

## La geometria delle masse

### 8.1. IL BARICENTRO.

Si definisce *baricentro* di un sistema di masse il centro di un qualsiasi sistema di vettori applicati paralleli e concordi aventi i moduli proporzionali alle masse (vettori masse).

Il *centro di un sistema di vettori (masse)* è il punto attorno a cui ruota l'asse centrale del sistema, allorché i vettori ruotano intorno ai rispettivi punti di applicazione mantenendosi paralleli.

#### *Determinazione analitica del baricentro.*

Assegnata una figura piana qualsiasi (fig. 8.1.a) o una distribuzione di  $N$  masse (fig. 8.1.b), occorre innanzitutto fissare un sistema cartesiano  $Oxy$ , per semplicità ortogonale, di riferimento. Rispetto a tali assi, poi, si determinano i momenti statici del sistema continuo

$$(8.1) \quad S_x = \int_A y \, dA, \quad S_y = \int_A x \, dA$$

o del sistema di masse

$$(8.2) \quad S_x = \sum_{i=1}^N m_i y_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^N m_i x_i$$

e quindi le coordinate  $x_G$  e  $y_G$  del baricentro

$$(8.3) \quad x_G = \frac{S_y}{A}, \quad y_G = \frac{S_x}{A},$$

essendo  $A$  l'area della figura piana. Nel caso dei sistemi di masse le (8.3) sono ancora valide purché al posto di  $A$  si consideri la massa  $M$  del sistema

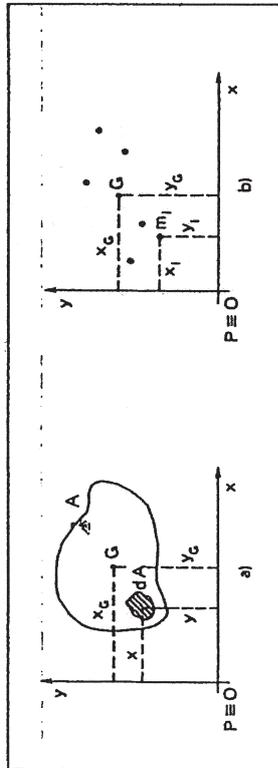


Figura 8.1

$$(8.4) \quad M = \sum_{i=1}^N m_i.$$

Se il sistema (continuo o discontinuo) presenta un asse di simmetria, il baricentro  $G$  appartiene a tale asse; se ne possiede due, invece, il baricentro  $G$  è individuato dal loro punto comune.

Quando una figura piana (ad esempio le sezioni dei profilati metallici) è scomponibile in altre più semplici di cui si conosce già la posizione dei relativi baricentri  $G_i$ , è lecito concentrare in questi ultimi le aree  $A_i$ , corrispondenti alle varie figure, riconducendo così il problema della determinazione del baricentro  $G$  della figura data a quello della determinazione del baricentro del sistema di punti materiali ( $C_P A_i$ ).

*Determinazione grafica del baricentro.*

La costruzione grafica del baricentro discende direttamente dalla definizione. Precisamente, esso viene determinato come punto di intersezione dei risultanti dei vettori masse, per due direzioni distinte. Conviene scegliere le

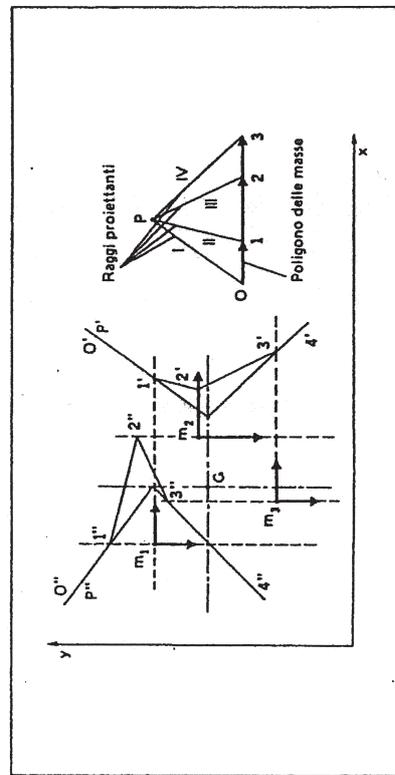


Figura 8.2

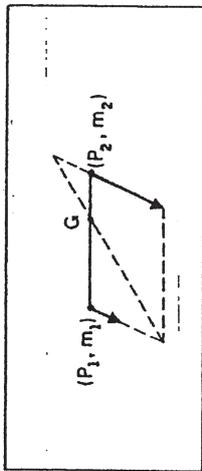


Figura 8.3

due direzioni tra loro ortogonali e costruire i due poligoni funicolari  $P'$  e  $P''$  (fig. 8.2) con i lati omologhi ortogonali, pensando di aver fatto ruotare rigidamente di  $90^\circ$  il poligono delle masse e il relativo polo. Cioè, scegliendo le due direzioni ortogonali fra loro, basta la costruzione di un solo poligono delle masse per tracciare i due poligoni funicolari  $P'$  e  $P''$ , in quanto  $P'$  ha i lati paralleli ai corrispondenti raggi proiettanti, mentre i lati di  $P''$  sono ad essi normali.

Nel caso che il sistema assegnato, o il sistema a cui ci si può ricondurre, sia costituito soltanto da due punti materiali ( $P_1, m_1$ ), ( $P_2, m_2$ ), il baricentro  $G$ , appartenente alla congiungente  $P_1 P_2$ , può determinarsi mediante la costruzione grafica indicata in fig. 8.3.

8.2. I MOMENTI D'INERZIA.

*Momenti d'inerzia assiali.*

Con riferimento alle notazioni illustrate in fig. 8.1.a, i momenti d'inerzia  $I_x$  ed  $I_y$  della figura rispetto agli assi  $x$  ed  $y$  e il momento centrifugo  $I_{xy}$  rispetto alla coppia di assi  $xy$ , sono forniti dalle relazioni

$$(8.5) \quad \begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA, & I_y &= \int_A x^2 dA, \\ I_{xy} &= \int_A xy dA. \end{aligned}$$

Per quanto concerne i sistemi di masse (fig. 8.1.b), poi, si ha:

$$(8.6) \quad \begin{aligned} I_x &= \sum_{i=1}^N m_i y_i^2, & I_y &= \sum_{i=1}^N m_i x_i^2, \\ I_{xy} &= \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i. \end{aligned}$$

dersi conto che  $I_p$  è uguale alla somma dei momenti d'inerzia assiali rispetto ad una qualsiasi coppia di rette ortogonali passanti per  $A$ . Talvolta, proprio servendosi di questo fatto, riesce più semplice la determinazione del momento d'inerzia assiale attraverso il calcolo di quello polare.

*Osservazioni sui momenti del secondo ordine.*

a) Come è facile dedurre dalle (8.7) e (8.8), ai fini del calcolo dei momenti d'inerzia e centrifugo non è lecito concentrare l'area totale (massa totale) nel baricentro. Così facendo, infatti, si troverebbe un valore per difetto del momento del secondo ordine, in quanto si computerebbe solo il termine relativo al trasporto.

b) Se una figura è costituita da rettangoli in cui una dimensione  $\delta$  è molto più piccola rispetto all'altra  $b$ , cioè  $\delta/b \ll 1$ , e i lati dell' $i$ -esimo rettangolo sono paralleli agli assi del sistema di riferimento  $Oxy$  (fig. 8.4), nella determinazione del momento d'inerzia rispetto all'asse  $x$  può trascurarsi il momento d'inerzia baricentrico e considerare così solo l'aliquota del trasporto, cioè:

$$I_x^{(i)} = I_{x_0}^{(i)} + A^{(i)}y_i^2 = \frac{1}{12} b\delta^3 + b\delta y_i^2 \approx b\delta y_i^2$$

c) Il momento centrifugo di un sistema piano (continuo o discontinuo) rispetto ad una qualsiasi coppia di diametri coniugati (in particolare assi di simmetria) è nullo.

