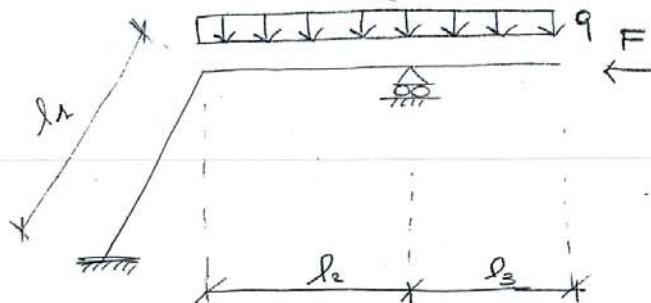


Esercitazione (ing. MODESTI)



$$F = 22000 \text{ Kg}$$

$$E = 300000 \text{ Kg/cm}^2$$

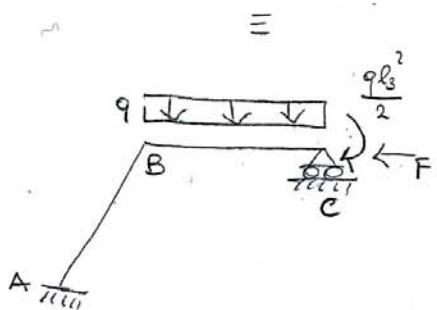
$$q = 6200 \text{ kg/m}$$

$$I = 540000 \text{ cm}^4$$

$$l_1 = 4,4 \text{ m}$$

$$l_2 = 4 \text{ m}$$

$$l_3 = 2,4 \text{ m}$$



Le strutture sono 1 modo spostabile

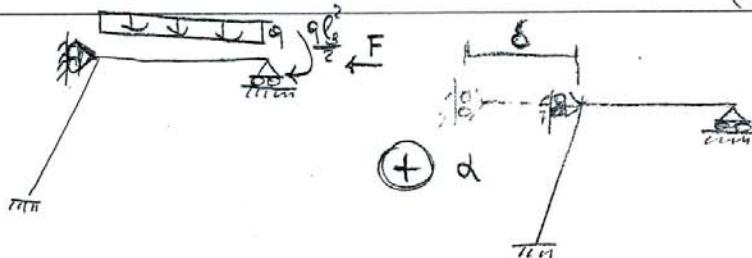
parametri incogniti:

$$\varphi_B, \delta$$

Le sollecitazioni sulla struttura di partenza su modi spostabili sono ottenibili dalla somma:

* delle sollecitazioni che mancano sulla stessa trave su modi fissi (mettendo un carrello in B) soggetta ai carichi esterni applicati (SCHEMA 1).

* di VOLTE le sollecitazioni che mancano su di essa per effetto del solo spostamento arbitrario δ (SCHEMA 2)



SOLUZIONE SCHERMA 1 AL M.DI CROSS

- Rigidità delle aste
- Coefficienti di ripartizione
- Momenti di incastro perfetti
- Coeff. di Transporto



- Rigid flessionale è quel momento che deve applicare nell'estremo i dell'asta i per ottenere nello stesso estremo una rotazione unitaria φ
- La rig. fless. è direttamente proporzionale al modulo elastico del materiale (E) e all'inerzia della trave ed è INVERSALEMENTE proporzionale alla lunghezza della trave

Ritendendo il mozzetto in B :

- ASTA AB incastro - incastro  $W_{ABA} = \frac{4EI}{l_1}$

- ASTA BC incastro - appoggia  $W_{BC} = \frac{3EI}{l_2}$

$$W_{BA} = \frac{4EI}{l_1} = \frac{4 \times 200000 \times 540000}{440} = 1,473 \cdot 10^9 \text{ Kg cm}$$

$$W_{BC} = \frac{3EI}{l_2} = \frac{3 \times 300000 \times 540000}{400} = 1,215 \cdot 10^9 \text{ Kg cm}$$

COEFF. di RIPARTIZIONE \rightarrow Ci dice come il momento applicato nel modo si ripartisce tra le aste concorrenti nel modo.

$$\gamma_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_i w_{ij}}$$

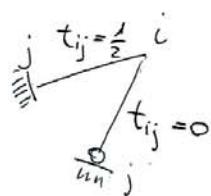
Condizione della proprietà: $\sum_j \gamma_{ij} = 1$

$$-\gamma_{BA} = \frac{w_{BA}}{w_{BA} + w_{BC}} = 0,548$$

$$-\gamma_{BC} = \frac{w_{BC}}{w_{BA} + w_{BC}} = 0,452$$

COEFF. DI TRASPORTO

\rightarrow Ci dice quale momento insorge nell'estremo j per effetto del momento unitario nell'estremo i .



