

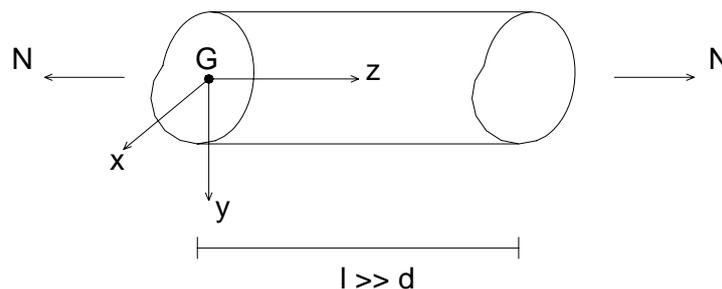
6. FORZA NORMALE (sezione omogenea, elemento in acciaio)

La sollecitazione si riduce al solo sforzo assiale N quando la risultante delle forze esterne agenti sulla trave coincide con il suo asse geometrico.

Quando N è accompagnato da altre sollecitazioni gli effetti da essa prodotti si dovranno comporre con quelli prodotti da altre sollecitazioni (sovrapposizione degli effetti).

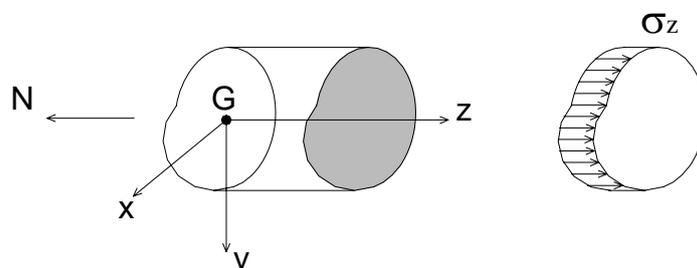
In virtù del principio di Saint Venant, qualunque sia la distribuzione esterna delle forze, ad eccezione delle zone più vicine alle basi, gli effetti dipendono solo dalle risultanti.

In riferimento alla trave rappresentata nella figura seguente, mantenuta in equilibrio da due forze eguali ed opposte N agenti su ciascuna sezione d'estremità, essendo la trave nel suo insieme in equilibrio, lo sarà anche in ogni sua parte.



STATO TENSIONALE

Le tensioni che agiscono sulla sezione tagliata sono:



$$\sigma_z = \frac{N}{A}, \quad \sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

DEFORMAZIONE ASSIALE

Le deformazioni associate alla tensione σ_z attraverso il legame elastico, sono (legge di Hooke generalizzata):

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

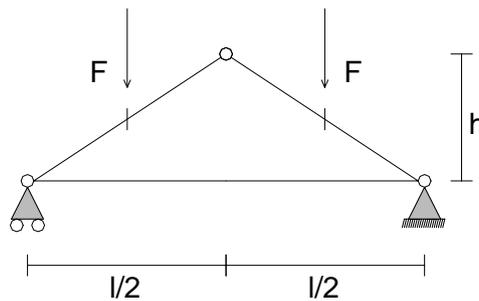
Pensando ad un prisma elementare, la variazione di lunghezza lungo z pari a:

$$dw = \varepsilon_z dz = \frac{\sigma_z}{E} dz = \frac{N}{EA} dz$$

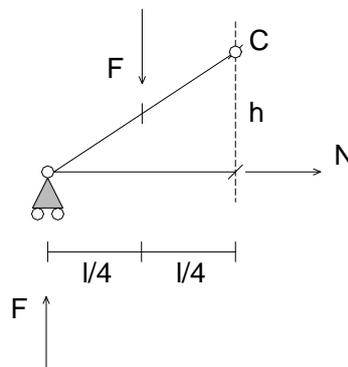
Considerando una trave di lunghezza finita, la variazione di lunghezza misurata lungo l'asse geometrico risulta:

$$\Delta l = \int_0^l dw = \int_0^l \frac{N}{EA} dz = \frac{Nl}{EA}$$

✓ **Esempio 6.1:** Calcolare la sezione del corrente inferiore teso della catena in acciaio data in figura. Utilizzare acciaio Fe430 ($\sigma_{lim}=190\text{MPa}$)



Per valutare lo sforzo di trazione (N) sul corrente inferiore scriviamo l'equilibrio alla rotazione di una parte della struttura intorno al punto C



$$-F \cdot \frac{l}{2} + F \cdot \frac{l}{4} + N \cdot h = 0$$

$$N \cdot h = \frac{Fl}{4} \Rightarrow N = \frac{Fl}{4h}$$

Progetto

Dalla $\sigma_z = \frac{N}{A}$, e dalla condizione di resistenza $\sigma \leq \sigma_{\text{lim}}$, si ottiene $A = \frac{N}{\sigma_{\text{lim}}}$.

