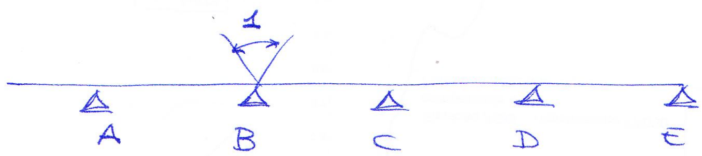
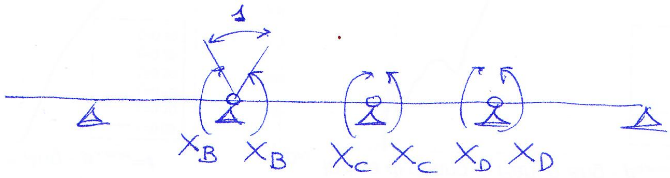
Esercitazione: Linee d'influenza di sistemi iperstatici

Si consideri la trave continua di seguito rappresentata:

e si voglia valutare la linea d'influenza del momento in B per forza verticale viaggiante. Il teorema di Betti generalizzato ci dice che essa equivale al diagramma degli spostamenti verticali quando in B è applicata una distorsione angolare unitaria negativa.



La prima possibilita', e la più immediata, per risolvere tale problema è l'applicazione del metodo delle forze, prevedendo tre cerniere nei punti B, C, D e le relative incognite iperstatiche.



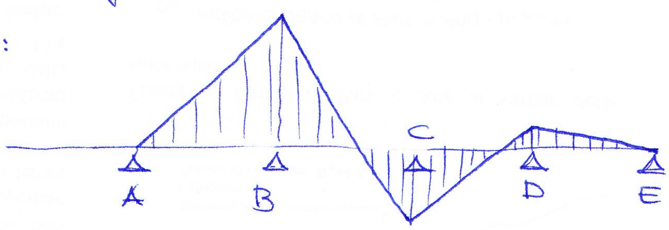
Attraverso la scrittura delle equazioni di congruenza, in cui è esplicitamente considerata la distorsione applicata è possibile, da prima valutare le incognite iperstatiche, e poi calcolare la linea elastica.

$$\begin{cases} X_B \dfrac{l_{AB}}{3EI} + X_B \dfrac{l_{BC}}{3EI} + X_C \dfrac{l_{BC}}{6EI} = +1 \\ X_C \left(\dfrac{l_{BC}}{3EI} + \dfrac{l_{CD}}{3EI} \right) + X_D \dfrac{l_{CD}}{6EI} + \dfrac{X_B \, l_{BC}}{6EI} = 0 \\ X_D \left(\dfrac{l_{CD}}{3EI} + \dfrac{l_{DE}}{3EI} \right) + X_C \dfrac{l_{CD}}{6EI} = 0 \end{cases}$$

Risolviamo questo sistema nel caso semplice in cui la lunghezza delle campate sia sempre la stessa e pari a "l". Lasciando allo studente questo semplice esercizio si ottiene:

$$X_B = +\frac{45}{28}\frac{EI}{l} \qquad X_C = -\frac{3}{7}\frac{EI}{l} \qquad X_D = +\frac{3}{28}\frac{EI}{l}$$

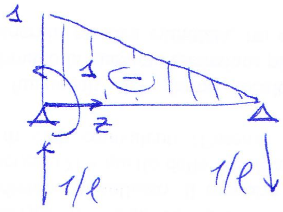
con il corrispondente diagramma dei momenti di seguito rappresentato:



La determinazione della linea elastica può così essere perseguita semplicemente considerando gli effetti dei momenti sulle singole campate trattate come schemi appoggiati - appoggiati. E' così utile analizzare separatamente i due schemi:

perché la linea elastica di un qualsiasi tratto sarà nient'altro che una loro combinazione lineare.

