

Nelle travi-parete le tensioni di compressione  $\sigma_x$ , dovute alla flessione, difficilmente raggiungono valori elevati, per cui la loro verifica è sempre assicurata.

Può essere invece necessario verificare la instabilità della membratura compressa della trave.

Se vi è tale pericolo, è necessario aumentare lo spessore o irrigidire trasversalmente la membratura compressa a mezzo di una nervatura orizzontale.

Le norme francesi [5] per lo spessore  $b$  pongono le seguenti limitazioni:

$$\alpha < \frac{1}{52} = 0,0192 \quad b \geq \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\alpha}{100}} \quad (5.36 a)$$

$$\alpha > \frac{1}{52} = 0,0192 \quad b > \frac{3}{2} \alpha \cdot l \quad (5.36 b)$$

in cui

$$\alpha = \frac{P}{\bar{\sigma}_c \cdot h}$$

con

$$\bar{\sigma}_c \approx 0,3 \cdot f_{ct}$$

b.2) Tensioni principali in vicinanza degli appoggi.

Non è possibile esprimere le tensioni di taglio delle travi-parete mediante una formula semplice, in funzione del taglio esterno, come per le travi snelle; d'altro canto il tipo di rottura per taglio non è tale che si possa evitare mediante staffe o barre piegate come per le travi snelle. Allorché si hanno elevate tensioni di taglio, le tensioni principali sono molto inclinate e la verifica consiste nell'assicurare la stabilità delle bielle compresse di conglomerato, individuate dalle lesioni normali alle direzioni delle tensioni principali di trazione.

Il Codice Modello [3], per garantire la stabilità del conglomerato compresso, impone che il taglio ultimo di calcolo non superi il valore:

$$T_n = 0,10 \cdot b_0 \cdot h \cdot f_{ct} \quad (5.37)$$

Se  $\lambda \leq 1$ ,  $h$  va sostituito con  $l$ .

c) Armatura d'anima (trasversale).

c.1) Carico applicato sulla parte superiore della trave.

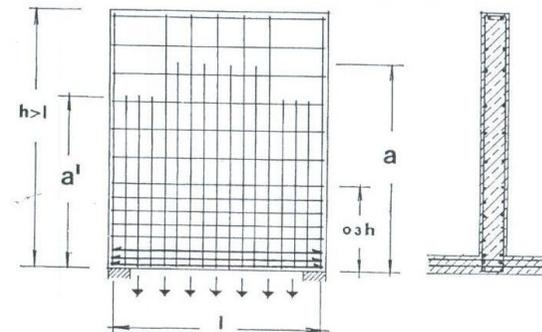


Fig. 5.36 a - Disposizione dell'armatura trasversale in una trave parete con carico applicato in basso.

È sufficiente disporre un graticcio di armature su ambedue le facce della parete; la sezione di una barra è data da:

$$A = 0,0025 b \cdot l \quad \text{per acciaio liscio}$$

$$A = 0,0020 b \cdot l \quad \text{per acciaio ad aderenza migliorata}$$

in cui  $l$  è l'interasse delle armature del graticcio.

c.2) Carico applicato nella parte inferiore della trave.

L'armatura dovrà essere calcolata per la totalità del carico applicato. Al fine di limitare il pericolo di fessurazione è conveniente dimensionare l'acciaio per una tensione non superiore a  $\bar{\sigma}_a = 2000 \text{ kg/cm}^2$ . Per assicurare un sufficiente ancoraggio l'armatura va prolungata nella trave parete per una altezza (fig. 5.36 a):

a) Zona centrale pari a  $0,7 l$ :

$$a = h \quad \text{se} \quad h < l$$

$$a = l \quad \text{se} \quad h > l$$

b) Zone laterali:

$$a' = 0,3 h \quad \text{se} \quad h < l$$

$$a' = 0,3 l \quad \text{se} \quad h > l$$

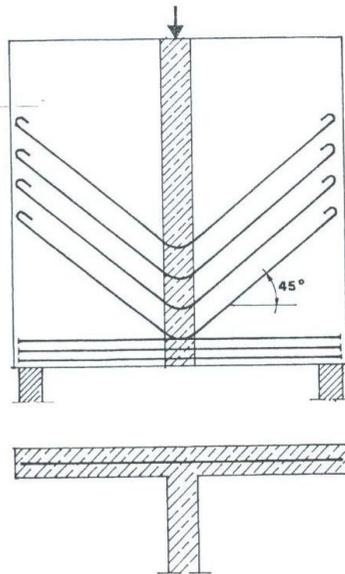


Fig. 5.36 b - Disposizione delle armature nel caso di carico indiretto.

c.3) Carico indiretto.

Il carico viene detto indiretto quando è applicato lungo una direttrice per tutta o parte dell'altezza della parete (fig. 5.36 b), in questo caso vanno previsti due tipi di armature:

1) se il carico trasmesso è piccolo possono utilizzarsi armature di sospensione verticali, calcolate per assorbire l'intero carico e disposte sulla trave portante per un'altezza pari a  $h$  o ad  $l$  se  $h > l$ ;

2) se il carico è forte l'armatura può essere costituita da barre piegate, inclinate di  $45^\circ$ , calcolate nell'ipotesi di traliccio composto da bielle orizzontali di conglomerato compresso e aste tese. Sotto tale ipotesi le barre vanno dimensionate per una forza:

$$F_n = \frac{T}{\sqrt{2}} \quad (5.38)$$

in cui  $T$  è la forza trasmessa dalla trave portata. In genere si utilizzano ambedue i tipi di armature affidando alle barre piegate il 60% dei carichi totali.

d) Dimensionamento della zona d'appoggio.

Se la trave-parete, non presenta delle nervature di irrigidimento in corrispondenza dell'appoggio, il Codice Modello [3], stabilisce che il valore massimo della reazione dell'appoggio deve essere limitato a:

$$N = 0,80 \cdot b \cdot (c + h_0) f_{cd} \quad (\text{appoggio terminale}) \quad (5.39 a)$$

$$N = 1,20 \cdot b \cdot (c + 2 h_0) f_{cd} \quad (\text{appoggi centrali}) \quad (5.39 b)$$

in cui (fig. 5.37)  $h_0$  è l'altezza di una eventuale nervatura inferiore o soletta.

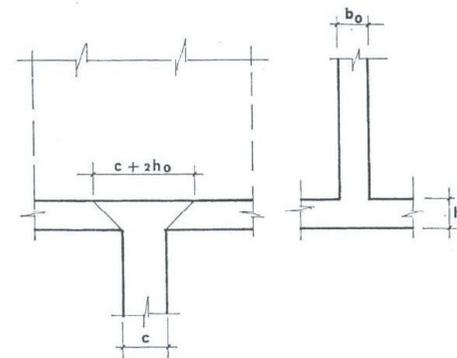


Fig. 5.37 - Larghezza di calcolo dell'appoggio di una trave parete.

Leonhardt [48] suggerisce di limitare la tensione di compressione ai valori:

$$\begin{aligned}\sigma_c &\leq 0,3 f_{cd} && \text{(appoggio terminale)} \\ \sigma_c &\leq 0,45 f_{cd} && \text{(appoggi centrali)}\end{aligned}$$

In tale zona è opportuno infittire il graticcio di staffe verticali ed orizzontali (fig. 5.35), per assorbire le elevate tensioni principali di trazione.

### 5.3.1.3.1 Esempio

Calcolare la parete portante di un silo.

L'interasse tra i pilastri è di 4,40 m, il carico sulla parete 60 t/m di cui 6 t/m applicate in basso.

L'altezza della parete è di 14 m, lo spessore di 20 cm.

Essendo:  $\lambda < 1$  si assume un'altezza utile  $h = l = 4,40$  m.

Le sollecitazioni calcolate nell'ipotesi di trave snella risultano:

$$M_m = \frac{1}{24} pl^2 = 48,4 \text{ t} \cdot \text{m}$$

$$M_n = \frac{1}{12} pl^2 = 96,8 \text{ t} \cdot \text{m}$$

$$T = p \frac{l}{2} = 132 \text{ t}$$

#### Armatura longitudinale

Essendo:

$$\lambda < 1 \quad z = 0,5 l = 2,20 \text{ m}$$

Si ha pertanto, assumendo un  $\bar{\sigma}_n = 2200 \text{ kg/cm}^2$ , in campata:

$$F_n = \frac{M}{z} = 22 \text{ t} \quad A = \frac{F}{\bar{\sigma}_n} = 10 \text{ cm}^2 = 5 \text{ } \varnothing 16$$

All'appoggio:

$$F_n = 44 \text{ t} \quad A = 20 \text{ cm}^2$$

Nella zona intermedia compresa tra 0,20  $l = 88$  cm e 0,8  $l = 3,52$  m si dispongono 2  $\varnothing 10/20$  pari a 28,6 cm<sup>2</sup>.

#### Armatura trasversale

Essendo applicato al bordo inferiore un carico di 6 t/m viene dimensionata per portare la totalità del carico, con  $\bar{\sigma}_n = 2000 \text{ kg/cm}^2$ ; l'armatura per metro di trave risulta:

$$A_t = \frac{6000}{2000} = 3 \text{ cm}^2/\text{m} \quad 3 \text{ st } \varnothing 8/\text{m}$$

#### Verifica del conglomerato

Ipotizzalo un conglomerato con  $f_{ct} = 300 \text{ kg/cm}^2$ , ed assunto un  $\gamma_c = 1,4$ , dalla (5.37) si ha:

$$T_n = 0,10 \cdot 20 \cdot 440 \cdot \frac{300}{1,4} = 188571 \text{ kg}$$

Risulta pertanto un coefficiente di sicurezza pari a:

$$\eta = 1,43$$

La verifica dello spessore eseguito con le norme [5] dà:

$$\alpha = \frac{60000 \cdot 10^{-2}}{100 \cdot 440} = 0,0136$$

$$b > 11,31 \text{ cm}$$

### 5.3.1.4 TRAVI PARETE A SBALZO

Quando la trave parete è a sbalzo (fig. 5.38) l'ipotesi di Navier perde di validità per  $\lambda' = \frac{a}{h} < 2$ , e per tali valori l'applicazione delle formule delle travi snelle cade in difetto.

Per  $\lambda' < 0,5$  la zona di parete al disopra di quella d'altezza  $2a$  non partecipa praticamente alla resistenza; di conseguenza l'altezza portante della mensola da considerarsi nei calcoli, va limitata ad  $h = 2a$ .

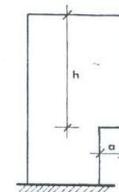


Fig. 5.38 - Schema di una trave parete a sbalzo.

Le ricerche sperimentali condotte da vari autori su mensole corte in c.a. [23], [50], conducono a considerare nello stato fessurato, come per la mensola corta (par. n. 5.4.1), un modello resistente costituito da un traliccio di bielle di conglomerato compresso ed aste tese di acciaio, derivato dalle traiettorie delle isostatiche calcolate nello stato non fessurato. Tali ricerche mostrano anche l'importanza di proseguire la totalità alle armature al di là dell'incastro e di ancorarle accuratamente.

#### 5.3.1.4.1 Dimensionamento e calcolo delle armature

Anche in questo caso viene fatto riferimento alle sollecitazioni calcolate come per le travi snelle.

a) Armatura principale longitudinale.

Lo sforzo nell'armatura viene calcolato mediante la formula:

$$F_a = \frac{M_i}{z} \quad (5.40)$$

in cui  $M_i$  è il momento all'incastro e  $z$ , si assume pari a:

$$z = 0,7 h \text{ per } \lambda > 0,5 \quad (5.41 a)$$

$$z = 1,4 h \text{ per } \lambda \leq 0,5 \quad (5.41 b)$$

L'armatura risultante:

$$A = \frac{F_a}{\bar{\sigma}_a}$$

va distribuita, in una zona, misurata dal bordo inferiore (fig. 5.39) compresa:

$$\text{per } \lambda = 1 \quad \text{tra } a - 0,8 a \quad (5.42 a)$$

$$\text{per } \lambda = 0,5 \quad \text{tra } 1,2 a - 0,8 a \quad (5.42 b)$$

b) Verifica del conglomerato.

