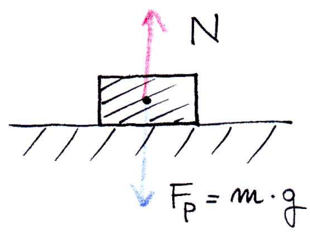
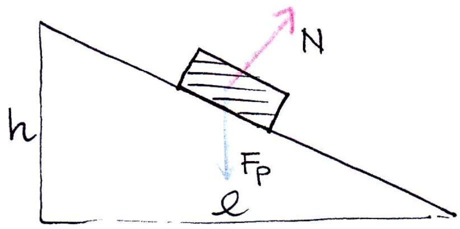
Equilibrio dei corpi su di un piano inclinato

Si è detto finora che un corpo si trova in condizioni di equilibrio quando la risultante delle forze su di esso applicate è pari al vettore nullo.

Questa è, per esempio, la condizione in cui si trova un corpo poggiato su di un tavolo: la forza peso viene equilibrata dalla reazione normale N del tavolo, che rappresenta per il corpo un vincolo.



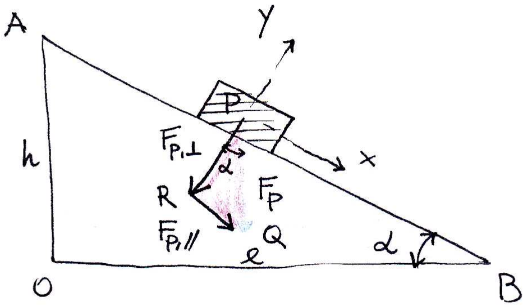
Consideriamo ora la situazione in cui lo stesso corpo viene posizionato su di un piano inclinato, ovvero un piano la cui giacitura sia non orizzontale. Ci chiediamo: in assenza di attrito (vincolo liscio), il corpo può trovarsi in condizioni di equilibrio?

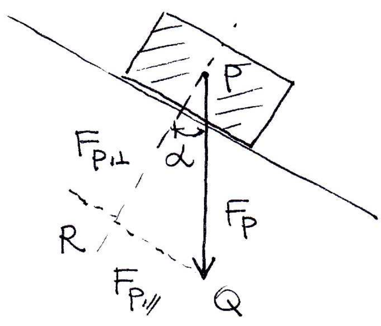


Per rispondere a questa domanda dobbiamo individuare le forze che agiscono sulla massa, ovvero, nel caso specifico, la forza peso e la reazione del vincolo liscio.

Cio' che cambia rispetto al caso precedente è che ora, essendo la reazione N del vincolo liscio perpendicolare alla superficie del vincolo stesso, essa non potra' mai essere uguale e contraria alla forza peso. Volendola dire diversamente la reazione del vincolo puo' equilibrare solo la componente della forza peso che è perpendicolare alla superficie del vincolo, mentre non puo' equilibrare la componente parallela. Di conseguenza il corpo non sara' mai in condizioni di equilibrio.

Si capisce ora, dunque, l'importanza di valutare le due componenti della forza peso: quella perpendicolare e quella parallela, per comprendere quanta forza peso viene equilibrata dal vincolo e quanta, invece, da muovere il corpo.





Osservando le figure a lato, è possibile fare subito una considerazione, gli angoli in B e in P sono uguali perche' formati da direzioni a due a due perpendicolari.

$\overline{PQ}$ è perpendicolare ad $\overline{OB}$, e $\overline{PR}$ è perpendicolare ad $\overline{AB}$, dunque l'angolo in P è esattamente l'angolo in B ruotato di 90° in senso antiorario (entrambi gli angoli si sono indicati con α).
Ora guardiamo ai triangoli $O\hat{A}B$ e $P\hat{Q}R$, essi sono entrambi rettangoli, ed inoltre hanno uguale l'angolo "α", per cui anche il 3° angolo dovrà essere uguale (perché la somma degli angoli in un triangolo è 180°). Ma due triangoli che hanno angoli uguali sono <u>simili</u>, cioè sono composti da lati che sono tra di loro in proporzione. E' possibile così scrivere:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{RQ}}$$

che guardando alla figura può anche scriversi:

$$\frac{\sqrt{\ell^2+h^2}}{F_P} = \frac{\ell}{F_{P,\perp}} = \frac{h}{F_{P,//}}$$

$\sqrt{\ell^2+h^2}$ → ipotenusa del piano inclinato

ℓ → lunghezza del piano inclinato

h → altezza del piano inclinato

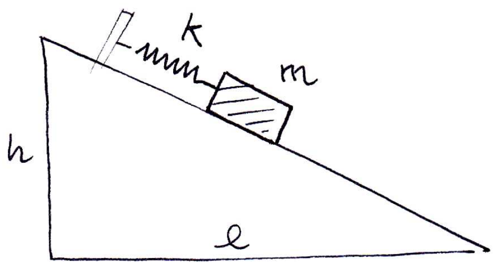
Ricordando che in una proporzione il "medio" è pari al prodotto degli "estremi" diviso l'altro "medio", si ottiene:

1) $$\frac{\sqrt{\ell^2+h^2}}{F_P} = \frac{\ell}{F_{P,\perp}} \longrightarrow F_{P,\perp} = \frac{F_P \cdot \ell}{\sqrt{\ell^2+h^2}} = \boxed{m \cdot g \cdot \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+h^2}}}$$

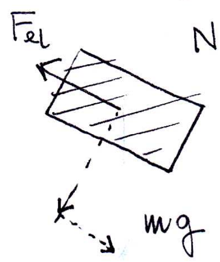
2) $$\frac{\sqrt{\ell^2+h^2}}{F_P} = \frac{h}{F_{P,//}} \longrightarrow F_{P,//} = \frac{F_P \cdot h}{\sqrt{\ell^2+h^2}} = mg \cdot \frac{h}{\sqrt{\ell^2+h^2}}$$

Se si vuole conoscere la reazione normale del piano, essa sara' uguale e contraria alla componente perpendicolare della forza peso, mentre una eventuale forza che tenga fermo il corpo dovra' essere uguale e contraria alla componente parallela della forza peso.

Facciamo un esempio per chiarire le idee:



una massa $m = 4\ Kg$ é poggiata su di un piano inclinato di altezza $h = 3m$ e lunghezza $l = 4m$.
Il corpo é tenuto in equilibrio da una molla di costante elastica $k = 40\ N/cm$. Quanto si allunga la molla?



Analizziamo lo schema delle forze sulla massa "m", se essa si trova in equilibrio vuol dire che la reazione normale é uguale e contraria alla forza peso perpendicolare, e che la forza elastica é uguale e contraria alla forza peso parallela:

$$N = F_{p,\perp} = \frac{mg\,l}{\sqrt{l^2+h^2}} = \frac{4 \cdot 9{,}81 \cdot 4}{\sqrt{9+16}} = \frac{16 \cdot 9{,}81}{5} = 31{,}39\ N$$

$$F_{el} = F_{p,//} = \frac{mg\,h}{\sqrt{l^2+h^2}} = \frac{4 \cdot 9{,}81 \cdot 3}{\sqrt{9+16}} = \frac{12 \cdot 9{,}81}{5} = 23{,}54\ N$$

Nota ora la forza elastica, per calcolare di quanto si sia allungata la molla applichiamo la formula inversa della legge di Hooke:

$$F_{el} = k \cdot \Delta l \rightarrow \Delta l = \frac{F_{el}}{K} = \frac{23,54\,N}{40\,N/cm} = \boxed{0,59\ cm}$$

Dunque la molla si allungherà di quasi 6 mm.