Partendo dal primo schema:



La legge di variazione del momento è: $M(z) = -1 + \frac{z}{l}$, da cui:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M(z)}{EI} = \frac{1}{EI}\left(1 - \frac{z}{l}\right)$$, integrando due volte:

$$-\varphi = \frac{dv}{dz} = \frac{1}{EI}\left(z - \frac{z^2}{2l} + C_1\right)$$

$$v(z) = \frac{1}{EI}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6l} + C_1 z + C_2\right)$$, imponendo le condizioni al contorno

$$\begin{cases} v(z=0)=0 \\ v(z=l)=0 \end{cases}$$

$C_1 = -l/3$, $C_2 = 0$

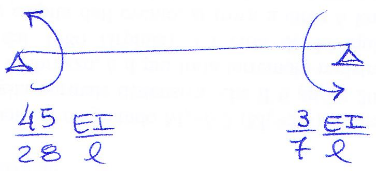
da cui la linea elastica è pari a:

$$v^s(z) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{z^3}{6l} + \frac{z^2}{2} - \frac{l}{3} z\right) = \frac{z}{6lEI}\left(-z^2 + 3zl - 2l^2\right)$$

Nel caso del secondo schema, gli sviluppi numerici sono analoghi, varia solo la legge di variazione del momento ($M(z) = -\frac{z}{l}$)

$$v^d(z) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{z^3}{6l}+\frac{lz}{6}\right) = \frac{z}{6lEI}\left(-z^2+l^2\right)$$

Il risultato che si ottiene è quello sopra riportato. A questo punto è semplice dedurre come procedere, si prenda ad esempio la campata BC



, la linea elastica totale sarà semplicemente:

$$v(z) = \frac{45}{28}\frac{EI}{l}v^s(z) - \frac{3}{7}\frac{EI}{l}v^d(z) =$$

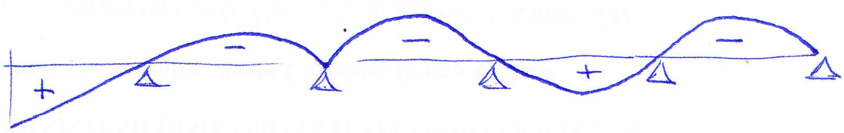
$$= \frac{45}{28}\frac{\cancel{EI}}{l}\left[\frac{z}{6l\cancel{EI}}\left(-z^2+3zl-2l^2\right)\right] - \frac{3}{7}\frac{\cancel{EI}}{l}\left[\frac{z}{6l\cancel{EI}}\left(-z^2+l^2\right)\right] =$$

$$= \frac{45}{168}\frac{z}{l^2}\left(-z^2+3zl-2l^2\right) - \frac{3}{42}\frac{z}{l^2}\left(-z^2+l^2\right) =$$

$$= \frac{z}{168l^2}\left(-45z^2+135zl-90l^2+12z^2-12l^2\right) =$$

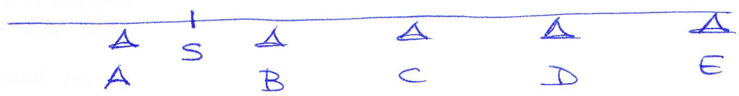
$$= \frac{z}{\cancelto{56}{168}l^2}\left(-\cancelto{11}{33}z^2+\cancelto{45}{135}zl-\cancelto{34}{102}l^2\right) = \frac{z}{56l^2}\left(-11z^2+45zl-34l^2\right)$$

Volendo tracciare una deformata qualitativa si avrà:



Un ragionamento esattamente analogo può essere svolto per le linee d'influenza relative al momento in C e in D.

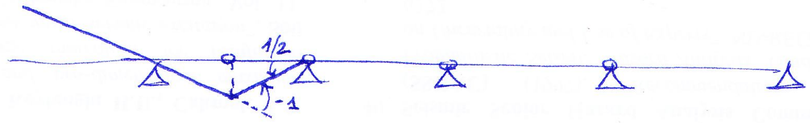
A questo punto modifichiamo il problema, vogliamo ancora la linea d'influenza del momento per carico verticale viaggiante, ma non nel punto B, bensì in mezzeria della campata AB.



La differenza rispetto al caso precedente sta nel fatto che ora la distorsione da imporre non si trova in corrispondenza di un appoggio, il che significa che non può essere considerata direttamente nelle equazioni di congruenza, bisogna seguire una strada leggermente diversa.