Può essere fatta ancora mediante la (5.36).

c) Armatura d'anima.

c.1) Carico parte superiore.

È sufficiente disporre un graticcio di armature ortogonali. L'armatura orizzontale può essere dimensionata mediante le (5.40), quella verticale si assume pari ad almeno la metà di quella orizzontale.

c.2) Carico nella parte inferiore.

Va portato per intero da staffe verticali di sospensione efficacemente ancorate in alto.

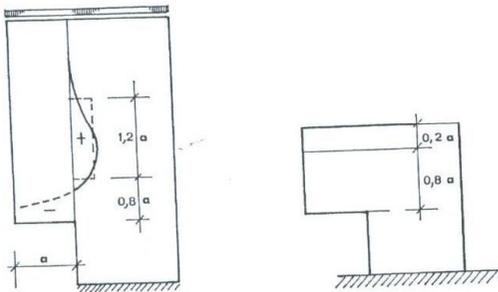


Fig. 5.39 - Zone di distribuzione delle travi parete a sbalzo.

Va posta particolare attenzione, specie nelle travi parete a sbalzo, alle modalità di getto. Infatti, spesso, il maggior peso è proprio quello della parete stessa, per cui, se la parete è gettata a strisce orizzontali, e i ponteggi non sono sufficientemente rigidi, può accadere che la prima striscia, di altezza minore a quella equivalente di calcolo, debba sopportare l'intero carico di progetto.

### 5.3.2 Piastre, solette, solai

Sono quegli elementi strutturali bidimensionali piani caricati normalmente al loro piano medio.

Quando i vincoli sono tali che la deformata elastica presenta due curvature ortogonali per qualsiasi condizione di carico si parla più propriamente di «piastre».

Lo studio del comportamento di tali strutture va condotto in maniera differente per i diversi stati limite.

Nello stadio non fessurato è applicabile la teoria dell'elasticità; al di là, l'intervento di fenomeni anelastici e la fessurazione provocano una redistribuzione degli sforzi che andrebbe studiato per mezzo della teoria non lineare. La teoria rigido-plastica (teoria delle linee di rottura [10], [46], [47]) permette invece di valutare la resistenza ultima delle piastre, nel caso di un aumento proporzionale dei carichi. Perché sia applicabile, è necessaria l'esistenza di un buon palier di duttilità dell'acciaio.

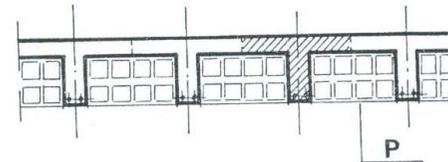


Fig. 5.40 - Sezione di un solaio in laterizi. P: elementi in laterizio.

Tranne che in casi particolari, in cui è richiesto un approfondito studio della sicurezza, calcolate le sollecitazioni unitarie con la teoria dell'elasticità, la sicurezza viene garantita con il metodo delle tensioni ammissibili (cap. 3) considerando delle sezioni rettangolari di larghezza unitaria su cui agiscono le sollecitazioni unitarie, senza tenere conto che lo stato di tensione è biassiale.

Il termine «soletta» si usa correntemente, quando i vincoli sono due, lineari e paralleli; in tal caso la deformata dell'elemento per carichi uniformi, tranne che in vicinanza dei bordi liberi, è cilindrica. Il calcolo delle sollecitazioni e la verifica delle sezioni per carichi uniformi viene fatto con riferimento ad una trave di larghezza unitaria, vincolata e caricata come la soletta.

Per tener conto che un eventuale carico non uniforme, ad esempio un carico

concentrato, provocherebbe sollecitazioni secondarie normali a quelle principali, le norme italiane [2] impongono che oltre all'armatura principale si disponga una armatura secondaria ortogonale pari almeno al 20% di quella principale.

I solai sono in genere delle solette alleggerite mediante la posa di elementi forati in laterizio (fig. 5.40). Anche se permesso dalle norme italiane [2] è prudente, tranne nei casi in cui si sia sicuri di una estrema accuratezza di esecuzione, considerare il laterizio solo con funzione di alleggerimento. La sezione resistente diventa allora quella costituita dal conglomerato e dalle armature. Importante, per una buona collaborazione delle nervature per carichi non uniformi, è lo spessore della soletta in rapporto all'interasse delle nervature: le norme italiane [2], stabiliscono i limiti:

spessore soletta:  $s \geq 4$  cm;  
interasse nervature:  $i \leq 15 s < 80$  cm.

Per avere un buon getto delle nervature e una giusta aderenza con le armature è anche necessario che lo spessore delle nervature non sia troppo sottile, le [2] impongono uno spessore non inferiore a  $0,125 i > 8$  cm.

### 5.3.2.1 PUNZONAMENTO

Il punzonamento è il fenomeno prodotto da una forza applicata su una piccola area, in una struttura bidimensionale piana. Esso provoca una rottura per taglio con traslazione, nella direzione della forza, di una porzione della struttura (fig. 5.41). Si verifica nelle piastre, solai, plinti di fondazione molto bassi. Le forze concentrate che producono il punzonamento possono essere sia forze applicate sia reazioni d'appoggio.

Trattandosi di una rottura per taglio le direzioni principali di trazione sono inclinate di  $45^\circ$  rispetto alla direzione della forza, per cui il meccanismo di rottura può essere schematizzato come in fig. 5.41. Dall'equilibrio alla traslazione,

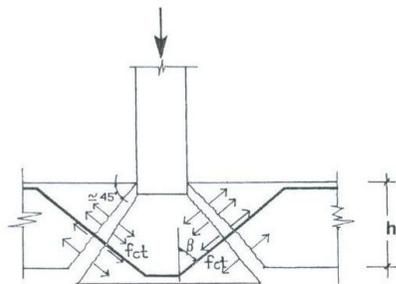


Fig. 5.41 - Punzonamento.

trascurando l'effetto dell'armatura, la forza limite di rottura vale:

$$P_u = f_{ct} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot S \quad (5.43)$$

dove:

$S$  = superficie di contorno dell'elemento che trasla; può calcolarsi mediante la formula (fig. 5.42):

$$S = \bar{p} \cdot d \quad (5.44)$$

in cui  $\bar{p}$  è il perimetro del contorno  $\bar{c}$  parallelo a quello  $c$ , che limita la superficie di applicazione della forza  $P$ , situato a  $d/2$  da tale superficie.

$d$  = altezza utile.

Il Codice Modello [3] controlla che lo sforzo di taglio resistente per unità di lunghezza  $V_{rd}$  sia sempre maggiore di quello agente  $V_{sd}$ , cioè

$$V_{sd} \leq V_{rd}$$

dove:

$$V_{sd} = \frac{V_{sd}}{u}$$

con:

$V_{sd}$  = sforzo di taglio agente lungo il perimetro  $u$ ;  
 $u$  = perimetro della sezione critica

e dove, qualora non siano presenti armature al punzonamento:

$$V_{rd1} = 1,6 \tau_{rd1} \times (1 + 50 \rho_l) d$$

$$\text{con: } \tau_{rd1} = 0,25 f_{ctd} = 0,074 f_{ck}^{2/3}$$

$$\alpha = 1,6 - d \leq 1,0 \text{ (con } d \text{ in metri)}$$

$$\rho_l = \sqrt{\rho_{lx} \rho_{ly}} \geq 0,008$$

$\rho_{lx}$  e  $\rho_{ly}$  calcolati per armature longitudinali parallele alle direzioni  $x$  e  $y$

$$d = 1/2 (d_x + d_y)$$

$d_x$  e  $d_y$  altezze utili sulle direzioni  $x$  e  $y$

mentre, nel caso contrario:

$$V_{rd2} = 1,6 V_{rd1}$$

Inoltre l'armatura al punzonamento viene calcolata, secondo il codice modello, per assorbire uno sforzo di taglio per unità di lunghezza, non minore di  $0,75 \cdot V_{sd} \cdot d$ .

Le formule precedenti si applicano anche quando la figura d'impronta ha un contorno con concavità; in tale caso si sostituisce il contorno reale con un perimetro minimo equivalente (fig. 5.43), che involupa quello reale.

Quando il carico concentrato agisce nelle vicinanze di un bordo libero, diminuisce il contorno resistente  $\bar{c}$ , di ciò se ne può tenere conto riducendo il perimetro  $\bar{p}$  alla metà (fig. 5.44 a) o ad un quarto (fig. 5.44 b) se i bordi liberi sono due.

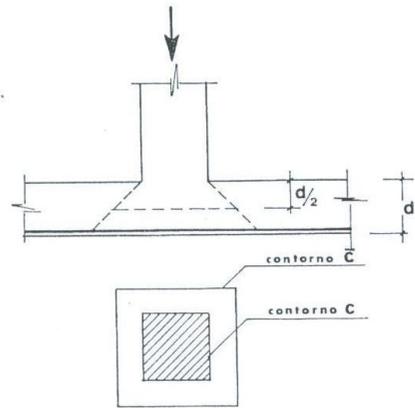


Fig. 5.42 - Definizione del contorno equivalente  $\bar{c}$ .



Fig. 5.43 - Contorno equivalente  $\bar{c}$ .

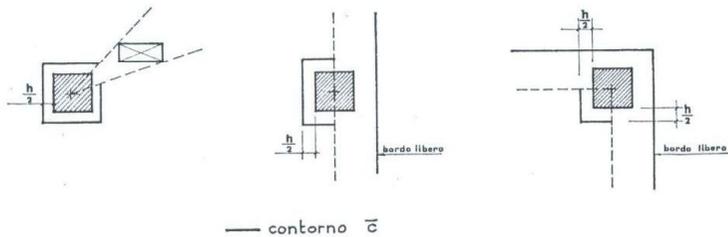


Fig. 5.44 - Contorno  $\bar{c}$  in prossimita di bordi liberi.

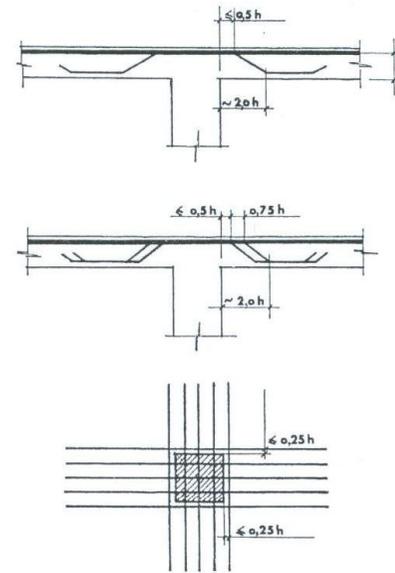


Fig. 5.45 - Disposizione delle armature di punzonamento realizzate con barre piegate.

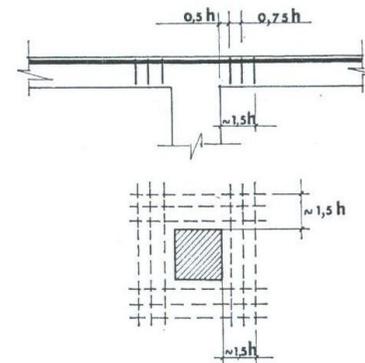


Fig. 5.46 - Disposizione delle armature di punzonamento realizzate con staffe.

## 5.3.2.1.1 Calcolo delle armature

Con riferimento alla fig. 5.41, superata la resistenza a trazione del conglomerato, per l'equilibrio si deve avere:

$$A_n \cdot T_n \cdot \cos \beta = P \quad (5.46)$$

in cui  $\beta$  è l'inclinazione dell'armatura rispetto alla linea di azione di  $P$ , ed  $A_n$  è l'area totale di armatura incontrata dalle lesioni.