$$\text{In generale } t_{ij} = \frac{v_{ji}}{w_{ij}}$$

$$t_{BC} = 0$$

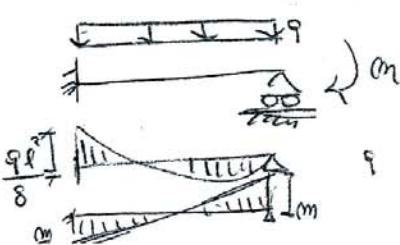
$$t_{BA} = 1/2$$

TEOREMI DI INCASTRO PERFETTO \rightarrow Sono i momenti in "i" e "j" quando in tali estremi c'è presente un incastro.

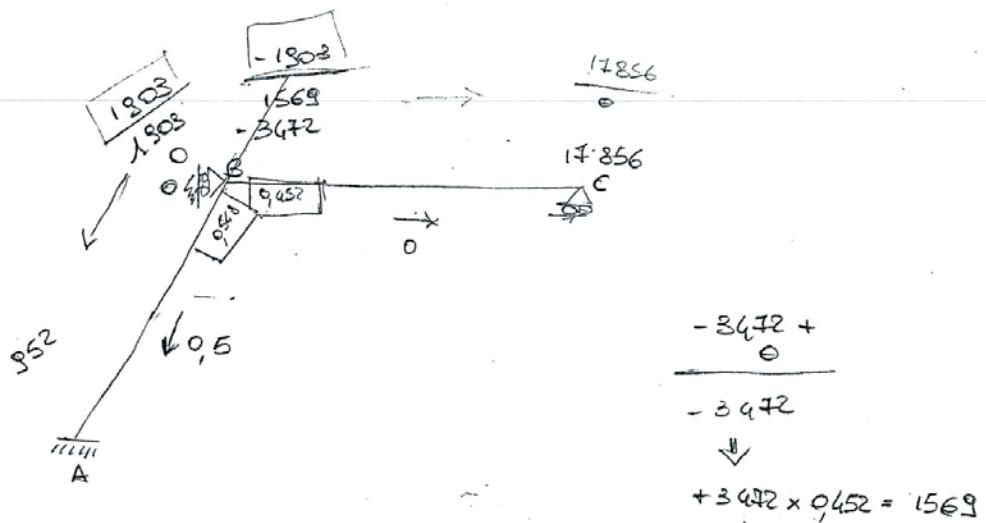
$$\mu_{BT} = 0 \rightarrow \text{L'asta non è caricata}$$

$$\begin{aligned} \mu_{BC} &= \frac{m}{2} - \frac{q l_2^2}{8} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{q l_3^2}{2} - \frac{q l_2^2}{8} \end{aligned}$$

CONVENT.