Per prima cosa si rende la struttura isostatica e si procede all'applicazione della distorsione su di essa:

$f^{(0)}$



Lo schema così individuato viene indicato generalmente con f_0, esso rappresenterebbe la linea d'influenza del momento in S per forza viaggiante nel caso la struttura fosse isostatica. Ciò che accade è che la distorsione applicata determina la nascita di una incongruenza in B, la quale chiaramente produce reazioni iperstatiche non nulle il cui valore può essere calcolato imponendo le solite equazioni di congruenza, che in questo caso si scrivono

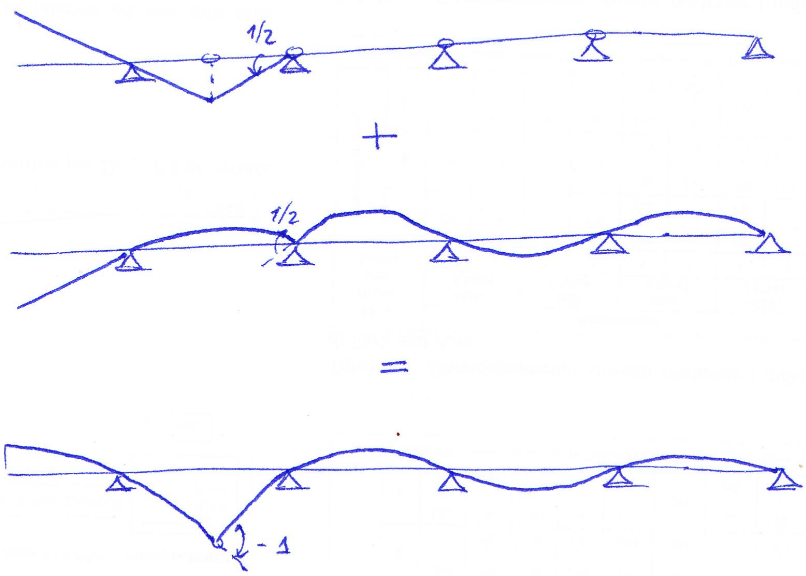
$$\begin{cases} \dfrac{X_B}{3EI}\left(l_{BA}+l_{BC}\right)+\dfrac{X_C\, l_{BC}}{6EI}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{X_C}{3EI}\left(l_{BC}+l_{CD}\right)+\dfrac{X_D\, l_{CD}}{6EI}+\dfrac{X_B\, l_{BC}}{6EI}=0 \\ \dfrac{X_D}{3EI}\left(l_{CD}+l_{DE}\right)+\dfrac{X_C\, l_{CD}}{6EI}=0 \end{cases}$$

trovati i valori di X_B, X_C e X_D, la linea elastica del sistema sarà la somma di quella dello schema "f_0" e di quella dovuta alle incognite iperstatiche. Guardando però alle equazioni di congruenza appena scritte ci si accorge che sono esattamente quelle scritte per trovare la linea d'influenza del momento in B, tranne che per la presenza del termine $\frac{1}{2}$ (ovvero l'incongruenza indotta dalla distorsione sullo schema isostatico), al posto di 1.

Dunque alla fine la linea d'influenza che si cerca si può esprimere nella seguente maniera:

$$\varphi_S = \varphi_S^{(0)} + \frac{1}{2}\varphi_B$$

dove φ_B è la linea di influenza del momento in B, infatti il contributo alla linea elastica delle incognite iperstatiche è esattamente lo stesso che si ha nel caso di linea d'influenza del momento in B, purché tale contributo si moltiplichi per il valore dell'incongruenza sullo schema isostatico. Il risultato qualitativo è di seguito rappresentato:



Ci si rende conto facilmente come l'inserimento di una distorsione angolare, ed in generale di qualsiasi tipo di distorsione (linea di influenza delle sollecitazioni), ovvero anche di enti forza (linea d'influenza degli spostamenti), determini la nascita di incongruenze che possono essere "sanate" solo mediante la somma con schemi che prevedono distorsioni angolari in corrispondenza degli appoggi, a cui corrispondono un insieme di linee d'influenza che vengono dette "principali". La denominazione ora è chiara, qualsiasi linea d'influenza si può esprimere come combinazione lineare di queste linee d'influenza principali a cui va sommata quella relativa allo schema "f_0":

$$f_s = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta_i f_i$$

linea d'influenza nello schema reso isostatico

incongruenza introdotta in corrispondenza dello svincolo "i-esimo" dall'ente applicato nello schema f_0

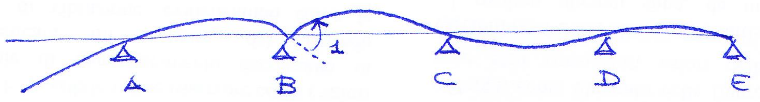
linea d'influenza principale

Si noti che il contributo di "f_0" non deve necessariamente esserci.