Per:

$$\beta = 45^\circ \quad A_n = \frac{P}{\bar{\sigma}_n} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (5.47 a)$$

$$\beta = 0^\circ \quad A_n = \frac{P}{\bar{\gamma}_n} \quad (5.47 b)$$

È importante la disposizione di tali armature, delle quali nella figura 5.45 e 5.46 è indicata una schematizzazione.

## 5.4 Elementi strutturali tridimensionali

Per elementi tridimensionali (o massicci) si intendono quegli elementi che hanno le tre dimensioni principali paragonabili; possono essere studiati per mezzo della teoria elastica o di quella non lineare; la difficoltà di integrare le equazioni risolventi porta a cercare dei modelli di calcolo semplificati che permettano di valutare, con buona attendibilità, la sicurezza alla rottura.

## 5.4.1 Mensole corte

Le mensole corte sono elementi tridimensionali sollecitati da elevati carichi concentrati: si incontrano come mensole da carro-ponte, seggiole Gerber, elementi di fondazione.

Lo studio dello stato tensionale anche quando il problema è riducibile a piano, si presenta particolarmente complesso non potendosi applicare le formule delle travi snelle perché non è più valida né l'ipotesi di Navier, né il principio di de Saint-Venant essendo le zone di perturbazione delle tensioni, provocate dai carichi, troppo vicine ai vincoli; d'altro canto anche l'uso della teoria dell'elasticità è laborioso per la difficoltà di imporne le condizioni al contorno; peraltro notevoli prospettive si hanno dall'applicazione della tecnica degli elementi finiti tridimensionali.

Di grande utilità si sono rivelate le esperienze foto-elastiche su modelli per studiare lo stato piano non fessurato e le prove su prototipi per valutare il comportamento a rottura [23], [50]. Una mensola può ritenersi «corta» quando il rapporto (fig. 5.47):

$$\lambda' = \frac{a}{h} < 1 \quad (4.42)$$

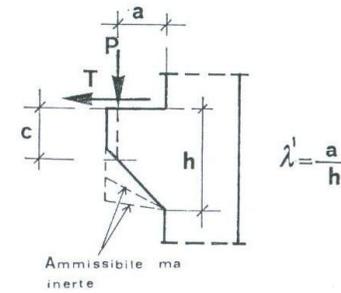


Fig. 5.47 - Mensola corta.

## 5.4.1.1 ANALISI DELLO STATO NON FESSURATO

In fig. 5.48 è riportato l'andamento delle isostatiche in tre diverse mensole corte.

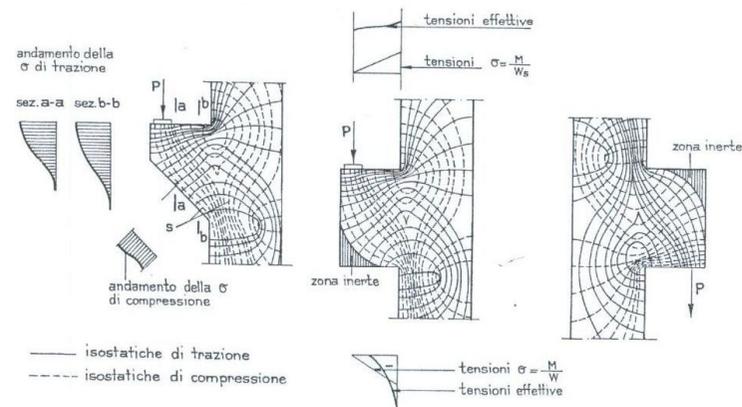


Fig. 5.48 - Andamento delle isostatiche in mensole corte.

Dal loro esame si nota che:

a) nel caso di carico applicato superiormente le isostatiche di trazione all'estradosso si mantengono pressoché equidistanti, e l'intensità della trazione si può ritenere costante;

b) le isostatiche di compressione, si mantengono anch'esse pressoché parallele, individuando un puntone ad asse inclinato di circa  $45^\circ$ ;

c) le tensioni di trazione, suscitate dagli sforzi di compressione sono molto piccole perché questi ultimi hanno andamento quasi rettilineo;

d) la massima tensione di compressione si verifica nella sezione *S* (figura 5.48), dove si ha una brusca deviazione delle isostatiche. Tale tensione, teoricamente molto elevata, in realtà si smorza per effetto della plasticizzazione del conglomerato;

e) la forma della mensola ha una influenza irrilevante sull'andamento delle isostatiche e delle tensioni; la zona in corrispondenza allo spigolo inferiore della mensola rettangolare è praticamente inerte;

f) nel caso di carico in basso, l'andamento delle isostatiche cambia completamente, invertendosi quelle di trazione con quelle di compressione.

#### 5.4.1.2 ANALISI DELLO SFORZO FESSURATO

Molti ricercatori [29], [50], [56], [59] hanno eseguito esperienze su mensole corte, armate sia con barre che seguono l'andamento delle isostatiche nello stato I, (fig. 5.49 a) sia con barre piegate dimensionate per assorbire l'intero sforzo di scorrimento (fig. 5.49 b).

Tali prove hanno messo in luce che:

a) le prime fessure si verificano al lembo superiore, normalmente alle isostatiche di trazione della fase non fessurata;

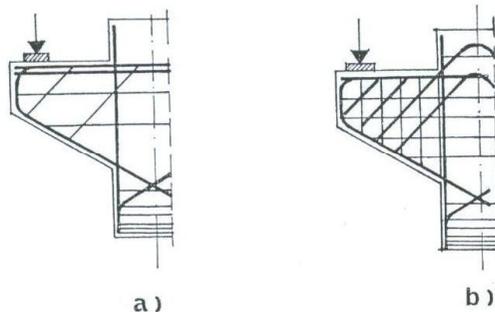


Fig. 5.49 - Schemi di armatura nelle mensole corte.

b) al crescere del carico le lesioni progrediscono nel corpo della mensola individuando delle bielle di conglomerato compresso;

c) la rottura avviene a seguito di una rotazione rigida dell'intera mensola intorno ad un centro ubicato nella sezione di incastro immediatamente al disopra del lembo inferiore della mensola.

Allungandosi l'«asta tesa», le lesioni di trazione si estendono verso il basso, riducendo la zona compressa, fino a che il conglomerato non si schiaccia (figura 5.50 a).

d) nel caso di carico applicato superiormente le armature più efficaci risultano quelle diritte disposte al lembo superiore, mentre le armature oblique danno uno scarso contributo, perché avviene lo schiacciamento del conglomerato ancor prima che le armature abbiano esaurito le proprie capacità di resistenza, inoltre, rispetto al centro di rotazione, presentano un braccio di leva molto più piccolo delle armature disposte al lembo superiore.

Quanto detto trova conferma sperimentale nel caso delle mensole della figura 5.51, in cui la rottura si è avuta per:

$P = 53$  t nella mensola a);

$P = 65$  t nella mensola b).

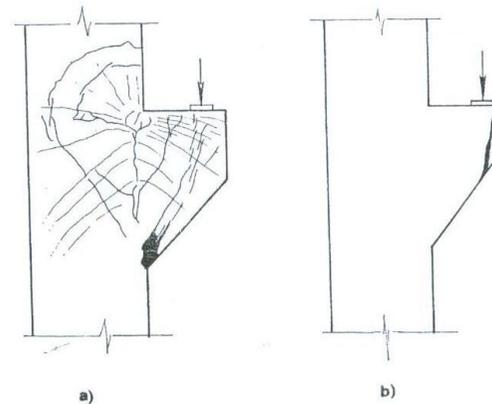


Fig. 5.50 - Tipi di rottura di mensole corte.

Le prove eseguite da Kriz e Rath [59] mostrano inoltre l'influenza che hanno sullo stato di sollecitazione le forze orizzontali, nel senso che, a parità di dimensioni ed armature, la capacità portante diminuisce all'aumentare del rap-

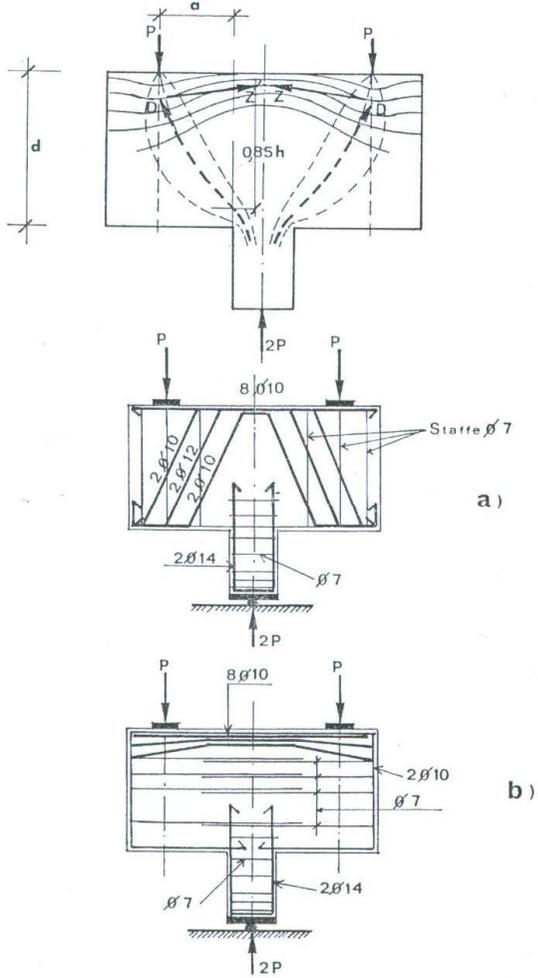


Fig. 5.51 - Prova a rottura di due mensole corte diversamente armate (da [23]).

porto  $\frac{T}{P}$  tra forza orizzontale e carico verticale (fig. 5.52). Le stesse prove hanno messo in luce che ad evitare rotture premature, del tipo mostrato nella figura 5.50 b, è necessario che l'altezza  $c$  (fig. 5.47) risulti maggiore di  $0,5 h$ .

5.4.1.3 DIMENSIONAMENTO E CALCOLO DELLE ARMATURE

L'analisi elastica dello stadio I e le prove sperimentali a rottura eseguite su mensole corte in c. a., hanno suggerito dei semplici metodi di calcolo, nell'intento di garantire l'equilibrio nello stato fessurato: vengono ipotizzati dei modelli resistenti costituiti da tralicci con bielle di conglomerato compresso ed aste tese di acciaio, individuate dalle traiettorie delle isostatiche calcolate nello stadio non fessurato: Franz e Niedenhoff [23] suggeriscono i tralicci isostatici della fig. 5.53, Mehmel e Becker [51] quelli iperstatici.

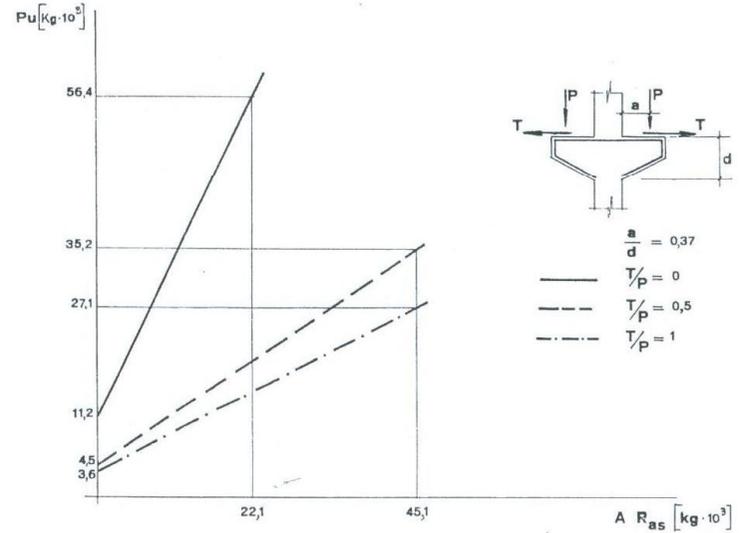


Fig. 5.52 - Andamento del carico ultimo  $P_u$ , al variare del rapporto  $T/P$  (da [59]).

a) Armatura principale

a.1) Carico applicato in alto.