$$M_{CB} = m = \frac{ql^3}{2} = 17856 \text{ kg m}$$

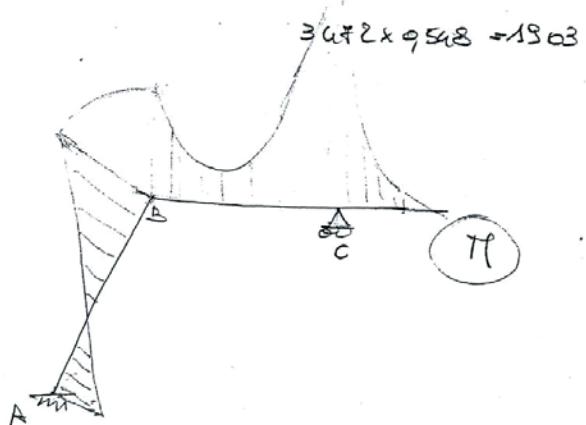


$$T_{AB} = 852 \text{ kg m}$$

$$T_{BA} = 1803 \text{ kg m}$$

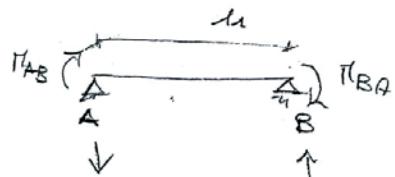
$$M_{BC} = -1803 \text{ kg m}$$

$$M_{CB} = 17856 \text{ kg m}$$

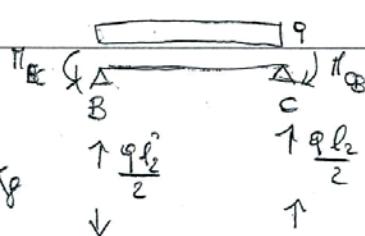


TAGLIO

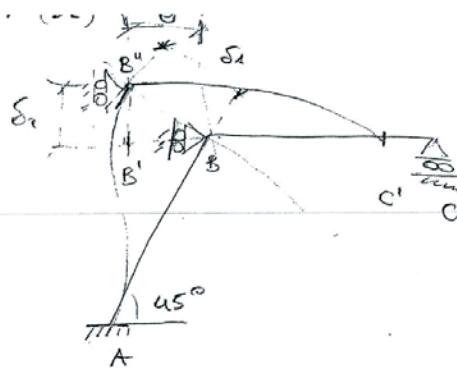
$$T_{AB} = T_{BA} = \frac{|T_{AB}| + |T_{BA}|}{l_2} = -648 \text{ kg}$$



$$T_{BC} = \frac{ql^2}{2} + \frac{|M_{BC}| - |M_{CB}|}{l_2} = 8412 \text{ kg}$$



$$T_{CB} = -\frac{ql^2}{2} + \frac{|T_{BC}| - |T_{CB}|}{l_2} = -16388 \text{ kg}$$



$$\delta_2 = \delta$$

$$\delta_1 = \sqrt{2} \delta$$

$$\delta = 10^{-2} \text{ cm} \quad \delta_1 = \sqrt{2} \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

$$\delta_2 = 10^{-2} \text{ cm}$$

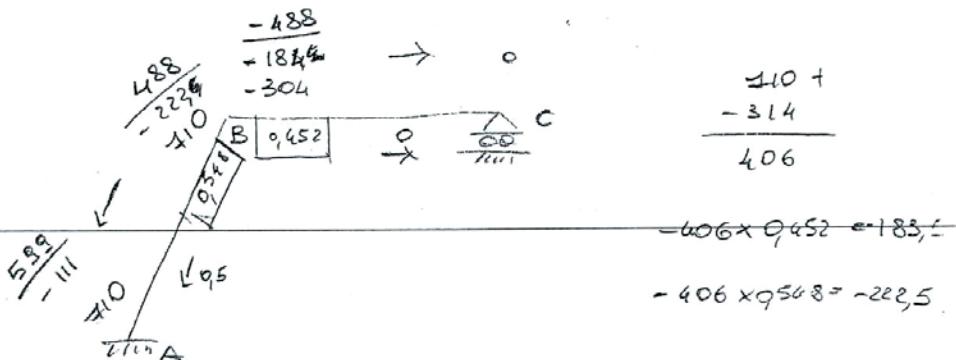
MOMENTI di INCASTRO PERFETTO

$$\mu_{BA} = \frac{6EI}{l_1^2} \cdot \delta_1 = \frac{6 \times 300000 \times 540000}{440^2} \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-2}$$

$$= 7100 \text{ kg cm} = 710 \text{ kg m} = \mu_{AB}$$

$$\mu_{BC} = - \frac{3EI}{l_2^2} \cdot \delta_2 = - \frac{3 \times 300000 \times 540000}{400^2} \cdot 10^{-2}$$

$$= -30375 \text{ kg cm} = -304 \text{ kg m}$$

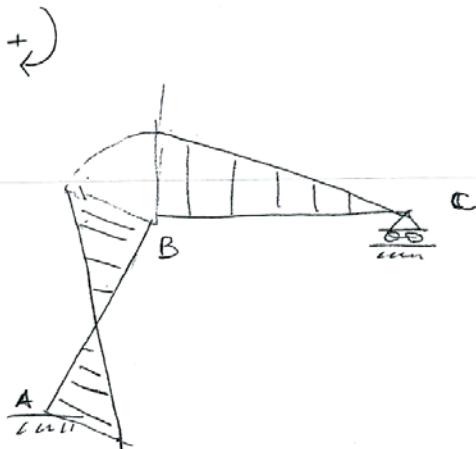


$$M_{AB} = 588 \text{ kg m}$$

$$T_{BA} = 488 \text{ kg m}$$

$$M_{BC} = -488 \text{ kg m}$$

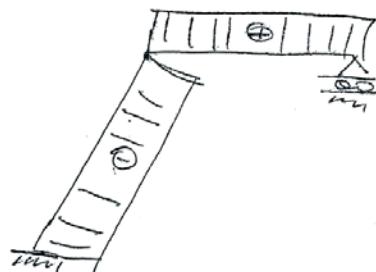
$$\tau_{\phi} = 0$$



TAGLIO

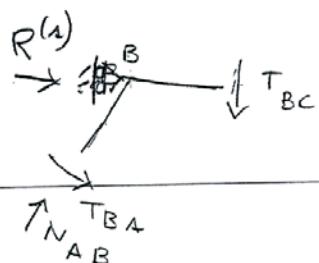
$$T_{AB} = T_{BA} = -\frac{|M_{AB}| + |M_{BA}|}{l_2} = -247 \text{ kg}$$

$$T_{BC} = T_{CB} = \frac{|M_{BC}|}{l_2} = 122 \text{ kg}$$



SFORZO NORMALE

$$\gamma \uparrow N_{AB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - T_{BC} - T_{BA} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$



$$N_{AB} = \sqrt{2} T_{BC} + T_{BA} = 420 \text{ kg}$$

$$N_{BC} = 0$$

$$\Rightarrow R^{(1)} + N_{AB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + T_{BA} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad R^{(1)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} (N_{AB} + T_{BA}) = -420 \text{ kg}$$

Perciò determinare α basterà impostare:

$$R^{(0)} + \alpha R^{(1)} = 0$$

$$\alpha = \frac{R^{(0)}}{R^{(1)}} = \frac{12620}{472} = 26,843$$

Sollecitazioni effettive

$$T_{ij} = T_{ij}^{(0)} + \alpha T_{ij}^{(1)}$$

$$T_{AB} = T_{AB}^{(0)} + \alpha T_{AB}^{(1)} = 852 + 26,843 \times 588 = 12031 \text{ Kg}$$

$$T_{BA} = 1803 + 26,843 \times 428 = 15002 \text{ Kg m}$$

$$T_{BC} = -1803 + 26,843 \times (-938) = -15002 \text{ Kg m}$$

$$T_{CB} = 17856$$

$$T_{AB} = -648 + 26,843 \times (-247) = -7273 \text{ Kg}$$

$$T_{BA} = -7273 \text{ Kg}$$

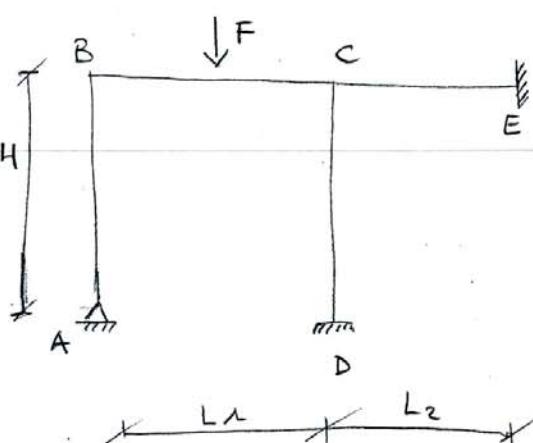
$$T_{BC} = 8412 + 26,843 \times 122 = 11687 \text{ Kg}$$

$$T_{CB} = -16388 + 26,843 \times 122 = -13113 \text{ Kg}$$

$$N_{AB} = 12545 + 26,843 \times 420 = 23818 \text{ Kg}$$

$$N_{BA} = N_{AB} = 23818 \text{ Kg}$$

$$N_{BC} = N_{CB} = 22000 + 26,843 \times 0 = 22000 \text{ Kg}$$



$$F = 215 \text{ kN}$$

$$L_1 = 4,6 \text{ m}$$

$$L_2 = 3,2 \text{ m}$$

$$H = 3,8 \text{ m}$$

$$I_{\text{plast}} = 213.333 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{\text{trans}} = 720.000 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$E = 30000 \text{ N/mm}^2$$

a) Si vede se la strutt. è su nodi fissi o su nodi spost.

• si può utilizz. la regn. $3t - 2c \leq 0$ cond. NECESS. MA NON SUFF.

$$\begin{aligned} & 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = \\ & \quad | \\ & = 12 - 12 = 0 \Rightarrow \text{nodi fissi} \end{aligned}$$

- sempre mult. di 3 e inestensibili, consid. la strutt. reticolare associata \Rightarrow si può osservare quali vincoli auxiliari si devono aggiungere a renderlo a nodi fissi, e impedire gli spost.