Verifica

Occorre verificare che $\frac{N}{A} \leq \sigma_{\text{lim}}$

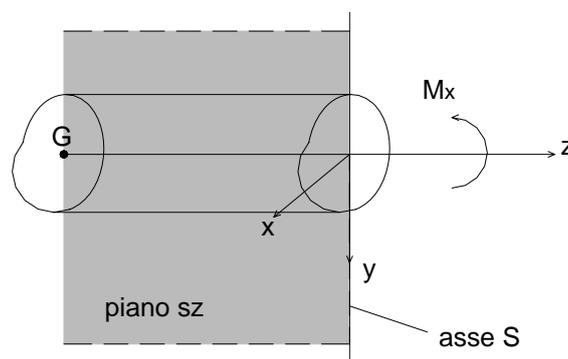
con $F = 160 \text{ kN}$, $\sigma_{\text{lim}} = 190 \text{ MPa}$, $l = 6 \text{ m}$, $h = 2 \text{ m}$

$$N = \frac{Fl}{4h} = \frac{160 \cdot 6}{4 \cdot 2} = 120 \text{ kN}$$

$$A = \frac{N}{\sigma_{\text{lim}}} = \frac{120 \cdot 10^3}{190} = 632 \text{ mm}^2$$

7. FLESSIONE SEMPLICE (sezione omogenea, elemento in acciaio)

La sollecitazione si riduce al solo momento flettente M quando la risultante delle forze esterne agenti sulla trave equivale ad una coppia agente in un piano normale a quello della sezione. In particolare si parla di flessione retta quando agisce solo $M=M_x$ nel piano principale (z, y) che prende il nome di piano di sollecitazione (la sua traccia nel piano della sezione si chiama asse di sollecitazione e nel caso di flessione retta coincide con l'asse y).



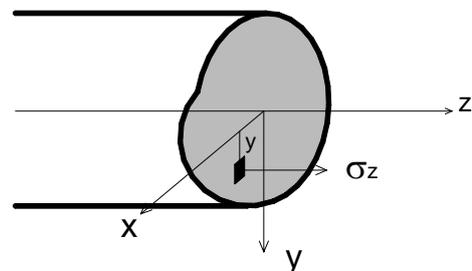
La trave soggetta ad M si inflette e il suo asse geometrico (asse z) si trasforma in una curva (linea elastica) di curvatura costante (arco circolare). Le fibre longitudinali si accorciano nella parte concava della trave (fibre compresse) e si allungano nella parte convessa (fibre tese). Tra queste ce ne sono alcune che conservano la loro lunghezza costituendo uno strato neutro che incontra ogni sezione secondo una retta (asse neutro) normale all'asse S . In corrispondenza dell'asse neutro si avrà $\sigma_z=0$.

STATO TENSIONALE

Data una sezione retta soggetta ad M , affinché siano soddisfatte le equazioni di equilibrio occorre che sia:

$$N = \int_A \sigma_z \, dA = 0$$

$$M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \, dA = M$$



Abbiamo già visto che queste condizioni di equilibrio non determinano la legge di variazione di σ_z nella sezione, potendosi pensare infinite distribuzioni di tensione soddisfacenti a tali condizioni.

Occorre introdurre due ipotesi, una sulla deformata della trave, l'altra sul comportamento del materiale.

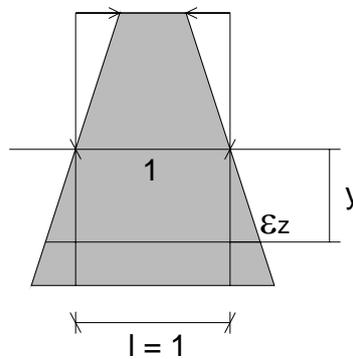
- (I) conservazione delle sezioni piane ("Le sezioni rette rimangono piane e normali alle fibre deformate", Bernoulli-Navier)
- (II) validità della legge di Hooke