Con riferimento alla fig. 8.4, ad esempio, il momento centrifugo del rettangolo rispetto agli assi  $x$  ed  $y$  assume l'aspetto

$$I_{xy}^{(i)} = I_{x_0y_0}^{(i)} + A^{(i)}x_i y_i = A^{(i)}x_i y_i,$$

essendo nullo il momento centrifugo  $I_{x_0y_0}$  del rettangolo rispetto agli assi di simmetria baricentrici  $x_0$  ed  $y_0$ .

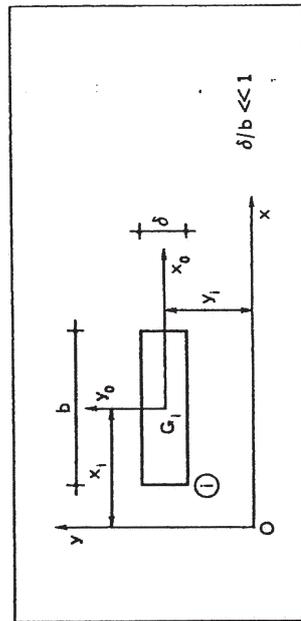


Figura 8.4

Per valutare il momento d'inerzia  $I_a$  di una figura rispetto ad una retta generica  $a$ , spesso conviene determinarlo mediante il *primo teorema del trasporto* (Huygens):

$$(8.7) \quad I_a = I_{a_0} + Ad^2,$$

essendo

$a_0$  = retta baricentrica parallela ad  $a$ ,

$A$  = area della figura piana,

$d$  = distanza tra  $a$  ed  $a_0$ ,

$I_{a_0}$  = momento d'inerzia della figura rispetto alla retta baricentrica  $a_0$ .

Analogamente, il momento centrifugo  $I_{ab}$  rispetto a due rette qualsiasi  $a$  e  $b$ , può essere determinato mediante il teorema del trasporto relativo al momento centrifugo (terzo teorema del trasporto):

$$(8.8) \quad I_{ab} = I_{a_0b_0} + Adh$$

dove

$a_0, b_0$  = rette baricentriche parallele rispettivamente ad  $a$  e  $b$ ,

$d, h$  = distanze delle rette  $a$  e  $b$  dalle corrispondenti parallele baricentriche  $a_0$  e  $b_0$ ,

$I_{a_0b_0}$  = momento centrifugo della figura rispetto alle rette baricentriche  $a_0$  e  $b_0$ .

*Momento d'inerzia polare.*

Con riferimento alle notazioni illustrate nelle figg. 8.1.a, b, si definisce *momento d'inerzia polare*  $I_p$  del sistema continuo o discontinuo  $S$ , rispetto al polo  $P$ , rispettivamente

$$(8.9) \quad I_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_y + I_x,$$

$$I_p = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_y + I_x.$$

Sviluppando nelle (8.9) l'integrale o la sommatoria, è immediato ren-

### 8.3. MOMENTI ED ASSI PRINCIPALI D'INERZIA.

Definito il baricentro  $G$  del sistema  $S$ , si fissi un sistema cartesiano ortogonale  $Gx_0y_0$ . Se  $S$  è costituito da una figura piana decomponibile in rettangoli,  $Gx_0y_0$  si sceglie in modo che gli assi  $x_0$  ed  $y_0$  risultino paralleli al maggior numero di lati dei rettangoli.

In ogni caso, calcolati i momenti d'inerzia  $I_{x_0}$  e  $I_{y_0}$  e il momento centrifugo  $I_{x_0y_0}$  del sistema assegnato, per determinare i momenti principali d'inerzia  $I_\xi$  ed  $I_\eta$  e gli assi principali d'inerzia  $\xi$  ed  $\eta$ , si possono impiegare due procedimenti: uno grafico ed uno analitico.

#### Procedimento analitico.

I momenti principali d'inerzia  $I_\xi$  ed  $I_\eta$  possono essere calcolati con le relazioni (supponendo  $I_{x_0} > I_{y_0}$ ):

$$I_{\xi} \left\{ \begin{array}{l} I_{\eta} \end{array} \right\} = \frac{I_{x_0} + I_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_0} - I_{y_0})^2 + 4I_{x_0y_0}^2}, \quad (8.10)$$

mentre l'inclinazione  $\alpha_0$  degli assi principali  $\xi$  ed  $\eta$ , rispetto agli assi  $x_0$  e  $y_0$  rispettivamente, si ricava dalla formula

$$\tan 2\alpha_0 \xi = \tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{x_0y_0}}{I_{x_0} - I_{y_0}}, \quad (8.11)$$

dove l'angolo  $\alpha_0$  è da intendersi positivo se antiorario.

#### Procedimento grafico.

Il procedimento grafico per la determinazione degli assi e dei momenti principali d'inerzia è basato sull'uso del circolo di Mohr. Quest'ultimo consente di calcolare il momento d'inerzia  $I_x$  e  $I_y$  della figura piana  $A$  (in generale di un sistema qualsiasi) (fig. 8.5.a) rispetto ad una qualsiasi coppia di rette  $x$  e  $y$  tra loro ortogonali e passanti per  $O$ , una volta noti i momenti d'inerzia  $I_{x_0}$  e  $I_{y_0}$  e il momento centrifugo  $I_{x_0y_0}$  rispetto ad una coppia di rette ortogonali  $x_0$  ed  $y_0$  passanti per il punto medesimo.

Fissato il riferimento  $O'x'y'$ , con gli assi  $I_x$  ed  $I_{xy}$  paralleli ed equiversi gli assi  $x_0$  ed  $y_0$ , rispettivamente, si può tracciare il cerchio di Mohr individuando i due punti diametrali  $D(I_{x_0}, I_{x_0y_0})$  e  $D'(I_{y_0}, -I_{x_0y_0})$ . Infatti, la congiungente  $DD'$  contiene il centro  $C$  del cerchio; si dimostra, inoltre, che  $C$  deve appartenere all'asse  $I_x$ : il circolo di Mohr, dunque, conoscendo il centro e il raggio  $CD = \overline{CD'}$ , è completamente definito.

Inoltrandosi per il punto  $D$ , poi, la parallela all'asse  $I_x$ , o per il punto  $D'$  la parallela all'asse  $I_{xy}$ , si individua sulla circonferenza il punto  $D^*$  (polo).