Adottando il traliccio isostatico (fig. 5.53 a) proposto da Franz e Niedenhoff,

lo sforzo nell'armatura risulta:

$$F_a = P \cdot \frac{a}{z} \quad (5.49)$$

in cui:

$$z = 0,85 d;$$

$\frac{z}{a} = \operatorname{tg} \alpha$  rappresenta l'inclinazione della biella.

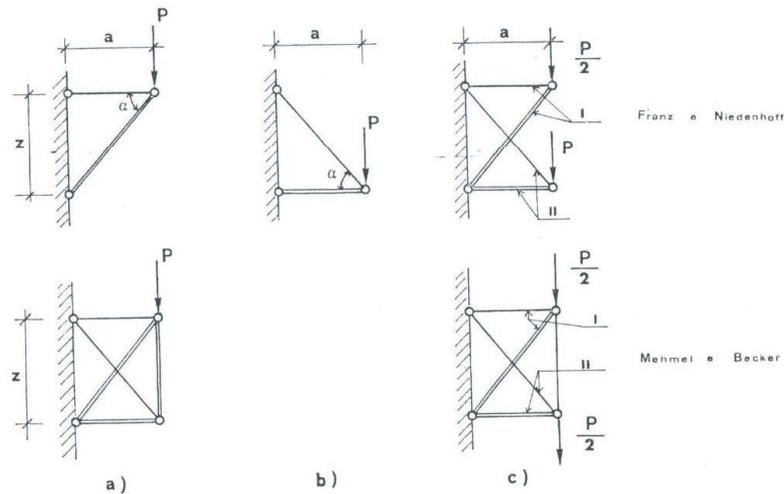
a.2) Carico applicato in basso.

In tale caso il traliccio resistente è quello di fig. 5.53 b, lo sforzo nell'armatura risulta:

$$F_a = P \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (5.50)$$

a.3) Carico indiretto.

Si riscontra, ad esempio, nelle mensole che reggono le travi per carro ponte (fig. 5.54).



- a) Carico in alto
- b) Carico in basso
- c) Carico indiretto

— asta tesa  
 == asta compressa

Fig. 5.53 - Tralicci resistenti nelle mensole corte.

In tal caso non si riesce a stabilire con esattezza l'aliquota del carico che viene trasmessa nella parte alta della mensola e di quella nella parte bassa.

Franz e Niedenhoff ipotizzano due tralicci isostatici indipendenti (fig. 5.53 c), in cui il traliccio I è sollecitato da un carico pari a  $0,5 P$ , e il II da uno pari a  $P$ ; tale scelta deriva dalla constatazione che il carico della trave longitudinale continua, attraverso un funzionamento ad arco, si trasmetta prevalentemente alla parte bassa della mensola (fig. 5.54).

Di conseguenza si avrà una armatura obliqua dimensionata per uno sforzo:

$$F_{a\alpha} = \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (5.51)$$

ed una armatura parallela al lembo superiore dimensionata per uno sforzo:

$$F_a = 0,5 P \cdot \frac{a}{z} \quad (5.52)$$

Leonhardt [16] ipotizza lo stesso doppio traliccio, ma affida al traliccio I ancora un carico pari  $0,5 P$ , mentre al traliccio II, un carico pari a  $0,6 P$ .

Mehmel ipotizza un traliccio iperstatico sui cui nodi è applicato un carico pari a  $0,5 P$ .

b) Armatura secondaria.

Tale armatura serve per assorbire le tensioni di trazione che si hanno nel corpo della mensola, normali alle isostatiche di compressione.

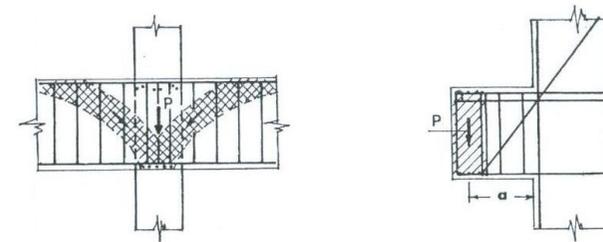


Fig. 5.54 - Trasmissione del carico da una trave ad una mensola corta (da [16]).

Leonhardt [16] suggerisce di dimensionare tale armatura per uno sforzo:

$$F_{ax} = \frac{F_n}{4} \quad (5.53)$$

Le norme tedesche-orientali [57] danno per il dimensionamento delle armature le semplici regole seguenti, che rappresentano la sintesi di quanto detto sopra.

Con riferimento alla fig. 5.55:

carico in alto

$$F_{a0} = 0,85 P \quad F_{aa} = 0,4 P \quad (5.54 a)$$

carico sull'altezza (indiretto)

$$F_{a0} = 0,55 P \quad F_{aa} = 0,7 P \quad (5.54 b)$$

Come in tutti i casi in cui lo sforzo lungo l'armatura rimane costante, riveste estrema importanza il loro buon ancoraggio, che dovrà quindi essere molto efficiente.

Una notevole influenza sulla resistenza hanno le forze orizzontali (cfr. n. 5.4.1.2) provocate dall'elemento sostenuto dalla mensola corta, a causa di deformazioni impedito di ritiro, fluage del conglomerato, variazioni di temperatura, e di precompressione, oppure a forze orizzontali esterne quali ad esempio quelle di frenatura dei veicoli sui ponti.

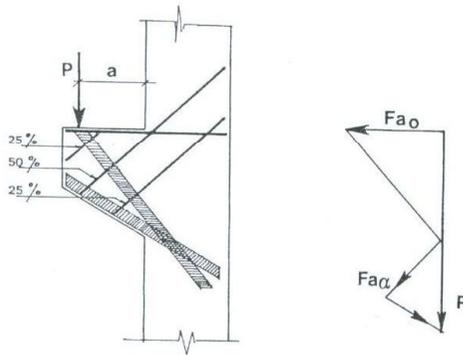


Fig. 5.55 - Distribuzione delle armature secondo le norme [57].

Tali forze debbono essere assorbite da una armatura supplementare:

$$A = \frac{F}{\bar{\sigma}_a} \quad (5.55)$$

che è prudente sovradimensionare, poiché questo tipo di sollecitazione riduce notevolmente la capacità portante della mensola. La fig. 5.56 mostra l'andamento dello sforzo di compressione (zona tratteggiata) e la disposizione delle armature in una seggiola tipo Gerber. Le fig. 5.57 fanno vedere la disposizione delle armature in due mensole corte che fuoriescono da un pilastro.

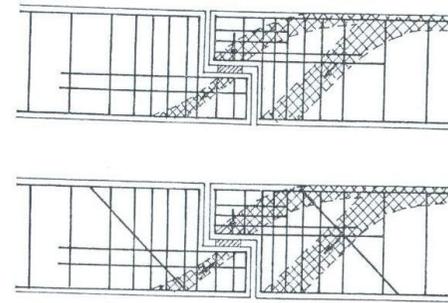


Fig. 5.56 - Zona compressa e disposizione delle armature in due seggiola da ponte.

c) Verifica del conglomerato.

Le esperienze mettono in luce che la rottura avviene per schiacciamento del conglomerato della biella compressa, a seguito del progredire delle lesioni che riducono l'area efficace del conglomerato compresso.

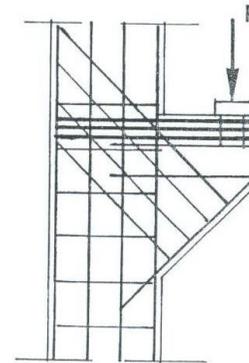


Fig. 5.57 a - Disposizione delle armature in una mensola corta.

All'atto della rottura si può pertanto ipotizzare lo schema resistente della fig. 5.58 in cui l'acciaio ha raggiunto lo snervamento ed il conglomerato la sua resistenza a compressione.

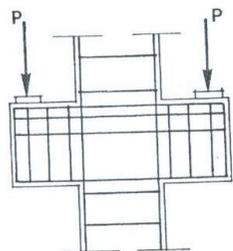


Fig. 5.57 b - Disposizione delle armature in una doppia mensola corta.

Ipotizzando per il conglomerato un diagramma delle tensioni rettangolari (cfr. n. 4.3.1) si ha:

$$F_a = A \cdot f_{yt} \quad C = b \cdot 0,8 \cdot x \cdot f_{cd}$$

in cui  $b$  è la larghezza della mensola.

Per l'equilibrio alla traslazione

$$C \cdot \cos \alpha = F_a \quad (5.56)$$

e quindi:

$$x = \frac{A}{b \cdot 0,8 \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{f_{yt}}{f_{cd}} \quad (5.57)$$

Per l'equilibrio alla rotazione rispetto al punto di applicazione di  $F_a$  viene:

$$P_u \cdot a = C \cdot z \cdot \cos \alpha \quad (5.58 a)$$

e rispetto al punto di applicazione di  $C$ :

$$P_u \cdot a = F_a \cdot z \quad (5.58 b)$$

in cui:

$$z = d - \frac{0,4 \cdot x}{\cos \alpha} = a \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (5.59)$$

Non essendo più valida l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, non è possibile scrivere una equazione di congruenza che pareggi il numero delle incognite.

Le esperienze hanno messo in luce che per la verifica dell'armatura è sufficientemente cautelativo assumere  $z = 0,85 d$ , per cui dalla (5.58 b) si ha:

$$F_a = P_u \cdot \frac{a}{0,85 d} \quad (5.60)$$

che è la formula di cui al n. 5.4.3.1.

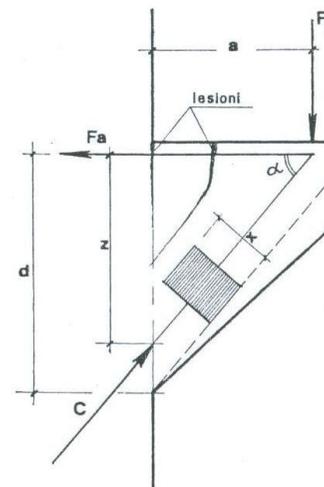


Fig. 5.58 - Meccanismo di rottura di una mensola corta.

Per la verifica del conglomerato non è altrettanto facile definire un valore cautelativo di  $x$ .