La strutt. è su nodi fissi \Rightarrow i parametri cinematici incogniti sono le rotaz. dei nodi INTERNI

In questo caso sono due: φ_B, φ_C

Si impongono 2 condiz. di EQUILIBRIO alle rotaz. de due nodi

$$\begin{cases} \Pi_{BC} + \Pi_{BA} = 0 & (\text{Nodo B}) \\ \Pi_{CB} + \Pi_{CD} + \Pi_{DC} = 0 & (\text{Nodo C}) \end{cases}$$

In generale: $\Pi_{ij} = W_{ij}\varphi_i + V_{ij}\varphi_j + \mu_{ij} \underbrace{(-\mu_{ji}\varphi_j)}_7$



$$W_{BC} = \frac{4EI}{l} \quad M_{BC} = -\frac{Fl}{8}$$

$$V_{BC} = \frac{2EI}{l}$$

questo termine
sarebbe solo se
il sensi spesi
relativi tra gli
estremi delle est
sarebbero
nullo

$$\begin{aligned} \Pi_{BC} &= W_{BC} \cdot \varphi_B + V_{BC} \cdot \varphi_C + \mu_{BC} \\ &= \frac{4EI}{L_1} \cdot \varphi_B + \frac{2EI}{L_1} \cdot \varphi_C + \frac{Fl}{8} \end{aligned}$$

$$\Pi_{BA} = W_{BA} \cdot \varphi_B + V_{BA} \cdot \varphi_A + \mu_{BA}$$

A è un vincolo esterno
 $\Rightarrow \varphi_A$ non è un parametro
di spost. indipend.

$$= \frac{3EI}{H} \cdot \varphi_B$$

$$A \quad B$$

$$W_{BA} = \frac{3EI}{H}$$

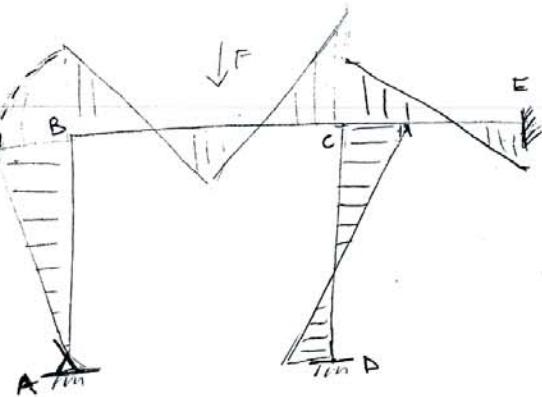
$$\begin{aligned} \Pi_{CB} &= W_{CB} \cdot \varphi_C + V_{CB} \cdot \varphi_B + \mu_{CB} \\ &= \frac{4EI}{L_1} \cdot \varphi_C + \frac{2EI}{L_1} \cdot \varphi_B + \frac{FL_1}{8} \end{aligned}$$

$$M_{\Phi} = W_{\Phi} \cdot \psi_c = \frac{4EI}{H} \cdot \psi_c$$

$$M_{CE} = W_{CE} \cdot \psi_c = \frac{4EI}{L_2} \cdot \psi_c$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \frac{EI_t}{L_1} \cdot \psi_B + 2 \frac{EI_t}{L_1} \cdot \psi_c - \frac{FL_1}{8} + \frac{3EI_p}{H} \cdot \psi_R = 0 \\ 4 \frac{EI_t}{L_1} \cdot \psi_c + 2 \frac{EI_t}{L_1} \cdot \psi_B - \frac{FL_1}{8} + \frac{4EI_p}{H} \cdot \psi_c + \frac{4EI_t}{L_2} \cdot \psi_c = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{4EI_t}{L_1} + \frac{3EI_p}{H} \right) \psi_B + 2 \frac{EI_t}{L_1} \psi_c - \frac{FL_1}{8} = 0 \\ \frac{2EI_t}{L_1} \cdot \psi_B + \left(4 \frac{EI_t}{L_1} + \frac{4EI_p}{H} + \frac{4EI_t}{L_2} \right) \psi_c - \frac{FL_1}{8} = 0 \end{array} \right.$$



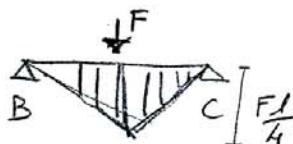
Vediamo come si può prevedere il pericolo del rotolamento.