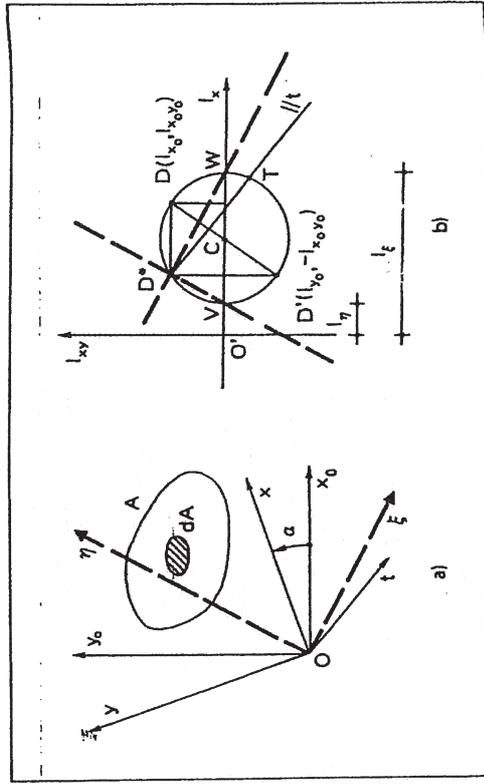


Figura 8.5

Ebbene, se dal polo  $D^*$  si manda una retta parallela a  $t$  (fig. 8.5), le coordinate del punto  $T$  d'intersezione della retta con la circonferenza rappresentano il momento d'inerzia  $I_t$  della figura piana rispetto alla retta  $t$  e il momento centrifugo rispetto alla retta  $t$  ed alla sua ortogonale per  $O$ .

In particolare, le congiunzioni  $D^*W$  e  $D^*V$  (fig. 8.5.a) rappresentano le direzioni degli assi principali  $\xi$  ed  $\eta$ , mostrati in fig. 8.5.a; i segmenti  $OV$  ed  $OW$ , inoltre, rappresentano i momenti principali  $I_\eta$  ed  $I_\xi$ , rispettivamente. Conducendo dal polo  $D^*$  le parallele agli assi  $x_0$  ed  $y_0$  si determinano naturalmente,  $I_{x_0}$ ,  $I_{y_0}$ ,  $I_{x_0y_0}$ , cioè gli stessi valori che hanno consentito di costruire il cerchio.

#### Osservazioni sugli assi e sui momenti principali d'inerzia.

a) Gli assi principali d'inerzia  $\xi$  e  $\eta$ , come è facile dedurre dal cerchio di Mohr, rappresentano la coppia di rette ortogonali rispetto alle quali il momento d'inerzia è massimo e minimo, mentre il momento centrifugo  $I_{\xi\eta}$  è nullo.

b) Il cerchio di Mohr deve essere sempre ubicato nel semipiano  $I_x > 0$  (fig. 8.5.b) in quanto, in caso contrario, esisterebbero delle rette rispetto alle quali risulterebbe negativo il momento d'inerzia del sistema (il momento d'inerzia è sempre una quantità positiva).

c) Gli assi principali mostrati in fig. 8.5.a, nonché il cerchio di Mohr rappresentato in fig. 8.5.b, sono relativi al generico punto  $O$ . Se tale punto coincide con il baricentro  $G$  del sistema, gli assi  $\xi$  ed  $\eta$  si chiamano *assi centrali d'inerzia* e il circolo di Mohr *cerchio centrale*.

## 8.4. L'ELLISSIE CENTRALE D'INERZIA.

Data una figura piana o una distribuzione di masse, si definisce *ellisse centrale d'inertzia* o *ellisse di Culmann* del sistema (continuo o discreto)  $S$  (1), l'ellisse che ha per centro il baricentro  $G$  di  $S$ , per assi gli assi centrali d'inertzia  $\xi$  ed  $\eta$  e per semiasse i raggi d'inertzia  $\rho_\xi$  e  $\rho_\eta$  di  $S$ , rispetto a tali assi centrali, definiti da

$$(8.12) \quad \rho_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{A}}, \quad \rho_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}},$$

dove  $I_\xi$  ed  $I_\eta$  sono i momenti d'inertzia del sistema rispetto agli assi principali  $\xi$  ed  $\eta$  rispettivamente, mentre  $A$  rappresenta l'area della figura piana o la massa  $M$  definita dalla (8.4).

Nel riferimento  $G\xi\eta$ , dunque (fig. 8.6), l'ellisse di Culmann è rappresentata dall'equazione

$$(8.13) \quad \frac{\xi^2}{\rho_\xi^2} + \frac{\eta^2}{\rho_\eta^2} = 1,$$

poiché i raggi d'inertzia  $\rho_\eta$  e  $\rho_\xi$  sono distesi rispettivamente sugli assi  $\xi$  ed  $\eta$ . Precisamente, se si considera la corrispondenza tra le rette  $c$  del piano  $\pi$  del sistema  $S$  ed i punti  $C'$ , simmetrici rispetto al baricentro  $G$  di  $S$  dei centri relativi (2) alle rette  $c$  di  $\pi$ , si trova che tale corrispondenza è una polarità (3)

(1) Indicheremo semplicemente con  $S$  sia il sistema continuo che quello discontinuo.

(2) Il centro relativo  $C$  ad una retta  $c$  è il baricentro dei momenti statici di un sistema  $S$  assegnato rispetto alla retta  $c$ .

(3) È noto che dato un punto  $R$ , del piano  $\pi$  dell'ellisse, di coordinate  $\xi^*$  ed  $\eta^*$  (fig. 8.6), si definisce polare di  $R$  rispetto all'ellisse la retta  $r$  di equazione

$$(8.14) \quad \frac{\xi}{\rho_\xi^2} \xi^* + \frac{\eta}{\rho_\eta^2} \eta^* = 1.$$

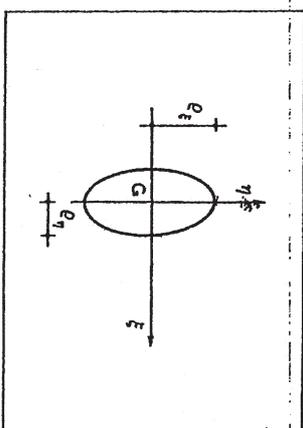
Il punto  $R$  prende il nome di *polo della retta  $r$* . La corrispondenza biunivoca fra i punti  $R$  e le rette  $r$  del piano  $\pi$  si definisce polarità piana.

Ogni punto  $R$  dell'ellisse ha per polare la tangente  $r$  all'ellisse nel punto stesso. Poiché inoltre, se un punto  $R$  appartiene alla sua polare  $r$ , sia  $R$  che  $r$  si dicono *autoconiugati*, l'ellisse viene ad essere il luogo dei punti autoconiugati.

Due punti si dicono *coniugati* in una polarità quando l'uno appartiene alla polare dell'altro; analogamente, due rette si dicono *coniugate* in una polarità quando l'una contiene il polo dell'altra. Le rette del piano  $\pi$  passanti per il centro  $G$  dell'ellisse si dicono *diametri*.

Poiché per una polarità vale il teorema di reciprocità, tutte le rette di un fascio proprio

Figura 8.6



rispetto all'ellisse di equazione (8.13).

Ebbene, se si definisce *antipolo* di una retta  $r$  il simmetrico, rispetto al centro dell'ellisse, del polo di  $r$ , si può asserire che il centro  $C$  del sistema  $S$  relativo ad una retta  $c$  coincide con l'antipolo della retta  $c$  rispetto all'ellisse di Culmann.

Supponendo ora di conoscere l'ellisse di Culmann del sistema  $S$ , ci proponiamo di determinare il centro relativo ad una retta  $c$  qualsiasi, ovvero l'antipolo  $C$  di  $c$  rispetto all'ellisse centrale d'inertzia (fig. 8.7).