Le norme ACI [4] danno la formula seguente, di origine sperimentale, che permette di verificare il conglomerato attraverso il calcolo della  $\tau_u$  che può essere portata dalla mensola corta:

$$\tau_u = (6,5 - 5,1 \cdot \sqrt{\gamma}) \cdot \left(1 - 0,5 \frac{a}{d}\right) \cdot [1 + (64 + 160 \cdot \sqrt{\gamma^3}) \cdot \rho] \cdot 0,265 \cdot \sqrt{R_{ctk}} \quad (5.61)$$

in cui:

$$\gamma = \frac{T_u}{P_u}$$

è il rapporto tra la forza orizzontale  $T_u$  e verticale  $P_u$ ;

$$\rho = \frac{A}{b \cdot d}$$

è la percentuale di armatura longitudinale, minore di  $0,15 \frac{R_{ctk}}{f_{yk}(S)}$

$$\tau_u = \frac{P_u}{\varnothing b \cdot d}$$

è il taglio medio nella sezione d'attacco, in cui:

$$\begin{aligned} \varnothing &= 0,85 \\ P_u &= 1,4 P + 1,7 S \\ P &= \text{carico permanente;} \\ S &= \text{carico accidentale.} \end{aligned} \quad (5.62)$$

Qualora manchi la forza orizzontale ( $T_u = 0$ ) la (5.61) diventa:

$$\tau_u = 1,72 \left( 1 - 0,5 \cdot \frac{a}{d} \right) \cdot (1 + 64 \cdot \rho) \cdot \sqrt{R_{ctk}} \quad (5.63)$$

ed in tale caso  $\rho$  deve risultare minore di:

$$0,20 \frac{R_{ctk}}{f_{yk}}$$

Secondo le norme italiane [2] è richiesto alla rottura un coefficiente di sicurezza pari a 1,50 per cui usando la (5.61) il taglio di esercizio deve essere:

$$\tau_e \leq \frac{\tau_u}{1,50}$$

#### 5.4.1.3.1 Esempio

Si progetti la mensola corta della fig. 5.59, soggetta al carico  $P = 20$  t. Essendo:

$$\begin{aligned} a &= 0,40 \text{ m} \\ h &= 0,40 \text{ m} \\ d &= 0,37 \text{ m} \\ b &= 0,35 \text{ m} \end{aligned}$$

assunto:

$$\begin{aligned} z &= 0,85 & d &= 0,314 \text{ m} \\ \bar{\sigma}_a &= 2200 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

mediante la (5.60) si ha:

$$F_a = 20\,000 \frac{0,40}{0,314} = 25\,437 \text{ kg}$$

L'armatura principale risulta pertanto pari a:

$$A = \frac{F_a}{\bar{\sigma}_a} = 11,56 \text{ cm}^2 \rightarrow 4 \varnothing 20$$

Le armature secondarie si assumono pari a:

$$A_s = \frac{A}{4} = 2,89 \rightarrow 3 \text{ st } \varnothing 8$$

Verifica del conglomerato.

Essendo:

$$\rho = \frac{15,56}{30 \cdot 37} = 0,014$$

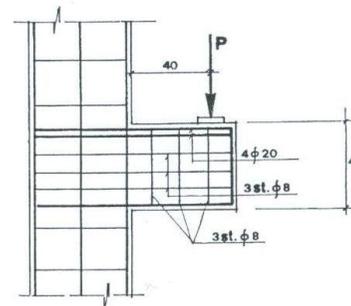


Fig. 5.59 - Esempio di mensola corta.

$$\frac{a}{d} = 1,08$$

$$R_{ctk} = 350 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{yk} = 4400 \text{ kg/cm}^2$$

dalla (5.63) si ha:

$$\tau_u = 28,06 \text{ kg/cm}^2$$

Per solo carico permanente, si avrebbero per la (5.62) una tensione ed un carico di esercizio pari a:

$$\tau_r = \frac{P_r}{b d} = \tau_u \frac{0,85}{1,4} = 17,04 \text{ kg/m}^2$$

$$P_r = 22,06 \text{ t}$$

Secondo le norme italiane [2] risulta invece:

$$\tau = \frac{\tau_u}{1,50} = 18,70 \text{ kg/cm}^2$$

$$P_r = 24,2 \text{ t}$$

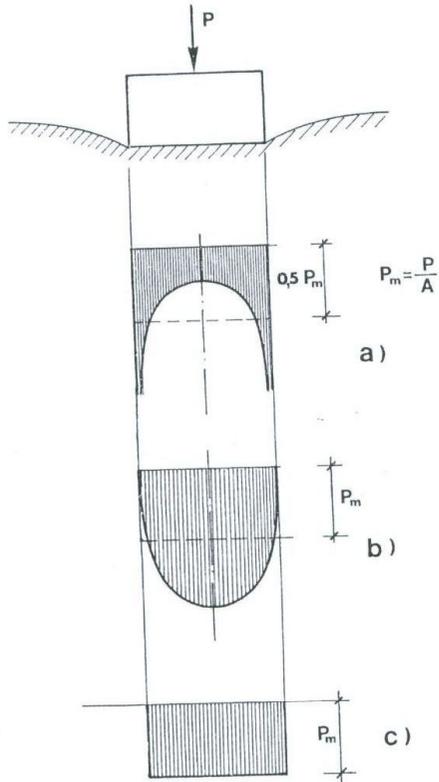
#### 5.4.2 Plinti

I plinti sono elementi strutturali che assolvono la funzione di trasferire carichi concentrati al terreno di fondazione.

Tale trasferimento può avvenire direttamente alla base del plinto, se trattasi di fondazione diretta, o mediante pali, piloni, se trattasi di fondazione indiretta; nel primo caso la reazione del terreno si esplica in una pressione distribuita sulla base del plinto, nel secondo in azioni concentrate in corrispondenza dei pali.

Il calcolo di tali elementi presenta notevoli difficoltà, per due ordini di pro-

blemi: la valutazione esatta del sistema di forze che sollecita un plinto (carichi applicati e reazioni di sottofondo, che costituiscono nel loro insieme un sistema di forze necessariamente equilibrato) è notevolmente complessa dipendendo



dalle caratteristiche di rigidità delle strutture in elevazione e di fondazione, nonché dal tipo di terreno; il calcolo esatto dello stato tensionale in elementi tridimensionali, come visto nei paragrafi precedenti, è praticamente non eseguibile.

La ripartizione delle pressioni di sottofondo è spesso disuniforme [54]: ad esempio per plinto rigido e un suolo coerente secondo la teoria della elasticità (Boussinesq) la pressione si distribuirebbe con legge parabolica con valore infinito ai bordi e pari alla metà della pressione media al centro (fig. 5.60 a).

Peraltro il riuflimento laterale riduce notevolmente le pressioni ai bordi tanto che per piccole superfici ed elevati valori delle pressioni può giungersi a diagrammi con ordinate massime al centro (5.60 b).

In realtà la forma del diagramma delle pressioni di contatto, può essere molto diverso a seconda delle dimensioni planimetriche della fondazione, della sua rigidità, della natura del terreno e della entità della pressione oltre naturalmente all'influenza di eventuali eccentricità della risultante dei carichi [54].

Ne consegue che agli effetti pratici, per dimensionare i plinti usuali debbono adottarsi ipotesi semplificative, salvo a fare un calcolo più esatto, per il quale si rinvia ai testi specializzati [54] in casi di maggiore soggezione.

Nella maggior parte dei casi il problema della valutazione delle forze sollecitanti il plinto viene affrontato, considerando, secondo Winkler, la reazione del terreno proporzionale al cedimento.

$$\sigma_t = K \cdot y$$

per cui, se il plinto si considera infinitamente rigido rispetto al terreno, i diagrammi di sottofondo sono lineari (fig. 5.60 c).

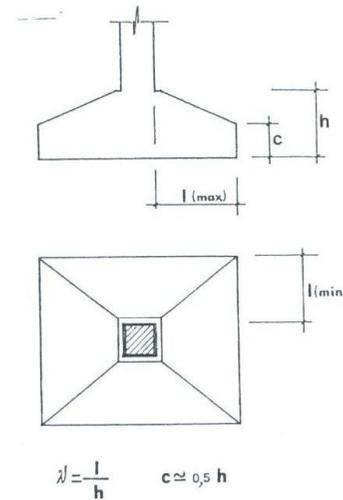


Fig. 5.61 - Plinto di fondazione di un pilastro.

Tale ipotesi se è criticabile dal punto di vista geotecnico lo è molto meno per il calcolo della resistenza del plinto, stante le schematizzazioni semplificate che si adottano per valutarla.

La verifica della sicurezza sia per le condizioni di esercizio che di rottura presenta le stesse incertezze già viste per le mensole corte: il calcolo viene pertanto affrontato mediante schemi statici semplici, che sostanzialmente si preoccupano di garantire con buon margine l'equilibrio nella condizione limite di rottura.

In genere si suole suddividere i plinti in due categorie (fig. 5.61):

- 1) Plinti alti per i quali:

$$\lambda_{(max)} = \frac{l_{(max)}}{h} \geq 1 \quad (5.64 a)$$

Gli schemi di calcolo che si adottano ipotizzano dei tralicci resistenti analoghi a quelli visti per le mensole corte.

- 2) Plinti bassi per i quali:

$$\lambda_{(max)} < 1 \quad (5.64 b)$$

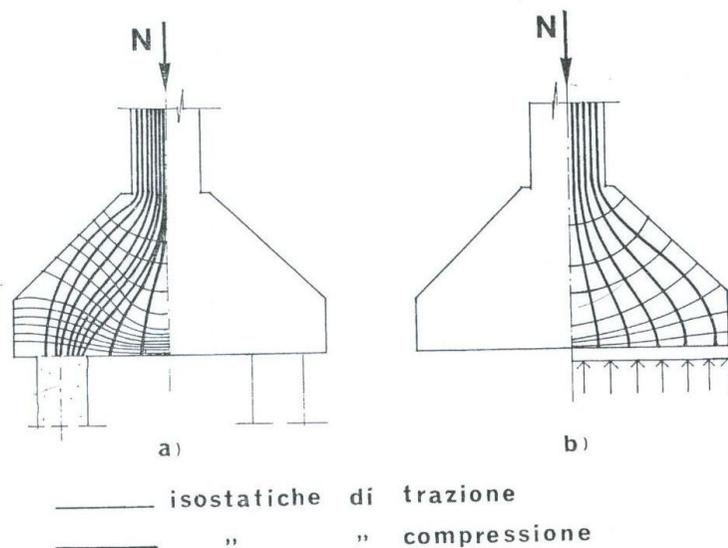


Fig. 5.62 - Andamento delle isostatiche in un plinto su pali (a) e diretto sul terreno (b).

Si usano schemi che prevedono il calcolo dei momenti flettenti massimi mediante la teoria delle travi.

Il limite inferiore di tale classe sono i plinti flessibili in cui  $h \ll a$ . L'elemento di fondazione può allora essere assimilato ad una piastra. Non essendo più valida l'ipotesi di indeformabilità del plinto rispetto al terreno, il calcolo va affrontato come piastra su suolo elastico [54].

La forma e le proporzioni di un plinto debbono essere tali da favorire la corretta diffusione degli sforzi di compressione che dal pilastro vengono diffusi sul terreno o convogliati nei pali (fig. 5.62); per tali motivi sono preferibili, nel caso di carico centrato, plinti di forma regolare tronco-conica o tronco piramidale, con superficie di base quadrata (se rettangolare i lati debbono essere poco differenti) ed altezza tale che  $\lambda' \approx 1$ .

Si ottiene con una uniforme diffusione del carico sul suolo senza deformazioni apprezzabili, inoltre è assicurata una ottimale resistenza al punzonamento.

#### 5.4.2.1 PLINTI DIRETTI

I plinti diretti risultano sollecitati dai carichi trasmessi dai pilastri e dalla reazione di sottofondo (fig. 5.63).

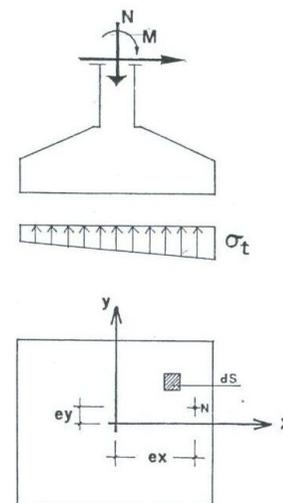


Fig. 5.63 - Sistema di forze sollecitante un plinto diretto.

Le dimensioni della base di appoggio risultano dalle condizioni di:

a) equilibrio alla traslazione verticale:

$$N_t - \int_S \sigma_t \cdot ds = 0 \quad (5.65)$$

b) equilibrio alla rotazione:

$$N_t \cdot e_x - \int_S \sigma_t \cdot ds \cdot x = 0 \quad (5.66 a)$$

$$N_t \cdot e_y - \int_S \sigma_t \cdot ds \cdot y = 0 \quad (5.66 b)$$

in cui  $N_t$  è il totale carico verticale:

$$N_t = N + P_p$$

e  $\bar{\sigma}_t$  è la pressione ammissibile sul terreno, con

- $N$  = carico trasmesso dal pilastro;
- $P_p$  = peso del plinto;
- $e_x, e_y$  = eccentricità di  $N$ ;
- $S$  = area di base.