Potendo dell'esta BC:

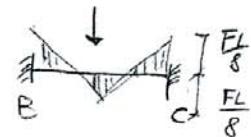
a) Se il palo AB è ^{rigido} e VESILE \Rightarrow non è in grado di impedire la rotazione dell'estremo B dell'esta \Rightarrow si capisce come APPoggio

Ipotizzando Tali condizioni ce e cd,

il 1° SCHEMA limite



b) AB RIGIDO \Rightarrow IMPEDE la ROTAZIONE in B
CD " " \Rightarrow " in C



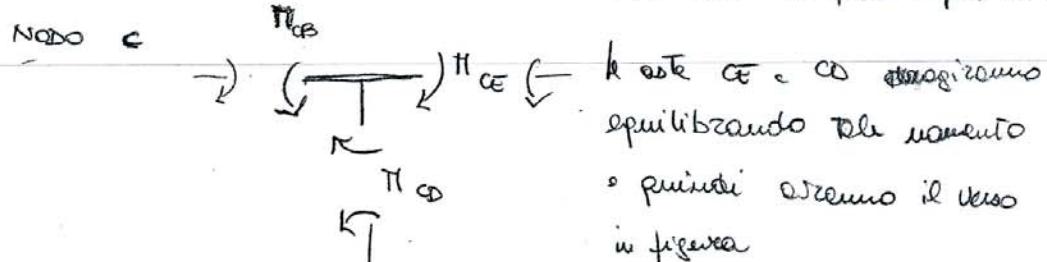
\Rightarrow Per le condiz. di vincolo reali il momento sarà compreso tra questi due schemi limite

In B: $0 < M_B < \frac{FL}{8}$ \Rightarrow è negativo \rightarrow tende le fibre sup.

C: $0 < M_C < \frac{FL}{2}$ ma $\neq M_B$ a causa della diversità delle resistenze delle estremità confluenti in C.

$$\Pi_A = \frac{1}{2} \Pi_B$$

Π_{CB} tende la fibra superiore.



$$\Pi_{CE} + \Pi_{CD} = \Pi_{CB}$$

$\Pi_{CE} \rightarrow$ tende la fibra superiore

$\Pi_{CD} \rightarrow$ " " " a destra

Se le astre CE e CD \rightarrow avessero la stessa rigidità

Π_{CB} si riporterebbe in parti uguali

Se invece un'asta è più flessibile di un'altra \Rightarrow questa assorbe più momento

RIGIDITÀ

\Rightarrow DIPENDE

$$\frac{\text{EI}}{L}$$

INERZIA

LUNGHEZZA

CONDIZ. DI VINCOLO

ASTA

$$\begin{cases} \text{CE} & I_t = 720.000 \\ \text{CD} & I_p = 213.000 \end{cases}$$

$$\rightarrow I_t \approx 3 \text{ volte } I_p$$

è 3 volte + Rigida

$$L_{CE} = L_2 = 3,2 \text{ m}$$

\rightarrow ASTA CE è + coetra quindi più rigida

$$L_{CD} = H = 3,8 \text{ m}$$

Vincolo CE : INCASTRO

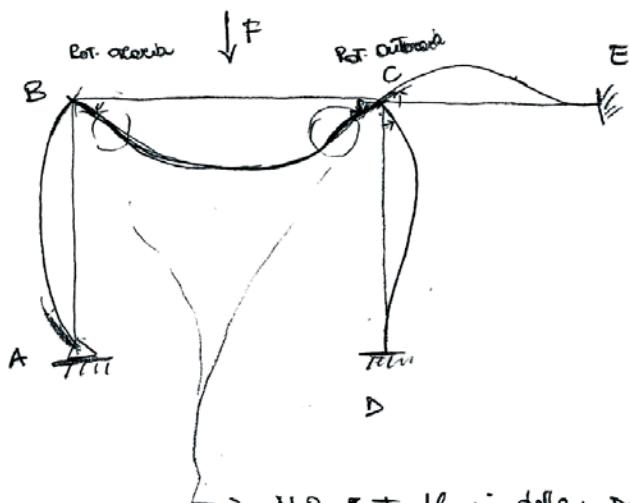
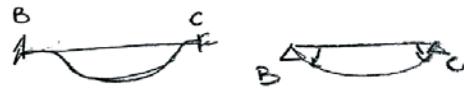
INCASSTO

$\Rightarrow \Pi_{CE} > \Pi_{CD}$ $\&$ adic l'asta CE è complesso.
+ RIGIDA

$$\pi_E = \frac{1}{2} \pi_{ce}$$

$$\pi_B = \frac{1}{2} \pi_{cd}$$

DEFORMATA



N.B. I flessi della deformazione corrispondono ai punti di nullo del diagramma del momento.

* Fibre Tese sup. \rightarrow concavità verso BASSO

* " INF \rightarrow concavità verso ALTO.