Appunti studio dominio e positività di una funzione

Si consideri la seguente funzione:

$$y = \log_2 (x^3 - 7x^2 + 6)$$

cominciamo con lo studiare il dominio. Per farlo dobbiamo rispondere alle seguenti

domande:

1) ci sono frazioni? No (se ci fossero state avremmo dovuto prendere il denominatore e porlo $\neq 0$)

2) ci sono radici di indice pari? No (se ci fossero state avremmo dovuto prendere il loro argomento e porlo ≥ 0)

3) ci sono logaritmi? Si!!! Dobbiamo allora prendere l'argomento del logaritmo e porlo maggiore di 0

Dominio:

$$x^3 - 7x^2 + 6 > 0$$

poiche' c'e' un'unica condizione non bisogna fare un sistema. La soluzione di questa disequazione sara' direttamente il dominio.

La disequazione che abbiamo è pero' di 3° grado per poterla risolvere va scomposta con la regola di Ruffini.

Come usiamo Ruffini per scomporre?
La 1ª cosa da fare è trovare una soluzione per tentativi dell'equazione: $x^3 - 7x^2 + 6 = 0$

Tale soluzione va cercata tra i divisori del termine noto: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Partiamo con $x = 1$

$1^3 - 7 \cdot 1^2 + 6 = 1 - 7 + 6 = 0$ OK $x = 1$ è soluzione dell'equazione.

Ora si costruisca lo schemino:

qui si mettono i coefficienti dell'equazione. Si noti che se un termine manca si mette zero.

qui si mette la soluzione trovata

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -7 & 0 & 6 \\ 1 & & 1 & -6 & -6 \\ \hline & 1 & -6 & -6 & // \\ & x^2 & x & \text{t.n.} & \end{array}$$

Il risultato dello schema di Ruffini è a lato.
Ora come si procede:
il primo termine della scomposizione è "x" meno la soluzione trovata, (quindi $x - 1$), il secondo è dato dal risultato dello schema di Ruffini in cui il primo termine è il coefficiente della "x" diminuita di un grado rispetto all'equazione. In altre parole si ottiene:

$$\underbrace{(x - 1)}_{F_1} \cdot \underbrace{(x^2 - 6x - 6)}_{F_2} > 0$$

questa disequazione si può studiare analizzando il segno dei due termini del prodotto F_1 ed F_2

$F_1: \quad x-1>0 \rightarrow x>1$

Si ricorda che i 2 termini F_1 ed F_2 si studiano sempre maggiori di zero, nel caso nell'equazione di partenza ci sia l'uguale, si mette l'uguale anche ad F_1 ed F_2

$F_2: \quad x^2-6x-6>0$

è di 2° grado, quindi si studia il Δ:

$\Delta = b^2-4ac =$

$= 36+24 = 60 > 0$

Andiamo sulla tabella ed in corrispondenza della riga con il >0 e la colonna con $\Delta>0$ troviamo come soluzione:

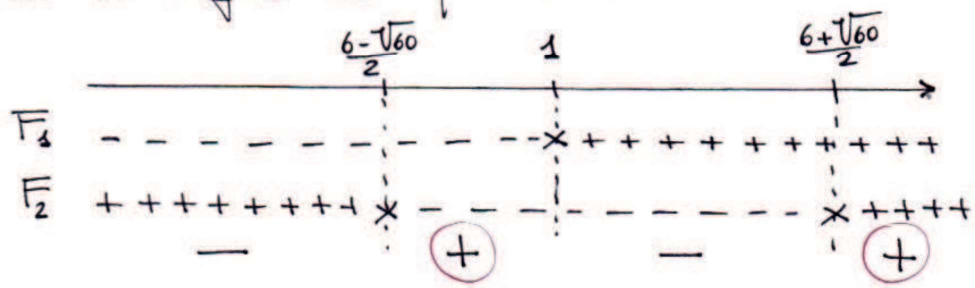
$x<x_1 \cup x>x_2$

x_1 ed x_2 sono le soluzioni dell'equazione di 2° grado:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{60}}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{6-\sqrt{60}}{2} \cong -0{,}87 \\ x_2 = \frac{6+\sqrt{60}}{2} \cong 6{,}87 \end{cases}$$