Nel caso di pressione centrata e diagramma di sottofondo uniforme si ha:

$$\begin{aligned} N - \bar{\sigma}_t \cdot S &= 0 \\ S &= \frac{N}{\bar{\sigma}_t} \end{aligned} \quad (5.67)$$

#### 5.4.2.1.1 Plinti alti: metodo delle bielle

Nel metodo delle bielle, esposto da M. Lebellet [12], viene fatta l'ipotesi che il carico  $N$  del pilastro si diffonda sul terreno mediante delle bielle di conglomerato  $O A$  (fig. 5.64).

Se si indica con

$$\sigma_t = \frac{N}{a \cdot b}$$

la reazione del terreno, supposta uniforme, su un elementino infinitesimo della base del plinto agirà la forza:

$$\sigma_t \cdot dx \cdot dy$$

a cui faranno equilibrio le forze  $dN_b$  della biella di conglomerato e  $dN_{ax}$  e  $dN_{ay}$  delle armature. Con riferimento alla fig. 5.64:

$$dN_c = \sigma_t \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{A O}{O B}$$

$$dN_{ax} = \sigma_t \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{A B}{O B} \cdot \cos \theta = \frac{\sigma_t}{O B} \cdot x \cdot dx \cdot dy$$

$$dN_{ay} = \sigma_t \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{A B}{O B} \cdot \sin \theta = \frac{\sigma_t}{O B} \cdot y \cdot dx \cdot dy$$

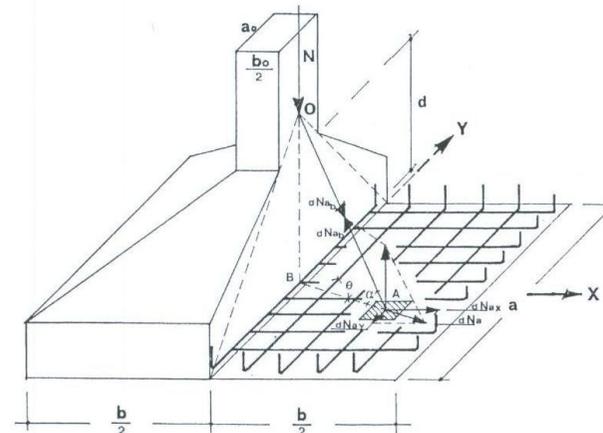


Fig. 5.64 - Schematizzazione degli sforzi interni in un plinto diretto.

Lo sforzo di trazione risultante secondo  $x$ , per una striscia di larghezza  $dy$ , vale:

$$\int_0^{b/2} dN_{ax} = \frac{\sigma_t}{O B} \cdot dy \int_0^{b/2} x \cdot dx = \frac{\sigma_t \cdot b^2}{8 \cdot O B} \cdot dy$$

Lo sforzo totale di trazione secondo  $x$ , per tutta la larghezza  $a$ , risulta pertanto:

$$N_{ax} = \frac{\sigma_t \cdot b^2}{8 \cdot O B} \int_0^a dy = \frac{\sigma_t \cdot b^2}{8 \cdot O B} \cdot a = N \cdot \frac{(b - b_0)}{8 \cdot d} \quad (5.68 a)$$

ed analogamente

$$N_{ay} = N \cdot \frac{(a - a_0)}{8 \cdot d} \quad (5.68 b)$$

L'armatura totale parallela ai lati  $a$  e  $b$ , risulta:

$$A_n(y) = \frac{N}{8 \cdot \bar{\sigma}_n} \cdot W_n \quad (5.69 a)$$

$$A_n(x) = \frac{N}{8 \cdot \bar{\sigma}_n} \cdot W_n \quad (5.69 b)$$

in cui:

$$W_a = \frac{a - a_0}{d}$$

$$W_b = \frac{b - b_0}{d}$$

misurano la flessibilità del plinto secondo  $a$  e  $b$ .

Dalle (5.69) si vede come la distribuzione delle armature debba essere uniforme, non dipendendo da  $y$  o  $x$ .

Se si trascurano le dimensioni del pilastro, rispetto a quelle del plinto, le (5.69) diventano semplicemente:

$$A_n(y) = \frac{N}{8 \cdot \bar{\sigma}_n} \cdot \frac{a}{d} \quad (5.70 a)$$

$$A_n(x) = \frac{N}{8 \cdot \bar{\sigma}_n} \cdot \frac{b}{d} \quad (5.70 b)$$

Nel caso di plinto quadrato con  $d = \frac{a}{2}$ , l'armatura parallela ad ogni lato risulta:

$$A = \frac{N}{\sigma_n} \cdot \frac{1}{4} \quad (5.71)$$

che corrisponde ad ipotizzare il plinto, come costituito da quattro mensole corte con  $\lambda' = 1$ , giacenti nei piani  $z \cdot x$  e  $z \cdot y$ .

#### 5.4.2.1.2 Plinti bassi

Per il calcolo delle sollecitazioni esistono molti metodi approssimati.

Il più pratico ed attendibile è quello proposto dalle Norme ACI [4]: il calcolo si esegue determinando il momento flettente nelle sezioni  $xx$ ,  $yy$ , considerando la zona tratteggiata come una mensola caricata dalla reazione di sottofondo  $\sigma_t$ .

Tale modello nasce dall'osservazione che l'andamento più probabile delle lesioni, che una volta innescate definiscono il meccanismo resistente a rottura, è quello della fig. 5.65, come si è potuto constatare in molti plinti lesionati.

Nel caso di pressione uniforme, si hanno pertanto i momenti:

$$M_y = \frac{1}{8} \cdot a \cdot (b - b_0)^2 \cdot \sigma_t \quad (5.72 a)$$

$$M_x = \frac{1}{8} \cdot b \cdot (a - a_0)^2 \cdot \sigma_t \quad (5.72 b)$$

mediante i quali si calcolano le armature ipotizzando una sezione di altezza utile  $d$  e braccio delle forze interne  $z \approx 0,9 \cdot d$ :

$$A_n(x) = \frac{M_y}{z \cdot \bar{\sigma}_n} \quad (5.73 a)$$

$$A_n(y) = \frac{M_x}{z \cdot \bar{\sigma}_n} \quad (5.73 b)$$

Le (5.72), essendo:

$$\sigma_t = \frac{N}{a \cdot b}$$

e trascurando le dimensioni del pilastro rispetto a quelle del plinto, diventano:

$$M_y = \frac{1}{8} \cdot N \cdot b \quad (5.74 a)$$

$$M_x = \frac{1}{8} \cdot N \cdot a \quad (5.74 b)$$

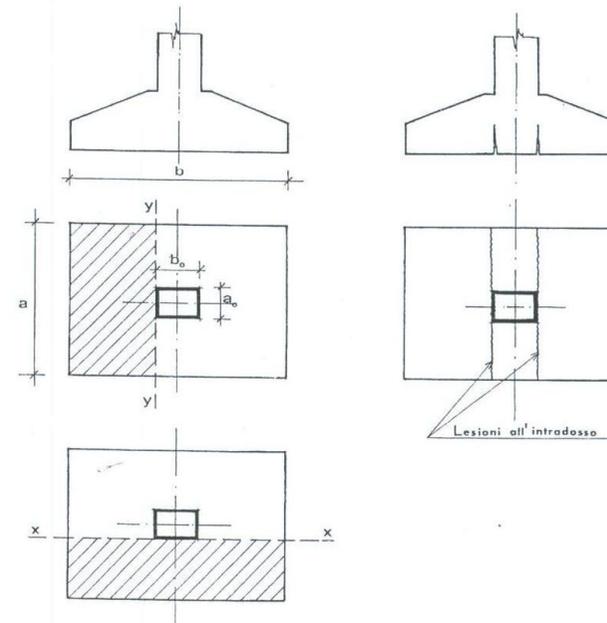


Fig. 5.65 - Schema di calcolo per i plinti bassi.

da cui:

$$A_n(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{N}{\bar{\sigma}_n} \cdot \frac{b}{z} \quad (5.75 a)$$

$$A_n(y) = \frac{1}{8} \cdot \frac{N}{\bar{\sigma}_n} \cdot \frac{a}{z} \quad (5.75 b)$$

nel caso di plinto quadrato con  $z = \frac{a}{2}$  si ha ancora la formula (5.71).

Le armature vanno poi uniformemente distribuite sulla base del plinto. Tale metodo è comodo quando il plinto è caricato eccentricamente e la reazione di sottofondo non è costante; in tale caso il momento flettente è quello della risultante delle  $\sigma_i$  che agiscono sull'area tratteggiata.

#### 5.4.2.2 PLINTI SU PALI

La reazione del terreno si esplica mediante azioni concentrate in corrispondenza della sezione di collegamento del plinto ai pali. In genere, a favore di stabilità, le sollecitazioni di taglio e momento flettente che si hanno all'attacco dei pali, in conseguenza alla deformazione del plinto (vedi fig. 5.66), vengono trascurate, riducendo l'azione del palo alla sola forza  $N$  normale alla base del plinto.

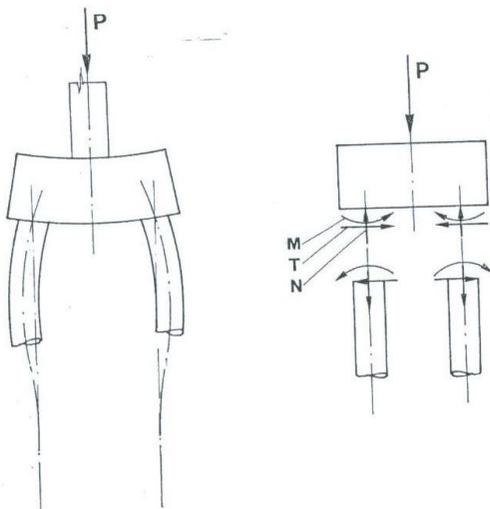


Fig. 5.66 - Azioni mutue tra plinto e palo.

Definito il numero di pali, che assicurano l'equilibrio del plinto, ed il loro interasse  $i$  (in genere non inferiore a tre volte il diametro dei pali) le dimensioni della base del plinto sono fissate da considerazioni costruttive per le quali è bene che i pali distino, almeno metà diametro, dal bordo del plinto.

#### 5.4.2.2.1 Plinti alti

I plinti alti agli effetti del calcolo si considerano scomposti in tante mensole corte quanti sono i pali (figg. 5.67, 5.68).

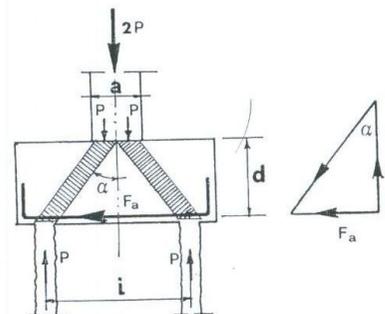


Fig. 5.67 - Schema resistente del plinto a due pali.

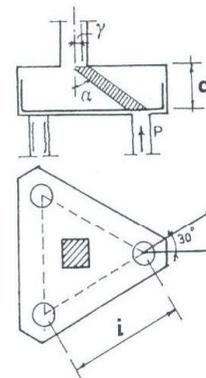


Fig. 5.68 - Schema resistente di un plinto a tre pali.

Lo sforzo di trazione nella direzione congiungente l'asse del palo con quella del pilastro, risulta:

$$F_n = P \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (5.76)$$

in cui  $P$  è la reazione del palo ed  $\alpha$  l'inclinazione della biella di conglomerato.

a) Plinto a due pali.

Il plinto è costituito da due mensole corte con piano medio nel piano verticale che contiene l'asse del pilastro e l'asse baricentrico dei pali. In tale caso (fig. 5.67):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,5 \cdot (i - 0,5 \cdot a_0)}{d}$$

$$F_n = P \cdot \frac{i - 0,5 \cdot a_0}{2 \cdot d}$$

$$A = \frac{P}{\bar{\sigma}_a} \cdot \frac{i - 0,5 \cdot a_0}{2 \cdot d} \quad (5.78 a)$$

Se si trascura la dimensione del pilastro, rispetto al plinto, e si assume  $d = 0,5 \cdot i$  risulta:

$$A = \frac{P}{\bar{\sigma}_a} \cdot \frac{i}{2 \cdot d} = \frac{P}{\bar{\sigma}_a} \quad (5.78 b)$$

b) Plinto a tre pali.

I pali sono disposti ai vertici di un triangolo equilatero il cui baricentro passa l'asse del pilastro (fig. 5.68).

Le mensole corte giacciono nei piani bisettori gli angoli al vertice del triangolo di base, per cui, l'inclinazione delle bielle risulta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{i \cdot 0,577 - \gamma \cdot a_0}{d}$$

in cui  $\gamma$  è un coefficiente che dipende dalla forma e dall'orientamento del pilastro rispetto al plinto; per il pilastro orientato come in fig. 5.68:

$$\gamma = \frac{2}{6} = 0,235$$

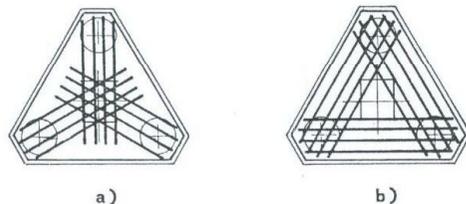


Fig. 5.69 - Disposizione delle armature in un plinto a tre pali.

Lo sforzo lungo le bisettrici è:

$$F_n = P \cdot \frac{i \cdot 0,577 - \gamma \cdot a_0}{d} \quad (5.79 a)$$

L'armatura, più frequentemente, viene disposta parallelamente ai lati del triangolo di base, come in fig. 5.69 b, a collegare tra di loro i pali ed allora lo sforzo nell'armatura viene:

$$F'_n = \frac{F_n}{\sqrt{3}} = \frac{\rho \cdot 0,333 \cdot i - 0,577 \cdot \gamma \cdot a_0}{d} \quad (5.79 b)$$

Trascurando le dimensioni del pilastro:

$$F'_n = \frac{P}{3} \cdot \frac{i}{d} \quad (5.79 c)$$

c) Plinto a quattro pali:

I pali sono disposti ai vertici di un quadrato (fig. 5.70). Le mensole corte giacciono ancora sui piani bisettori gli angoli al vertice del quadrato di base, e quindi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,707 \cdot i - 0,353 \cdot a_0}{d}$$

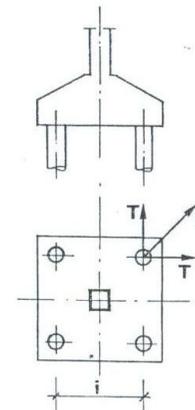


Fig. 5.70 - Plinto a quattro pali.

Lo sforzo lungo le bisettrici risulta:

$$F_n = P \cdot \frac{0,707 \cdot i - 0,353 \cdot a_0}{d}$$

Nel caso di armatura parallela ai lati del quadrato:

$$F'_a = \frac{F_a}{\sqrt{2}} = P \cdot \frac{0,5 \cdot i - 0,25 \cdot a_0}{d} \quad (5.80 b)$$

e trascurando le dimensioni del pilastro:

$$F'_a = \frac{P}{2} \cdot \frac{i}{d} \quad (5.80 c)$$

5) Plinto ad  $n$  pali.

Per un plinto ad  $n$  pali, disposti ai vertici di un poligono regolare (fig. 5.71), considerando il pilastro puntiforme, lo sforzo lungo la congiungente l'asse del pilastro con quello del palo risulta:

$$F_a = P \cdot \frac{i}{2 \cdot d \cdot \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{n}} \quad (5.81 a)$$

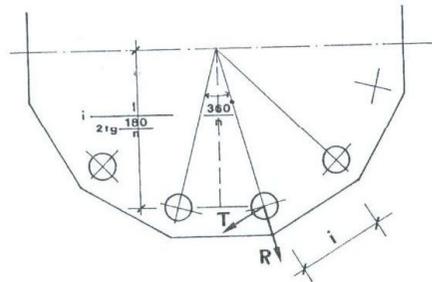


Fig. 5.71 - Plinto a  $n$  pali.

e quello parallelo ai lati:

$$F'_a = P \cdot \frac{i}{d \cdot \left( 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{n} \right)^2} \quad (5.81 b)$$

#### 5.4.2.2.2 Plinti bassi

Come per i plinti diretti, si calcolano i momenti flettenti nelle sezioni  $xx$ ,  $yy$ , dovuti ai pali che sollecitano le due mensole tratteggiate in fig. 5.72.

Si ottiene:

$$M_x = \Sigma \cdot P_i \cdot x_i \quad (5.82 a)$$

$$M_y = \Sigma \cdot P_i \cdot y_i \quad (5.82 b)$$

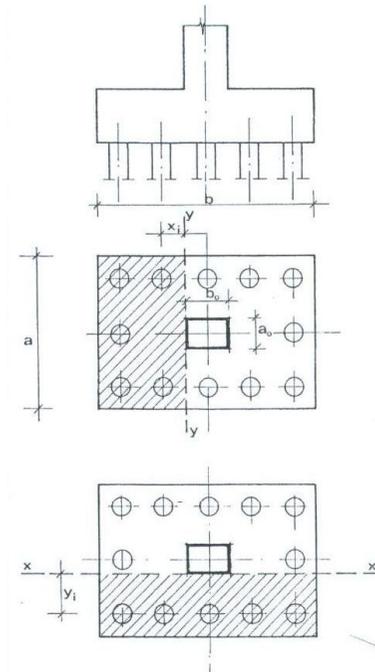


Fig. 5.72 - Schema di calcolo per plinto basso su pali.

mediante i quali si calcola il graticcio di armature di base, ipotizzando un braccio delle forze interne.

$$z = 0,9 \cdot d$$

#### 5.4.2.3 VERIFICA A PUNZONAMENTO

I plinti, oltre alle azioni flettenti, vanno verificati alle azioni taglianti, che si manifestano principalmente in un effetto di punzonamento.

Tale verifica risulta soddisfatta con notevole margine per i plinti alti, mentre non altrettanto accade per quelli bassi.

Il procedimento di calcolo è quello illustrato al n. 5.3.2.1.

Nel caso di plinto diretto le norme ACI [4], invece dell'intera forza  $N$ , trasmessa dal pilastro, suggeriscono di considerare la forza ridotta (5.73):

$$N_r = [b \cdot a - (a_0 + h) \cdot (b_0 + h)] \cdot \sigma_t \quad (5.83)$$

che è la risultante delle pressioni  $\sigma_t$  di sottofondo sulla zona tratteggiata della fig. 5.73.

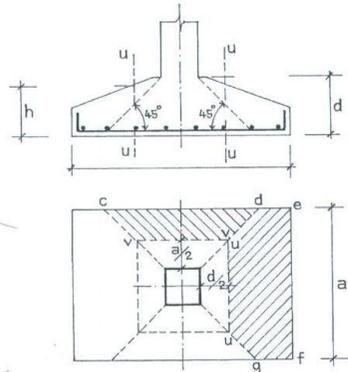


Fig. 5.73 - Verifica a punzonamento secondo le norme [4].

5.4.2.4 ESEMPIO

Progettare un plinto che debba trasmettere al terreno un carico di  $N = 120$  t. Il pilastro ha dimensioni:  $a_0 = b_0 = 0,40$  m.

a) Plinto diretto.

La pressione ammissibile sul terreno è:  $\bar{\sigma}_t = 2$  kg/cm<sup>2</sup>.

La base del plinto, tenuto conto del peso del plinto stesso, si fissa in:

$$a = b = 2,60 \text{ m}$$

Plinto alto

L'altezza del plinto si assume pari a:

$$h = 140 \text{ m}$$

per cui:

$$\lambda = \frac{1,40}{1,10} = 1,27$$

Dalla (5.69) avendo fissato:

$$\bar{\sigma}_n = 1900 \text{ kg/cm}^2$$

$$d = 1,36$$

si ha:

$$A_n(x) = A_n(y) = \frac{120\,000}{81\,900} \cdot 1,62 = 12,79 \text{ cm}^2$$

Si disporrà pertanto una doppia maglia di 9 Ø 14, come in fig. 5.74 a. Si osservi che nel calcolo del plinto non si tiene conto del peso proprio perché esso non provoca che irrilevanti sollecitazioni flessionali; è necessario invece tenerne conto nella valutazione della pressione massima sul terreno.

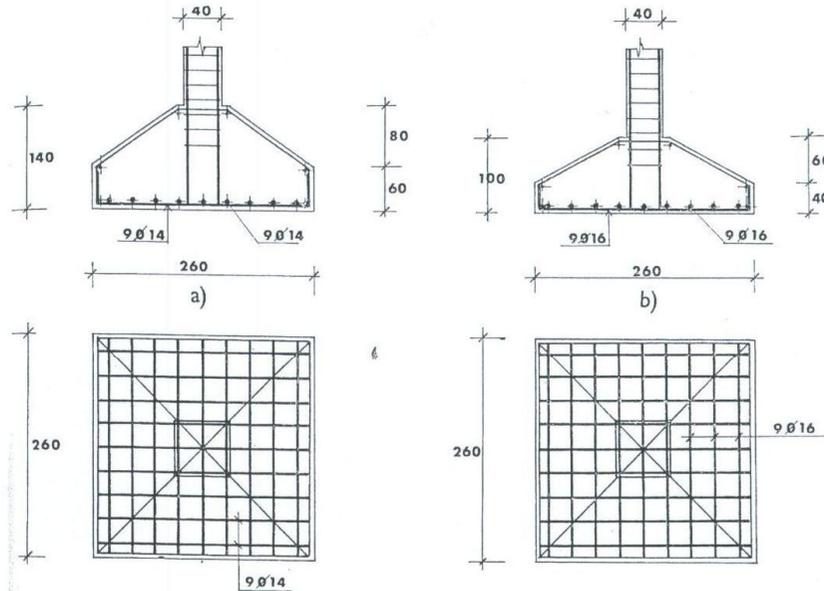


Fig. 5.74 - Esempio di due plinti diretti.

Plinto basso

Si assume:

$$h = 1,00 \text{ m}$$

$$\lambda = 0,90$$

$$d = 0,96 \text{ m}$$

Essendo:

$$\sigma_t = 1,77 \text{ kg/cm}^2$$

dalla (5.72) si ha:

$$M_x = M_y = \frac{1}{8} \cdot 2,60 \cdot 4,84 \cdot 1,77 \cdot 10^4 = 27842 \text{ kg/m}$$

e dalla (5.73) per  $z = 0,86 \text{ m}$ :

$$A_n(x) = A_n(y) = 17 \text{ cm}^2$$

pari ad un doppio graticcio di  $9 \text{ } \varnothing 16$  (fig. 5.74 b)

b) Plinto su pali.

Si adottano pali  $\varnothing 40 \text{ cm}$  della portata di 35 t.  
Il disegno della base del plinto risulta pertanto essere quello della fig. 5.75.