Indichiamo con  $d$  il diametro coniugato alla direzione di  $c$ , cioè la retta individuata dai punti  $A$  e  $B$  in cui le parallele a  $c$  sono tangenti all'ellisse. Il punto  $A$  è l'antipolo della retta  $c_2$  e appartiene alla retta  $c_1$ , antipolare di  $B$ ; il punto  $B$  è l'antipolo della retta  $c_1$  e appartiene alla retta  $c_2$ , antipolare di  $A$  (si noti che  $A$  e  $B$  sono i poli rispettivamente delle rette  $c_1$  e  $c_2$ ).

di centro  $H$  hanno i poli sulla polare  $h$  di  $H$ ; inoltre, quando una retta  $r$  si sposta mantenendosi parallela a se stessa, il suo polo descrive una retta baricentrica che si chiama *diametro coniugato alla direzione di  $r$* . Di conseguenza, assegnata una retta  $r$  del piano  $\pi$ , la determinazione del diametro coniugato a tale direzione è immediata. Infatti, condotte le tangenti all'ellisse di Culmann parallele ad  $r$ , la retta individuata da due punti di tangenza, contenente i poli di due rette parallele ad  $r$  (poiché i punti di tangenza sono i poli delle rispettive tangenti), conterrà i poli di tutte le rette del fascio improprio avente come centro la direzione di  $r$ , cioè sarà il diametro coniugato a tale direzione.

Due diametri si dicono *coniugati* quando ciascuno di essi è coniugato alla direzione dell'altro. Si definisce *antipolo* di una retta  $r$ , poi, il punto  $R'$  simmetrico rispetto al centro dell'ellisse del polo  $R$  di  $r$ . La retta  $r$  si chiama *antipolare* del punto  $R'$ , mentre la corrispondenza tra  $r$  ed  $R'$  si definisce *antipolarità* rispetto all'ellisse centrale d'inertzia. Due punti li diremo *coniugati nell'antipolarità* quando l'uno appartiene all'antipolare dell'altro. Analoga definizione vale per due rette coniugate nell'antipolarità.

Infine, sia in una polarità che in una antipolarità rispetto all'ellisse centrale d'inertzia, su ogni diametro  $d$  le coppie di punti coniugati  $R$  e  $R'$  verificano la relazione

$$|GR| |GR'| = \text{cost.}$$

dove la costante è la potenza dell'involuzione, di centro  $G$ , subordinata dalla polarità sul diametro  $d$ .



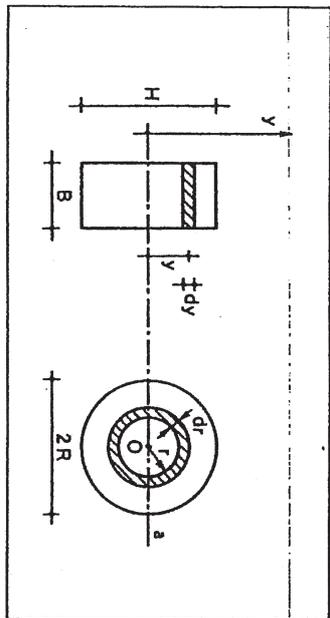


Figura 8.1.2

$$I_0^{(c)} = \frac{1}{2} \int_0^R (2\pi r dr)^2 = \frac{\pi R^4}{4}$$

Peranto, applicando il teorema del trasporto, i momenti principali  $I_\xi$  ed  $I_\eta$  della figura assegnata (fig. 8.1.1) valgono:

$$(8.1.1) \quad I_\xi = \frac{1}{12} (8R)(4R)^3 - 2 \left( \frac{\pi R^4}{4} \right) = 25685,42 \text{ cm}^4$$

$$I_\eta = 2 \left[ \frac{1}{3} (4R)(4R)^3 - \frac{\pi R^4}{4} - (\pi R^2)(2R)^2 \right] = 89982,29 \text{ cm}^4$$

Ellisse centrale d'inertzia. I semidiametri  $\rho_\xi$  e  $\rho_\eta$  dell'ellisse di Culmann sono forniti dalle relazioni

$$(8.1.2) \quad \rho_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{A}}, \quad \rho_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}}$$

Essendo  $A$  l'area della sezione

$$(8.1.3) \quad A = 8R \cdot 4R - 2\pi R^2 = 643,00 \text{ cm}^2$$

per le (8.1.1), (8.1.2) e (8.1.3) risulta:

$$(8.1.4) \quad \rho_\xi = 11,83 \text{ cm} \quad \rho_\eta = 6,32 \text{ cm}$$

L'ellisse centrale d'inertzia della sezione, i cui semidiametri coniugati sono espressi dalle (8.1.4), è rappresentata con linea tratteggiata in fig. 8.1.1.

Nocciolo centrale d'inertzia. Il nocciolo d'inertzia della sezione assegnata ha per vertici gli antipodi delle rette cui appartengono i lati AB, BD, DC, CA

del rettangolo. Per motivi di simmetria, però, è sufficiente determinare due soli di tali punti. Ad esempio, i punti  $T'$  ed  $S'$ , corrispondenti rispettivamente di  $T$  ed  $S$  (fig. 8.1.1), si determinano dalle relazioni

$$(8.1.5) \quad \overline{TC} \cdot \overline{CT'} = \rho_\eta^2, \quad \overline{SG} \cdot \overline{GS'} = \rho_\xi^2$$

Risulta

$$\overline{CT'} = \frac{(11,83)^2}{20} = 6,99 \text{ cm}, \quad \overline{GS'} = \frac{(6,32)^2}{10} = 3,99 \text{ cm}$$

I punti  $T'$  ed  $S'$ , nonché i loro simmetrici rispetto agli assi principali d'inertzia  $\xi$  ed  $\eta$ , forniscono i vertici del nocciolo, tratteggiato in fig. 8.1.1.

Esercizio 8.2.

Tracciare l'ellisse centrale d'inertzia della sezione riportata in figg. 8.2.1.a.

Posizione del baricentro. La sezione in esame presenta un asse di simmetria geometrico che contiene il baricentro G. Pertanto, fissato un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, con l'asse x coincidente con l'asse di simmetria della sezione, l'ubicazione del baricentro sull'asse viene determinata univocamente dalla coordinata  $x_G$ , fornita dalla relazione

$$(8.2.1) \quad x_G = \frac{S_y}{A}$$

essendo  $S_y$  il momento statico dell'inertia sezione rispetto all'asse y ed A

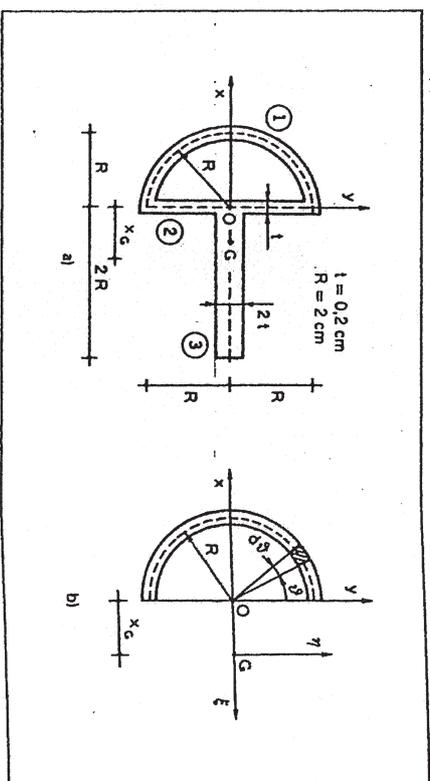


Figura 8.2.1

l'area della sezione stessa. Quest'ultima, essendo  $t/R = 1/10$  (sezione sottile), può valutarsi come somma delle tre parti in cui può immaginarsi decomposta la figura dalle discontinuità della linea d'asse. Risulta cioè

$$(8.2.2) \quad A = \pi R t + 2R t + 4R t = 3,66 \text{ cm}^2$$

Anche il momento statico  $S_y$  può essere calcolato come somma dei contributi, rispetto allo stesso asse, delle tre parti in cui può decomporre la figura:

$$(8.2.3) \quad S_y = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} + S_y^{(3)}$$

Il momento statico  $S_y^{(1)}$ , con riferimento alle notazioni di fig. 8.2.1.b, può determinarsi semplicemente mediante la definizione:

$$(8.2.4) \quad S_y^{(1)} = \int_{A^{(1)}} x \, dA = 2R t \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \, d\vartheta = 2R^2 t = 1,60 \text{ cm}^3.$$

Alla (8.2.4) si sarebbe pervenuti anche applicando l'area della semicorona  $\pi R t$  nel suo baricentro, distante  $2R/\pi$  dall'asse  $y$ .