Quindi la soluzione della 2ª disequazione sarà: $x < \frac{6-\sqrt{60}}{2} \cup x > \frac{6+\sqrt{60}}{2}$

Studiamo ora il segno del prodotto:

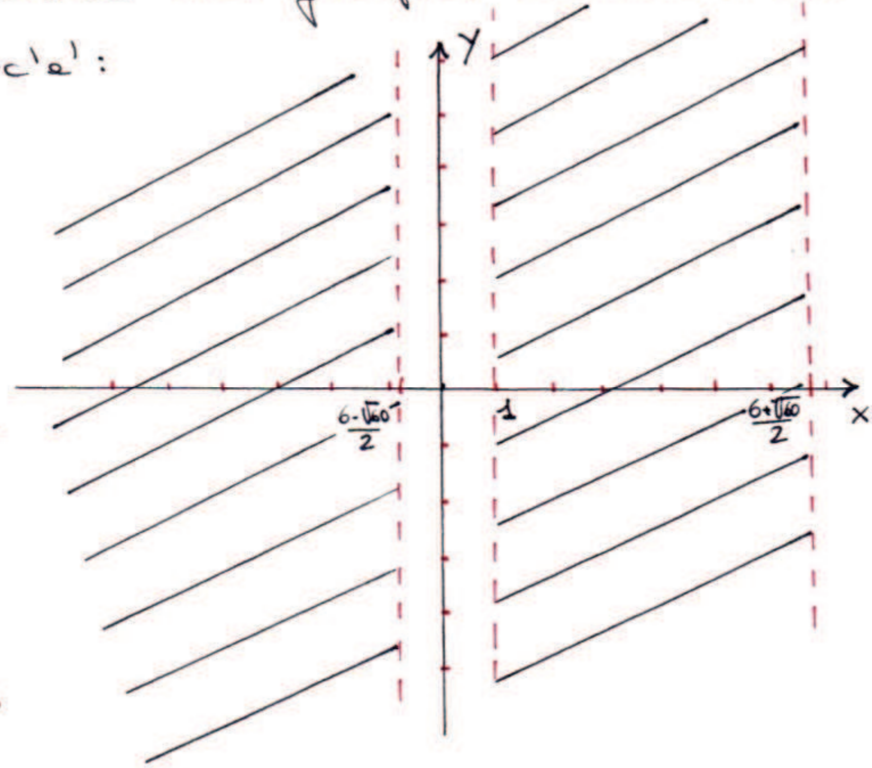


Nello schema con i segni quelli che ci interessano sono i "+" perchè la disequazione iniziale porta come segno il >0

Dunque il dominio della nostra funzione è:

$$x \in \left]\frac{6-\sqrt{60}}{2}, 1\right[\cup \left]\frac{6+\sqrt{60}}{2}, +\infty\right[$$

Andiamo a sbarrare sul grafico le zone in cui la funzione non c'e':



A questo punto ci piacerebbe sapere se, laddove esiste, la funzione assume valori positivi o negativi, in altre parole se essa si trova sopra o sotto l'asse delle "x".

Questa domanda trova risposta nello studio della positivita' della funzione la quale si svolge molto semplicemente prendendo l'intera funzione e ponendola ≥ 0

Positivita': $\log_2(x^3-7x^2+6) \geq 0$

questa è una disequazione logaritmica, per risolverla dobbiamo eliminare il logaritmo, cosa che si effettua "esponenziando" entrambi i 2 termini con la base del logaritmo.

$$\cancel{2}^{\cancel{\log_2}\left(x^3-7x^2+6\right)} \geq 2^0$$

N.B.: nel caso in cui la base con la quale si esponenzia sia minore di 1, il verso della disuguaglianza andrebbe girato (da $\geq$ diverrebbe $\leq$)

"2" alla base e "$\log_2$" all'esponente si semplificano e si ottiene:

$$x^3-7x^2+6 \geq 1$$

$$x^3-7x^2+5 \geq 0$$

a questo punto questa disequazione dovrebbe essere risolta come la precedente con Ruffini, ma purtroppo non siamo in grado di trovare la soluzione per tentativi. Siamo costretti a fermarci.

Sotto per completezza si riporta il grafico della funzione svolto con una applicazione PC: