

Equazioni di 2° grado complete

Si è vista la forma generale che può assumere una equazione di 2° grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{dove } a, b, c \\ \text{sono 3 numeri} \\ \text{generici.}$$

Finoora ci siamo occupati di risolvere questa equazione in alcuni casi particolari:

1) $b=0, c=0 \rightarrow ax^2=0 \quad \text{equazione monomia}$

2) $b=0 \rightarrow ax^2+c=0 \quad \text{equazione pura}$

3) $c=0 \rightarrow ax^2+bx=0 \quad \text{equazione spuria}$

Ci resta da studiare il cosiddetto caso completo, ovvero quello in cui tutti e tre i coefficienti sono diversi da zero.

Per esempio: $2x^2 - 3x + 1 = 0$

è un'equazione completa in cui: $a=2$

$$b=-3$$

$$c=1$$

(1)

Risolvere questa equazione significa trovare dei valori che messi al posto della "x" rendono l'uguaglianza vera.

Ci serve un metodo, un procedimento, una formula che ci dica se le soluzioni di quella equazione esistono e che, se esistono, ci permetta di calcolarle.

Per trovare tale "metodo" si deve ragionare sull'equazione generale e fare alcuni passaggi algebrici. L'equazione generale è:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

moltiplichiamo i due termini per la quantità "4a" (che è un numero, visto che "a" è un numero):

$$4a(ax^2 + bx + c) = 4a \cdot 0$$

effettuiamo i prodotti:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Ora sommiamo il termine b^2 (anch'esso un numero) ad ambo i membri, si otterrà così la seguente equazione:

(2)

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$$

→ questi 3 termini sono lo sviluppo di un quadrato di binomio $(2ax+b)^2$, l'equazione si scriverà così:

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac \quad \left(\begin{array}{l} \text{si è portato} \\ \text{il termine } 4ac \\ \text{da un membro} \\ \text{all'altro,} \\ \text{cambiando segno} \end{array} \right)$$

Guardiamo l'equazione a cui siamo giunti, c'è una quantità al quadrato uguale al numero " $b^2 - 4ac$ ". Questo numero si chiama discriminante e si indicherà con la lettera greca Δ (delta).

Gli ragionamento da seguire ora è identico a quello che abbiamo fatto per le equazioni pure:

1) se $\Delta < 0$ l'equazione è impossibile perché un quadrato non può essere pari ad un numero negativo

2) se $\Delta = 0$, l'equazione diventa $2ax + b = 0$ che è un'equazione di 1° grado ed ha una sola soluzione:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

(3)

3) se $\Delta > 0$, come nel caso delle equazioni pure, l'equazione si sviluppa come segue:

$$(2ax + b)^2 = \Delta$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{\Delta}$$

$$\begin{aligned} 2ax &= -b \pm \sqrt{\Delta} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$



Questa è la formula risolutiva nel caso di $\Delta > 0$, le soluzioni sono 2, la prima si ottiene mettendo il "-" davanti la radice, la seconda mettendo il "+"

La seguente tabella presenta tutti i casi di soluzione di un'equazione completa:

caso	numero soluzioni	valore soluzioni
$\Delta < 0$	nessuna	impossibile
$\Delta = 0$	unica soluzione	$x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta > 0$	doppia soluzione	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

(4)

Dunque volendo definire un percorso per risolvere equazioni di 2° grado complete, la prima cosa da fare è calcolare il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

A seconda del segno che si ottiene, si individua il caso in cui ci si trova e si procede di conseguenza.

Qualche esempio può aiutare a capire, prendiamo l'equazione già indicata:

$$(2)x^2 - 3x + 1 = 0$$

a b c

cominciamo con il calcolo

del Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (1) = \\ = 9 - 8 = 1$$

dunque $\Delta > 0$ ci troviamo nel caso 3), ci sono 2 soluzioni che calcoliamo con la formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{3 \pm 1}{4} \quad \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ (soluzione usando il "-")} \\ x_2 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ (soluzione usando il "+")} \end{array} \right.$$

$$x_2 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{soluzione} \\ \text{usando il "+"} \end{array} \right)$$

(5)

Facciamo altri esempi:

$$(4)x^2 + 4x + 1 = 0$$

a b c

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (1) = \\ = 16 - 16 = 0$$

Gli discriminante è nullo, quindi c'è un'unica soluzione

$$x = -\frac{b}{2a}, \text{ sostituiamo i valori e abbiamo:}$$

$$x = -\frac{4}{2 \cdot 4} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Ultimo esempio:

$$4x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (1) = \\ = 1 - 16 = -15$$

$\Delta < 0$ quindi questa equazione completa è impossibile e non presenta alcuna soluzione.

(6)