Per quanto riguarda la determinazione del momento statico delle restanti figure, invece, osserviamo che  $S_y^{(2)} = 0$ , essendo l'asse  $y$  baricentrico per il rettangolo 2, mentre  $S_y^{(3)}$  può calcolarsi applicando l'area  $4tR$  nel baricentro del rettangolo 3. Risulta, cioè,

$$(8.2.5) \quad S_y^{(3)} = -4tR \cdot R = -3,20 \text{ cm}^3.$$

Tenendo conto delle osservazioni fatte e delle (8.2.1) - (8.2.5), si ha

$$x_G = \frac{-1,60}{3,66} = -0,44 \text{ cm}.$$

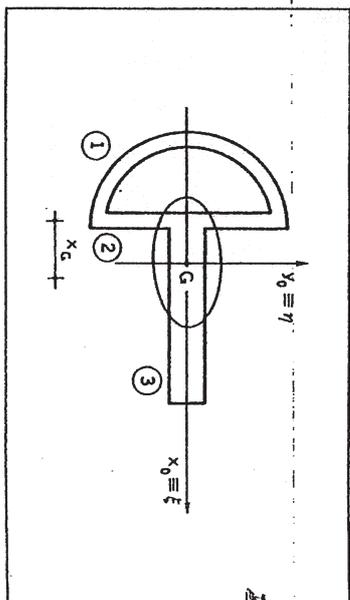
**Assi principali d'inerzia.** L'asse di simmetria della sezione  $x_0$  e l'asse ortogonale baricentrico  $y_0$  costituiscono gli assi baricentrici principali d'inerzia  $\xi$ ,  $\eta$  (fig. 8.2.2). Com'è noto, rispetto a questi assi il momento d'inerzia è massimo e minimo, mentre il momento centrifugo è nullo.

**Momenti principali d'inerzia.** Con riferimento alle notazioni illustrate nelle figg. 8.2.1 e 8.2.2, il momento d'inerzia rispetto all'asse  $\xi$  è fornito da

$$(8.2.6) \quad I_\xi = I_\xi^{(1)} + I_\xi^{(2)} + I_\xi^{(3)},$$

dove

Figura 8.2.2



$$I_\xi^{(1)} = \int_{A^{(1)}} y^2 \, dA = R^3 t \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \, d\vartheta = \frac{\pi R^3 t}{2} = 2,51 \text{ cm}^4,$$

$$(8.2.7) \quad I_\xi^{(2)} = \frac{1}{12} t(2R)^3 = 1,07 \text{ cm}^4,$$

$$I_\xi^{(3)} = \frac{1}{12} (2R)(2t)^3 = 0,02 \text{ cm}^4.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse principale  $\eta$  può ancora scriversi come somma di tre addendi:

$$(8.2.8) \quad I_\eta = I_\eta^{(1)} + I_\eta^{(2)} + I_\eta^{(3)},$$

dove per il calcolo di  $I_\eta^{(1)}$  conviene rifarsi alle notazioni di fig. 8.2.1.b. Si ha

$$I_\eta^{(1)} = 2 \int_0^{\pi/2} (tR \, d\vartheta)(R \sin \vartheta + x_G)^2 =$$

$$(8.2.9) \quad = \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) tR^3 + \pi R t x_G^2 + 4R^2 t x_G = 2,56 \text{ cm}^4,$$

$$I_\eta^{(2)} \cong 2tR x_G^2 = 0,15 \text{ cm}^4,$$

$$I_\eta^{(3)} = \frac{1}{12} 2t(2R)^3 + 4tR(R - x_G)^2 = 6,03 \text{ cm}^4.$$

Per le (8.2.6) - (8.2.9) i momenti principali d'inerzia valgono

$$I_\xi = 3,60 \text{ cm}^4, \quad I_\eta = 8,74 \text{ cm}^4.$$

Ellisse centrale d'inerzia. Noti i momenti principali d'inerzia  $I_\xi$  ed  $I_\eta$  e l'area della sezione, si determinano i raggi principali d'inerzia:

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{A}} = \sqrt{\frac{3,60}{3,66}} = 0,99 \text{ cm.}$$

$$\rho_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}} = \sqrt{\frac{8,74}{3,66}} = 1,54 \text{ cm,}$$

discesi rispettivamente su  $\eta$  ed  $\xi$ ; quindi si traccia l'ellisse centrale d'inerzia illustrata in fig. 8.2.2.

## Esercizio 8.3.

Determinare il nocciolo centrale d'inerzia della sezione a Z illustrata in fig. 8.3.1.

Posizione del baricentro. Fissato il riferimento  $Oxy$  mostrato in fig. 8.3.1, la sezione in esame presenta una simmetria polare rispetto al polo di ascissa  $B - t/2$  e ordinata  $H/2$ . Tale polo coincide con il baricentro  $G$  della sezione di coordinate

$$(8.3.1) \quad x_G = 7,5 \text{ cm,} \quad y_G = 10 \text{ cm.}$$

Momenti del secondo ordine. Per valutare i momenti del secondo ordine, consideriamo il riferimento cartesiano ortogonale baricentrico  $Gx_0y_0$ , tracciato rispetto al precedente  $Oxy$ . Scomposta la figura in tre rettangoli, i

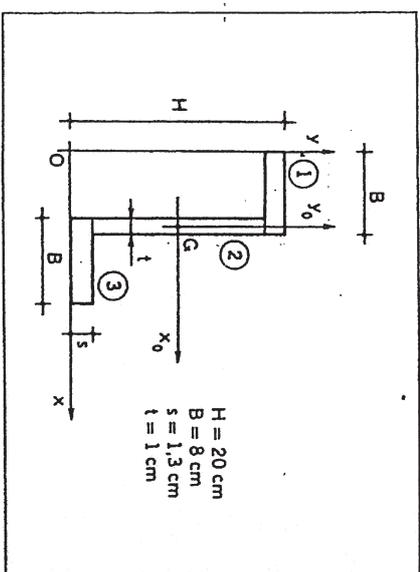


Figura 8.3.1

momenti d'inerzia  $I_{x_0}$ ,  $I_{y_0}$  e il momento centrifugo  $I_{x_0y_0}$  della sezione possono calcolarsi come somma dei corrispondenti momenti relativi ai singoli rettangoli, vale a dire

$$(8.3.2) \quad \begin{aligned} I_{x_0} &= I_{x_0}^{(1)} + I_{x_0}^{(2)} + I_{x_0}^{(3)}, \\ I_{y_0} &= I_{y_0}^{(1)} + I_{y_0}^{(2)} + I_{y_0}^{(3)}, \end{aligned}$$

$$I_{x_0y_0} = I_{x_0y_0}^{(1)} + I_{x_0y_0}^{(2)} + I_{x_0y_0}^{(3)},$$

dove l'apice (1), (2), (3) sta ad indicare il contributo al momento d'inerzia rispettivamente dei rettangoli 1, 2 e 3. Per il calcolo dei momenti d'inerzia dei singoli rettangoli occorre applicare il primo teorema del trasporto (Huyghens), il calcolo dei momenti centrifughi, invece, si esegue mediante l'applicazione del terzo teorema del trasporto, nonché del teorema che stabilisce la nullità del momento centrifugo rispetto ad una qualsiasi coppia di diametri coniugati. Risulta così:

$$I_{x_0}^{(1)} = I_{x_0}^{(3)} = \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot 1,3^3 + (1,3 \cdot 8) \cdot 9,35^2 = 910,70 \text{ cm}^4,$$

$$I_{x_0}^{(2)} = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 17,4^3 = 439 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_0}^{(1)} = I_{y_0}^{(3)} = \frac{1}{12} \cdot 1,3 \cdot 8^3 + (1,3 \cdot 8) \cdot 3,5^2 = 182,87 \text{ cm}^4$$

$$(8.3.3) \quad I_{y_0}^{(2)} = \frac{1}{12} \cdot 17,4 \cdot 1^3 = 1,45 \text{ cm}^4,$$

$$I_{x_0y_0}^{(1)} = I_{x_0y_0}^{(3)} = -8 \cdot 1,3 \cdot 9,35 \cdot 3,5 = -340,34 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_0y_0}^{(2)} = 0.$$

Sostituendo i valori (8.3.3) nella (8.3.2) si ha

$$I_{x_0} \cong 2260,40 \text{ cm}^4$$

$$(8.3.4) \quad I_{y_0} \cong 367,05 \text{ cm}^4,$$

$$I_{x_0y_0} \cong -680,68 \text{ cm}^4.$$

Momenti principali d'inerzia. Con le notazioni adottate in precedenza, i momenti principali d'inerzia  $I_\xi$  ed  $I_\eta$  risultano forniti da

$$I_{\xi} \left\{ \begin{aligned} &= \frac{I_{x_0} + I_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_0} - I_{y_0})^2 + 4I_{x_0 y_0}^2} \\ &= \frac{2260,40 + 367,05}{2} \pm \end{aligned} \right.$$

$$(8.3.5) \quad = \frac{2260,40 + 367,05}{2} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{(2260,40 - 367,05)^2 + 4(680,68)^2} = \begin{cases} 2479,71 \text{ cm}^4 \\ 147,74 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

L'angolo  $x_0 \hat{x}$  compreso fra l'asse  $x_0$  e l'asse  $\xi$ , ossia l'angolo che individua gli assi principali d'inertzia, si ottiene dalla relazione

$$\text{tang } 2x_0 \hat{x} = - \frac{2I_{x_0 y_0}}{I_{x_0} - I_{y_0}} = \frac{2 \cdot 680,68}{2260,40 - 367,05} = 0,72,$$

e si trova

$$(8.3.6) \quad x_0 \hat{x} = \frac{1}{2} \arctang(0,72) = 17^\circ 88'.$$

Si possono così tracciare gli assi principali d'inertzia, riportati in fig. 8.3.2.

**Ellisse centrale d'inertzia.** Noti gli assi  $\xi$  ed  $\eta$  dell'ellisse, si determinano le lunghezze dei semidiametri  $\rho_{\xi}$  e  $\rho_{\eta}$ , distesi rispettivamente lungo gli assi  $\eta$  ed  $\xi$ , dalle formule

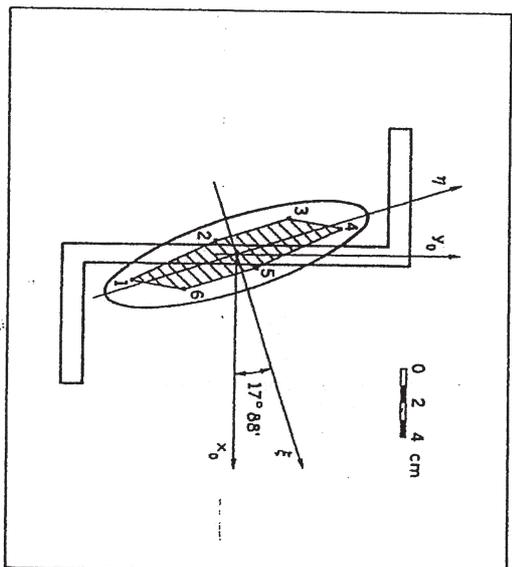


Figura 8.3.2

$$(8.3.7) \quad \rho_{\xi} = \sqrt{\frac{I_{\xi}}{A}}, \quad \rho_{\eta} = \sqrt{\frac{I_{\eta}}{A}}$$

essendo  $A$  l'area della sezione. Poichè risulta

$$A = 2(8 \cdot 1,3) + 17,4 \cdot 1 = 38,20 \text{ cm}^2,$$

dalle (8.3.7), tenendo conto anche delle (8.3.5), si ricava

$$(8.3.8) \quad \rho_{\xi} = 8,06 \text{ cm}, \quad \rho_{\eta} = 1,97 \text{ cm}.$$

L'ellisse centrale d'inertzia è riportata in fig. 8.3.2.

**Nocciolo centrale d'inertzia.** Per disegnare il nocciolo centrale d'inertzia occorre considerare le rette che racchiudono la sezione e trovarne gli antipoli: tali antipoli costituiscono i vertici del nocciolo. Le rette che racchiudono la sezione sono le rette 1-1, ..., 6-6 (fig. 8.3.3.a); gli antipoli di tali rette sono indicati rispettivamente con 1, ..., 6 (fig. 8.3.2). Per determinare i suddetti antipoli si opera la costruzione grafica illustrata in fig. 8.3.3.b. L'antipolo della retta  $x$  giace sulla congiunta baricentrica  $x_0$  alla direzione di  $x$ , individuata dai punti  $A$  ed  $A'$  in cui le parallele ad  $x$  sono tangenti all'ellisse. Sulla retta  $x_0$ , poi, l'antipolo  $X'$  della retta  $x$ , indicato con  $X$  il punto d'intersezione della retta  $x$  con la sua congiunta baricentrica  $x_0$ , si determina mediante la relazione di coniugio

$$(8.3.9) \quad \overline{GX} \cdot \overline{GX'} = \overline{GA'}^2,$$

ovvero mediante la traduzione grafica di tale relazione. Si riporta, cioè, il

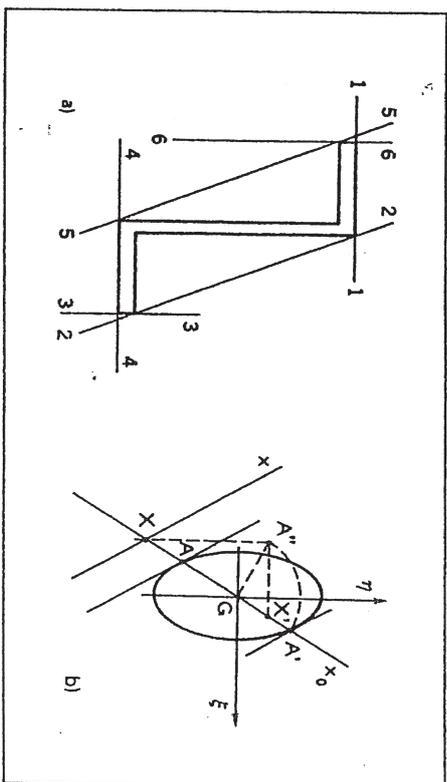


Figura 8.3.3

segmento  $GA'$  sulla normale per  $G$  alla retta  $x_0'$ ; si individua così il punto  $A''$ . La normale per  $A''$  alla retta  $XA''$ , poi, definisce su  $x_0'$  l'antipolo  $X'$  della retta  $x$ . Infatti, essendo il triangolo  $XA''X'$  retto in  $A''$ , per il secondo teorema di Euclide si ha proprio la relazione (8.3.9):

$$GA''^2 = \overline{GA''}^2 = \overline{GX'} \cdot \overline{CX'}$$

Con il procedimento esaminato si trovano, così, gli antipoli 1, ..., 6 delle rette che racchiudono la figura. Congiungendo tali vertici, quindi, si ottiene la frontiera del nocciolo, disegnata in fig. 8.3.2. In tale figura il nocciolo è stato tratteggiato.

Esercizio 8.4.

Determinare il nocciolo centrale d'inerzia della sezione di fig. 8.4.1.

Posizione del baricentro. La sezione in esame presenta un asse di simmetria  $y$  al quale appartiene il baricentro  $G$ . Assunto perciò il riferimento  $Oxy$  mostrato in fig. 8.4.1, il baricentro è completamente definito da

$$(8.4.1) \quad y_G = \frac{S_x}{A}$$

dove  $S_x$  rappresenta il momento statico della sezione rispetto all'asse  $x$  ed  $A$  l'area della sezione. Considerando la sezione sottile (cioè è lecito allorché  $t/B = 1/10 \div 1/20$ ),

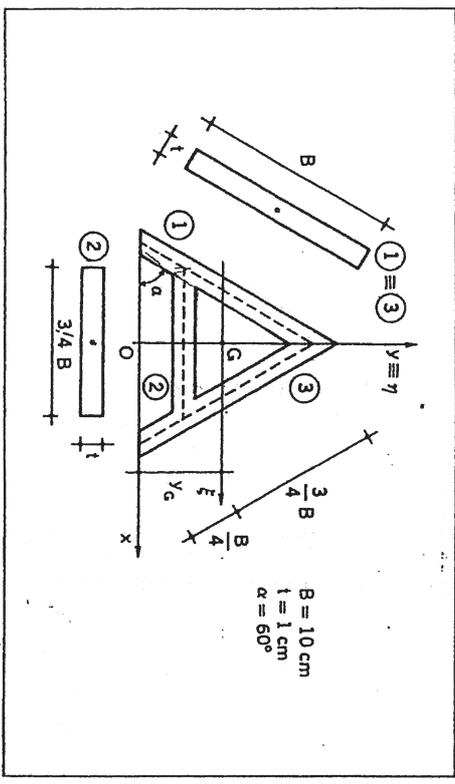


Figura 8.4.1

essa può immaginarsi decomposta nei tre triangoli mostrati in figura, aventi come dimensioni lo spessore  $t$  e le lunghezze delle corrispondenti linee medie.

Il momento statico  $S_x$  della sezione rispetto all'asse  $x$  può esprimersi, pertanto, come somma di tre contributi:

$$(8.4.2) \quad S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} + S_x^{(3)}$$

relativi ai rettangoli 1, 2 e 3.

Con riferimento alle notazioni illustrate in fig. 8.4.1, il momento statico dei rettangoli rispetto all'asse  $x$ , e l'area  $A$  risultano forniti dalle seguenti relazioni:

$$S_x^{(1)} = S_x^{(3)} = tB \frac{B}{2} \sin \alpha = 43,30 \text{ cm}^3$$

$$(8.4.3) \quad S_x^{(2)} = \frac{3}{4} Bt \frac{B}{4} \sin \alpha = 16,24 \text{ cm}^3,$$

$$A = 2Bt + \frac{3}{4} Bt = 27,50 \text{ cm}^2$$

Dalla (8.4.1), per le (8.4.2) e (8.4.3) si ricava:

$$y_G = \frac{2 \cdot 43,30 + 16,24}{27,50} = 3,74 \text{ cm.}$$

Assi e momenti principali d'inerzia. L'asse  $y$ , essendo un asse di simmetria, è baricentrico e principale d'inerzia; l'asse baricentrico  $\xi$  ad esso ortogonale,

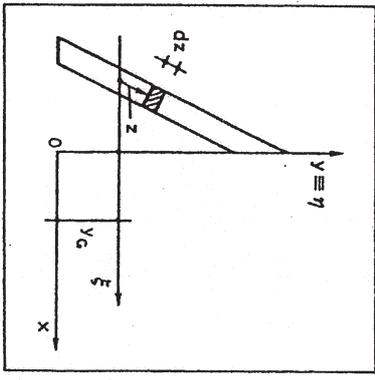


Figura 8.4.2

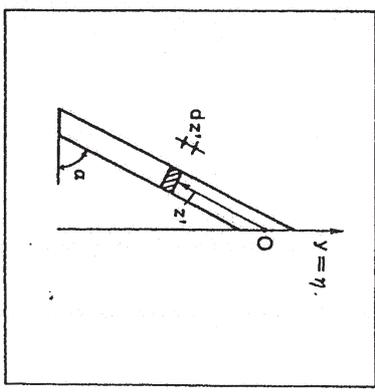


Figura 8.4.3

poi, è l'altro asse principale d'inertzia (fig. 8.4.1).

Per quanto riguarda i momenti principali d'inertzia,  $I_{\xi}$  ed  $I_{\eta}$  si può effettuare il calcolo con lo stesso criterio adottato per il momento statico. Con riferimento alle notazioni illustrate nelle figg. 8.4.1 e 8.4.2 si ha:

$$I_{\xi}^{(1)} = I_{\xi}^{(3)} =$$

$$= \int_0^{B-x_G/\sin\alpha} (dz t)(z \sin\alpha)^2 + \int_{-x_G/\sin\alpha}^0 (dz t)(z \sin\alpha)^2 =$$

$$(8.4.4) \quad = t \sin^2 \alpha^2 \int_0^{B-x_G/\sin\alpha} z^2 dz + t \sin^2 \alpha \int_{-x_G/\sin\alpha}^0 z^2 dz =$$

$$= \frac{t \sin^2 \alpha}{3} \left[ \left( B - \frac{x_G}{\sin\alpha} \right)^3 + \left( \frac{x_G}{\sin\alpha} \right)^3 \right] = 60,56 \text{ cm}^4$$

$$I_{\xi}^{(2)} \cong \frac{3}{4} B t \left( x_G - \frac{B}{4} \sin\alpha \right)^2 = 18,60 \text{ cm}^4.$$

Con riferimento alle notazioni delle figg. 8.4.1, 8.4.2 e 8.4.3, invece risulta

$$(8.4.5) \quad I_{\eta}^{(1)} = I_{\eta}^{(3)} = \int_0^B (t dz')(z' \cos\alpha)^2 = \frac{t \cos^2 \alpha B^3}{3} = 83,33 \text{ cm}^4,$$

$$I_{\eta}^{(2)} = \frac{1}{12} \cdot t \left( \frac{3}{4} B \right)^3 = 35,16 \text{ cm}^4.$$