Per esempio nel caso di distorsione viaggiante, la linea d'influenza è data da un diagramma di sollecitazione, che nello schema f_0 è chiaramente nullo

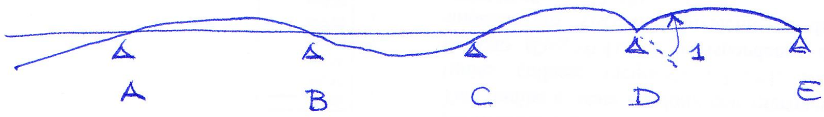
Di seguito si riportano qualitativamente le 3 linee principali d'influenza, rispetto al caso di forza verticale viaggiante (ovvero i diagrammi di spostamento verticale)

f_1



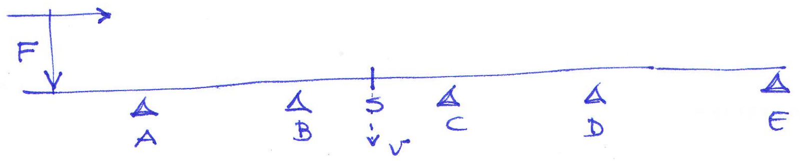
f_2

f_3

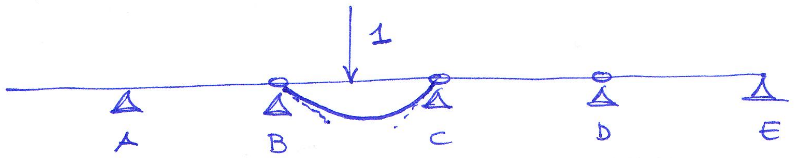


La linea d'influenza di qualsiasi effetto per forza verticale viaggiante può essere espressa attraverso l'uso di queste 3 linee d'influenza.

Nel seguito si riporta un altro esempio relativo alla linea d'influenza dello spostamento verticale, sempre per forza verticale viaggiante, in mezzeria della campata BC. L'unica differenza rispetto al caso già visto è relativo allo schema f_0, che va caricato con una forza unitaria.



Schema f_0

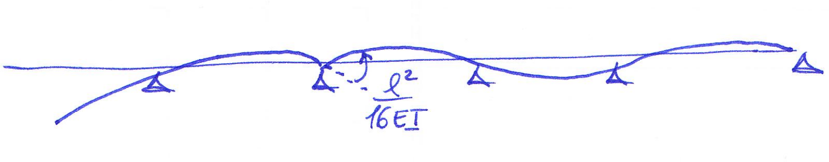


L'applicazione dell'ente forza unitario determina un diagramma di spostamenti verticali che fa nascere 2 incongruenze:

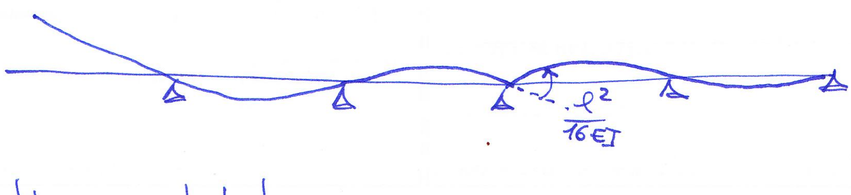
$$\Delta_1 = \frac{\ell^2}{16EI} \qquad \Delta_2 = \frac{\ell^2}{16EI}$$

Per avere la linea d'influenza basta dunque moltiplicare le linee d'influenza f_1 ed f_2, rispettivamente per Δ_1 e Δ_2, sommarle tra di loro e poi ad "f_0".

Schema f_1



Schema f_2



Linea d'influenza totale