Fissato:

$$h = 1,00 \text{ m}$$

ed essendo:

$$i = 1,20 \text{ m}$$

$$a_0 = 0,40 \text{ m}$$

$$d = 0,96 \text{ m}$$

$$P = \frac{N}{4} = 30 \text{ t}$$

Dalla (5.80) lo sforzo lungo le bisettrici e la corrispondente armatura risulta:

$$F_n = 30 \cdot 0,737 = 22,1 \text{ t}$$

$$A_n = \frac{22100}{1900} = 11,63 \text{ cm}^2 \rightarrow 5 \text{ } \varnothing 18$$

Nel caso di armatura parallela ai lati del plinto dalla (5.80 b) risulta:

$$F'_n = 15,67 \text{ t}$$

$$A_n = 8,25 \text{ cm}^2 \rightarrow 6 \text{ } \varnothing 14$$

Verifica a punzonamento

Secondo il Codice Modello [3], si ha:

$$R_{ck} = 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho_{lit} = 0,074 R_{ck}^{2/3} = 2,94 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_{Sdt} = \gamma N = 1,5 \cdot 120 = 180 \text{ t}$$

$$u = 4 \cdot (40 + 96) = 544 \text{ cm}$$

$$v_{Sdt} = \frac{V_{Sdt}}{u} = 33,1 \text{ t/m}$$

$$v_{lit} = 1,6 \cdot \tau_{lit} \cdot d = 1,6 \cdot 29,4 \cdot 0,96 = 45,1 \text{ t/m}$$

Si ha dunque:

$$v_{Sdt} < v_{lit}$$

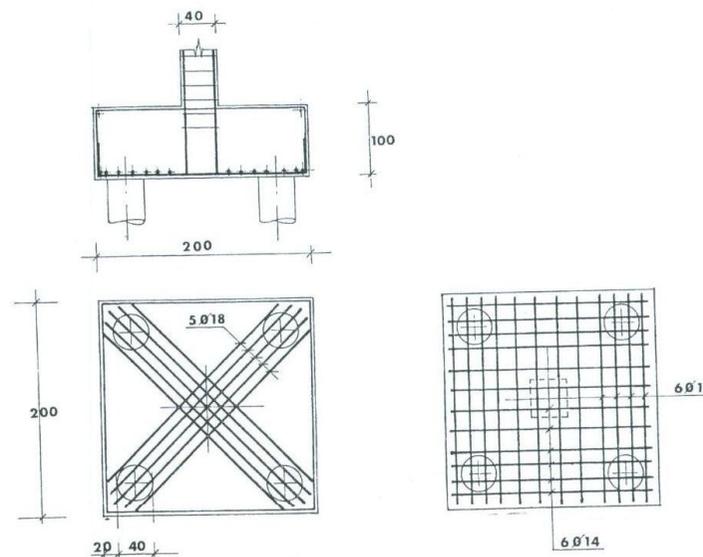


Fig. 5.75 - Esempi di disposizione delle armature in un plinto su quattro pali.

## 5.5 Cerniere

Si conviene di chiamare *cerniere fisse* quelle che consentono solo rotazione, *cerniere scorrevoli* (carrelli) quelle che consentono anche spostamenti in una direzione. Sono cerniere puntiformi quelle che consentono rotazioni intorno ad un punto, lineari quelle che consentono rotazioni intorno ad un asse.

### 5.5.1 Cerniera Considere

Trattasi praticamente di un pilastro frettato, con elevata percentuale di armatura longitudinale e sezione di conglomerato ridotta in modo da offrire scarsa

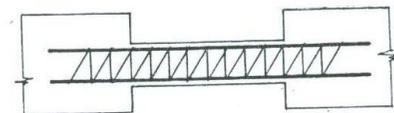


Fig. 5.76 - Cerniera Considere.

resistenza alla rotazione. Viene principalmente impiegata come cerniera provvisoria e può essere puntiforme o lineare.

### 5.5.2 Cerniera Mesnager

La resistenza è affidata unicamente alle barre d'acciaio passanti e inclinate alternativamente nei due sensi, come indicato in fig. 5.77. L'inclinazione ottima è quella per cui  $\cos \alpha \approx 0,75$ .

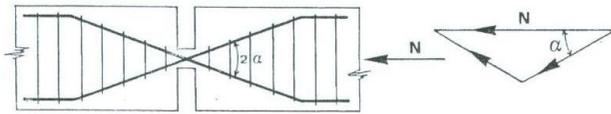


Fig. 5.77 - Cerniera Mesnager.

Per trasmettere lo sforzo  $N$ , se  $D$  è il diametro delle barre e  $\bar{\sigma}_n$  la tensione ammissibile, il numero di barre occorrenti nei due ordini è:

$$n = \frac{4 \cdot N}{\pi \cdot D^2 \cdot \bar{\sigma}_n \cdot \cos \alpha} \quad (5.84)$$

La cerniera Mesnager è una cerniera lineare ed il conglomerato ha solo funzione di ricoprimento. Poiché non conviene sollecitare l'acciaio oltre  $1400 \text{ kg/cm}^2$ , per trasmettere sforzi elevati occorrono cerniere molto lunghe per contenere le barre necessarie.

Il buon funzionamento delle cerniere a barre passanti è affidato principalmente ad un'ottima armatura trasversale di frettaggio la quale deve essere fissata con punti di saldatura alla principale, onde evitare spostamenti durante il getto.

Anche la cerniera Mesnager per quanto frequentemente adottata non è una felice soluzione quando si debbano trasmettere sforzi elevati.

### 5.5.3 Cerniere cilindriche

Più razionali sono le cerniere cilindriche, ormai convalidate da lunga esperienza di laboratorio e di cantiere, che possono essere fisse ovvero scorrevoli come quella rappresentata in fig. 5.78. Questa è costituita da un pilastro ottenuto da un cilindro sezionato con due piani paralleli e paralleli all'asse del cilindro e caricato lungo due generatrici opposte, da una forza  $N$ .

Pirard, considerando il problema piano e in regime elastico, in base ad esperienze fotoelastiche, ha trovato che la pressione verticale massima a metà al-

tezza è:

$$\sigma_x = \frac{2 \cdot N}{K \cdot D \cdot s} \quad \text{per } K < 0,4 \quad (5.85 a)$$

$$\sigma_x = \left( 0,20 + 0,40 \cdot K + \frac{0,354}{K} \right) \cdot \frac{2 \cdot N}{D \cdot s} \quad (5.85 b)$$

per  $K > 0,40$ , essendo  $s$  lo spessore normale al piano di figura.

La tensione orizzontale massima  $\sigma_z$  data da:

$$\sigma_z = \frac{2 \cdot K^2}{\pi \cdot D \cdot s} \cdot N \quad (5.86)$$

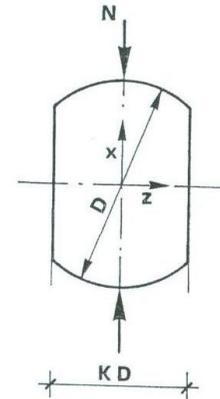


Fig. 5.78 - Cerniera cilindrica.

Si vede che tanto minore è  $K$ , tanto più stretto il cilindro, tanto minore è  $\sigma_z$  e che aumentando  $K$ , se il suo valore è prossimo all'unità, la pressione massima  $\sigma_x$  aumenta di poco.

In realtà a seguito della deformazione del conglomerato il contatto non avviene lungo una generatrice bensì lungo un rettangolo con intensità massima della pressione in corrispondenza della generatrice di contatto teorico.

Nei casi di una superficie cilindrica poggiate su un piano la pressione massima sulla generatrice di contatto teorica è:

$$\sigma_{x \max} = 678 \sqrt{\frac{N}{s \cdot \pi \cdot D}} \quad (5.87)$$

Le esperienze rivelano che sulle superfici di contatto, quando queste siano parziali, possono raggiungersi tensioni ben maggiori della resistenza prismica del conglomerato, prima di giungere alla rottura, per un effetto cerchiante del conglomerato che circonda l'area di contatto (cfr. cap. 2).

Caquot suggerisce il rapporto di maggiorazione

$$\gamma = 1 + \frac{\pi}{2} = 2,57 \quad (5.88)$$

e le esperienze mostrano che tale valore è in difetto.

Le esperienze eseguite su cerniere in conglomerato del tipo della fig. 5.78 hanno evidenziato che la loro resistenza non è caratterizzata dalla intensità della pressione di contatto bensì dalla larghezza  $K D$  del pilastro, ossia la resistenza è caratterizzata dalla pressione media nel pilastro

$$\sigma_x = \frac{N}{K \cdot D \cdot s} \quad (5.89)$$

La pressione media misurata corrispondente alla prima lesione in prossimità delle superfici di contatto è stata sempre di poco superiore a quella di sicurezza del conglomerato; gli elementi erano fortemente frettati ed il conglomerato presentava una resistenza cubica intorno ai 400 kg/cm<sup>2</sup>.

La condizione essenziale per il buon funzionamento di tali cerniere è un robusto frettaggio del conglomerato che può essere calcolato con il metodo esposto al par. 5.2.1.5.

Si può dire che la percentuale di acciaio di frettaggio per un'altezza pari circa alla larghezza, debba essere del 4% del volume (quando l'elemento sia dimensionato per il carico di sicurezza del conglomerato).

Si consiglia poi che il raggio del cilindro non sia inferiore allo spessore  $s$ .

Le esperienze hanno posto in evidenza che ferri passanti attraverso tali cerniere sono dannosi, provocando spesso il disgregamento del conglomerato a meno che siano molto adagiati.

#### 5.5.4 Cerniere a contatto lastra

Si possono realizzare ottime cerniere con lastre di piombo o di neoprene, ed anche di conglomerato (Freyssinet) come in fig. 5.79.

La larghezza  $b_0$  del conglomerato viene dimensionata in modo da avere elevati valori della compressione media, che portino il conglomerato in regime plastico. La fig. 5.79 a mostra il convogliamento delle tensioni di compressione attraverso la cerniera.

Le esperienze hanno messo in luce che la resistenza della zona di contatto è ancora maggiore di quella delle cerniere cilindriche e raggiunge 5 volte quella prismatica del conglomerato.

Per un buon funzionamento è bene non ridurre la larghezza del conglomerato ad disotto di 6 cm e che lo spessore non superi 15 ÷ 20 mm.

Anche per queste cerniere il frettaggio calcolato, secondo quanto detto al n. 5.2.1.5, e costituito da grate del tipo della fig. 5.6, non dovrà essere inferiore al 4% del volume, per un'altezza del pilastro pari alla sua larghezza e del 2% per altrettanta altezza.

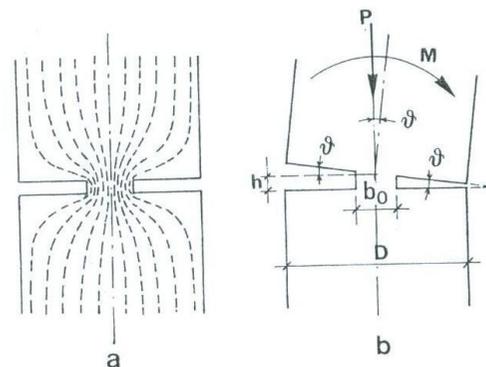


Fig. 5.79 - Cerniera a lastra.

Non sono consigliabili ferri passanti e l'attrito è sufficiente ad assorbire componenti normali all'asse della cerniera. Peraltro, se si richiede un ancoraggio trasversale, è preferibile inserire spezzoni corti e di grosso diametro ovvero ferri di piccolo diametro e molto adagiati (fig. 5.80). Le esperienze mostrano che per pressioni medie fino a 250 kg/cm<sup>2</sup> e rotazione < 1/300, non si producono lesioni.

Una cerniera di tipo intermedio è quella della fig. 5.81 ove si ha un'armatura passante di piccola area e convenientemente frettata. Lo sforzo è ancora affidato al nucleo di conglomerato, ma anche i ferri longitudinali collaborano per quanto in misura minima.

Sostanzialmente non vi è differenza di comportamento rispetto alle cerniere di cui si è parlato al paragrafo precedente.

Tale tipo di cerniera conviene per piccole rotazioni e può sostituire la precedente, quando la componente trasversale dello sforzo sia percentualmente elevata rispetto alla componente assiale.

#### 5.5.5 Pendoli

Quando la cerniera debba essere anche scorrevole, possono adottarsi dei rulli in conglomerato, dimensionati come visto al n. 5.5.3. Ma anche le cerniere a lastre di contatto (conglomerato, piombo o neoprene) si prestano a formare dei