I momenti principali d'inertzia, dunque, per le (8.4.4) e (8.4.5), valgono:

$$(8.4.6) \quad I_{\xi} = I_{\xi}^{(1)} + I_{\xi}^{(2)} + I_{\xi}^{(3)} = 139,63 \text{ cm}^4,$$

$$I_{\eta} = I_{\eta}^{(1)} + I_{\eta}^{(2)} + I_{\eta}^{(3)} = 201,82 \text{ cm}^4.$$

Ellisse centrale d'inertzia. I semidiametri coniugati dell'ellisse, tenendo conto delle (8.4.6) e dell'ultima delle (8.4.3), valgono

$$(8.4.7) \quad \rho_{\xi} = \sqrt{\frac{I_{\eta}}{A}} = \sqrt{\frac{139,63}{27,50}} = 2,25 \text{ cm},$$

$$\rho_{\eta} = \sqrt{\frac{I_{\xi}}{A}} = \sqrt{\frac{201,82}{27,50}} = 2,71 \text{ cm}.$$

Esercizi proposti.

Tali semidiametri sono discesi rispettivamente sugli assi  $\eta$  e  $\xi$ .

**Nocciolo centrale d'inertzia.** Il nocciolo centrale d'inertzia è un triangolo isoscele i cui vertici sono gli antipoli delle tre rette tangenti alla figura.

Una volta che è stata tracciata l'ellisse, si può procedere come negli esercizi precedenti.

8.5 - 8.12. Per le sezioni riportate nelle figg. 8.5.1 - 8.8.1, calcolare i momenti principali d'inertzia e tracciare gli assi centrali d'inertzia, sia analiticamente che graficamente mediante il procedimento del cerchio di Mohr. Per le sezioni sottili delle figg. 8.9.1 - 8.12.1, invece, ciascuna dotata di asse di simmetria e di spessore  $\delta$  costante, tracciare l'ellisse centrale d'inertzia e rappresentare qualitativamente il nocciolo centrale d'inertzia.

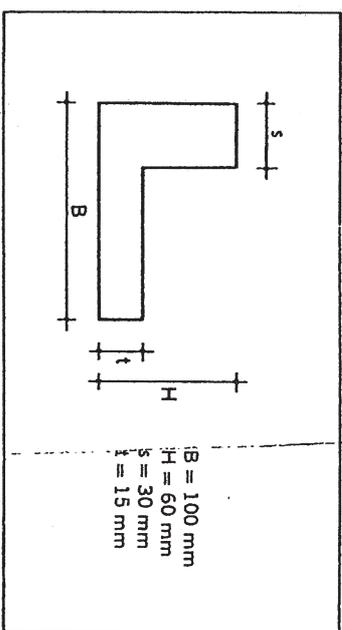


Figura 8.5.1

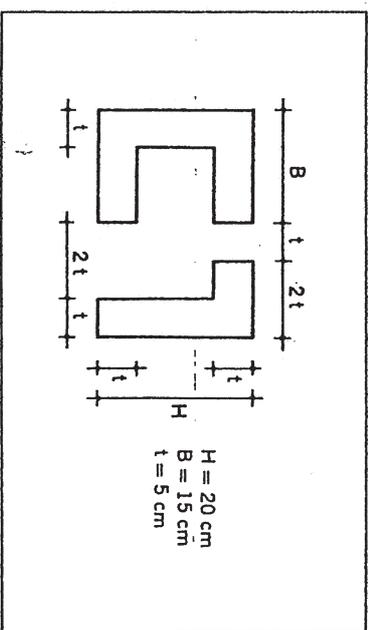


Figura 8.6.1

Figura 8.7.1

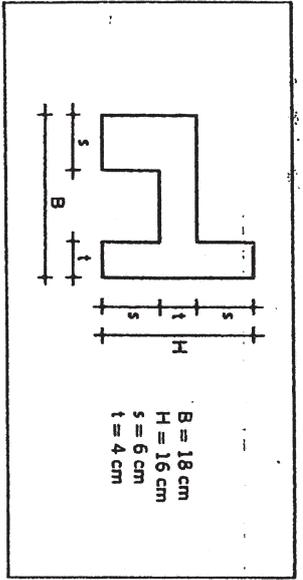


Figura 8.8.1

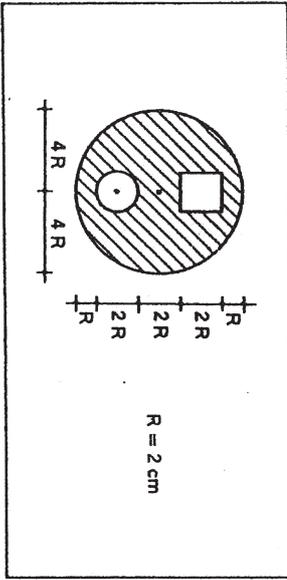


Figura 8.9.1

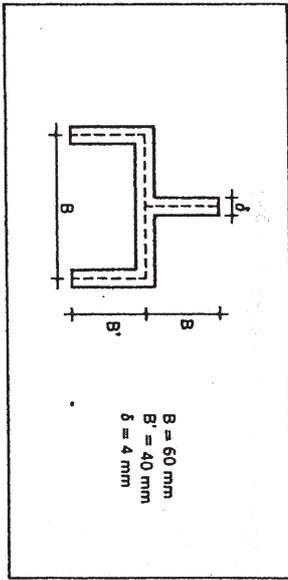


Figura 8.10.1

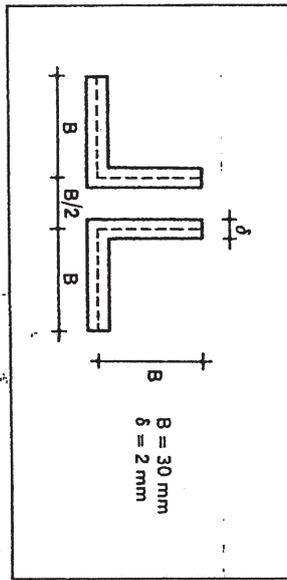


Figura 8.11.1

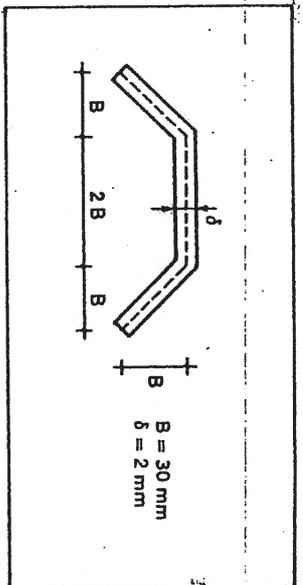
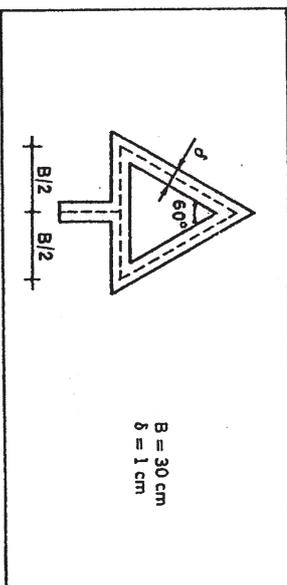


Figura 8.12.1



BIELONI

S. U.

26408