Dalla (I) si ha che per fibre parallele all'asse neutro la ε_z è costante e la variazione con la distanza y è di tipo lineare:

$$\varepsilon_z = Ky, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z = -\nu Ky, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Dalla (II) si ha che:

$$\sigma_z = EKy, \quad \sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$



Con queste due ipotesi le condizioni globali di equilibrio possono essere riscritte come segue:

$$N \rightarrow EK \int_A y \, dA = 0$$

$$M_x \rightarrow EK \int_A y^2 \, dA = M$$

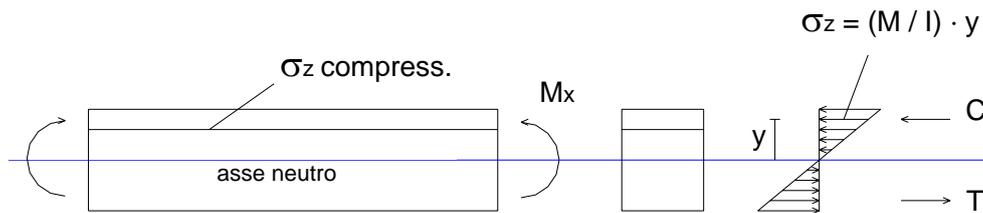
Il primo integrale esprime il momento statico della sezione rispetto all'asse neutro. Essendo il momento statico uguale a zero, l'asse neutro è baricentrico. Il secondo integrale esprime il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro e consente di ricavare σ_z .

$$EKI = M \rightarrow \frac{\sigma_z}{y} I = M \rightarrow \sigma_z = \frac{M}{I} y$$

L'espressione che si ottiene, che consente di ricavare σ_z dato M e la geometria della sezione, è nota come formula monomia o di Navier. Essa assicura che le σ_z provocate dal solo momento flettente M si annullano in corrispondenza dell'asse neutro, sono costanti lungo ogni corda a questo parallela, e infine linearmente proporzionali alla distanza da esso.

L'andamento lineare delle σ_z comporta che i valori massimo e minimo della sollecitazione si riscontrino nelle fibre più distanti dall'asse neutro. Se la sezione è simmetrica rispetto a questo asse, tali valori risultano uguali a meno del segno.

Indicate con y' ed y'' le distanze delle fibre estreme dall'asse neutro, dalla formula di Navier si ha:



$$\sigma_z' = \frac{M}{I} y' = \frac{M}{W'}$$

$$\sigma_z'' = \frac{M}{I} y'' = \frac{M}{W''}$$

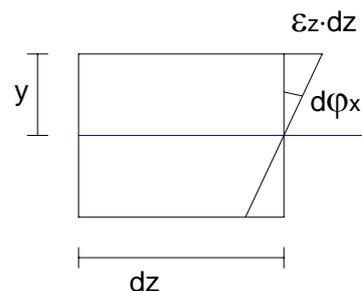
in cui W' e W'' sono i moduli di resistenza della sezione.

DEFORMAZIONE FLESSIONALE

Valutiamo ora la rotazione φ_x prodotta da M_x .

Consideriamo la rotazione delle sezioni di estremità di un concio elementare di lunghezza dz . Assumendo l'angolo prossimo alla tangente

$$d\varphi_x = \frac{\varepsilon_x \cdot dz}{y}$$



(Se il concio fosse unitario si avrebbe: $d\varphi_x = \varepsilon_x / y$)

Legge di Hooke e Navier:
$$\varepsilon_z(y) = \frac{\sigma_z(y)}{E} = \frac{M_x}{EI_x} \cdot y$$

quindi:
$$d\varphi_x = \frac{M_x}{EI_x} \cdot dz$$

Si può facilmente estendere tale risultato alla trave di lunghezza finita.

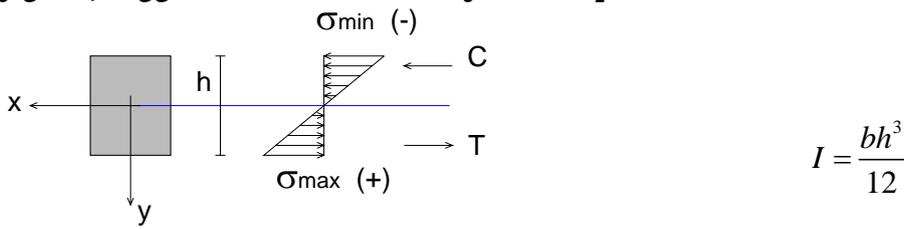
Nel caso generico di trave di lunghezza l , la rotazione delle due sezioni di estremità sarà

$$\varphi_x = \frac{M_x}{EI_x} \cdot l$$

Nel caso di concio unitario la rotazione delle sezioni è pari a φ_x/l . Si definisce la curvatura:

$$\frac{\varphi_x}{l} = \frac{1}{r} = \frac{M_x}{EI_x}$$

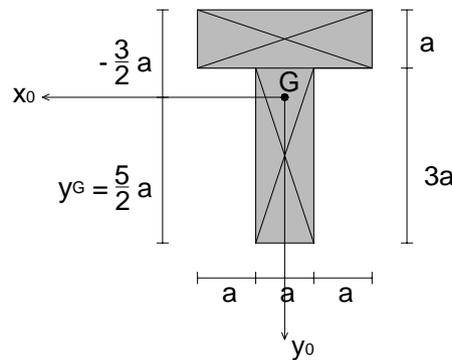
✓Esempio 7.1: Determinare i valori di massimo e di minimo della tensione nella sezione in figura, soggetta ad un momento flettente pari a M .



$$\sigma_{\max} = \sigma\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{12M}{bh^3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{6M}{bh^2}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{12M}{bh^3} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{6M}{bh^2}$$

✓Esempio 7.2: Determinare i valori di massimo e di minimo della tensione nella sezione in figura, soggetta ad un momento flettente pari a M .



Si determina la posizione del baricentro G considerando il momento statico della sezione rispetto all'asse passante per il lembo inferiore della stessa:

$$y_G = \frac{S}{A_{\text{tot}}} = \frac{(a \cdot 3a) \cdot 1,5a + a \cdot 3a \cdot 3,5a}{(a \cdot 3a) + (a \cdot 3a)} = \frac{15a^3}{6a^2} = \frac{5}{2}a$$

$$y_{G,\text{inf}} = \frac{5}{2}a \quad y_{G,\text{sup}} = 4a - \frac{5}{2}a = \frac{3}{2}a$$

Applicando il teorema del trasporto, il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico x_0 è pari a:

$$I_{x_0} = \frac{3a \cdot a^3}{12} + 3a^2 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \frac{a \cdot 27a^3}{12} + 3a^2 \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 a^2 = \frac{a^4}{4} + 3a^4 + \frac{9}{4}a^4 + 3a^4 = \frac{17}{2}a^4$$

od anche, in riferimento al lembo inferiore della sezione,

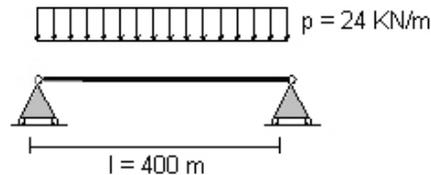
$$I_{x_0} = \frac{3a \cdot (4a^3)}{3} - \frac{2a \cdot (3a)^3}{3} - (3a^2 + 3a^2) \cdot \left(\frac{5}{2}a\right)^2 = 64a^4 - 18a^4 - \frac{75}{2}a^4 = \frac{17}{2}a^4$$

si ottengono così le tensioni massime e minime sulla sezione:

$$\sigma_{\max} = \sigma\left(\frac{5}{2}a\right) = \frac{5}{17} \frac{M}{a^3}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma \left(-\frac{3}{2} a \right) = -\frac{3}{17} \frac{M}{a^3}$$

✓ **Esempio 7.3:** Progettare la sezione della trave in figura utilizzando acciaio Fe360 ($\sigma_{\lim}=160\text{MPa}$). Scelto il profilo adatto calcolare il momento resistente (M_{\max}^{rinf}) ottenuto mediante l'applicazione di piattabande di rinforzo sulle ali della sezione, nel caso che tali piattabande abbiano spessore pari a 0.5 cm e 1.0 cm.



$$M_{\max} = \frac{1}{8} p l^2 = \frac{24 \cdot 4^2}{8} = 48 \text{ KNm}$$

$$\text{Fe360} \rightarrow \sigma_{\lim} \cong 160 \text{ MPa}$$

a. **PROGETTO** (dimensionamento della sezione)

$$W_x = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\lim}} = \frac{48 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{160} = 3 \cdot 10^5 \text{ mm}^3 = 300 \text{ cm}^3$$

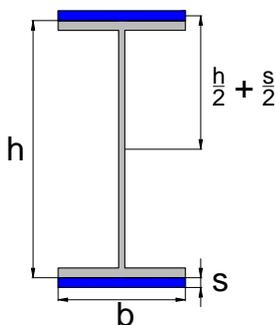
Adottando una trave della serie IPE dai sagomari si ricava che il profilo necessario è l'IPE240:

$$\text{IPE 240} \rightarrow W_x [\text{cm}^3] = 324 \text{ cm}^3$$

b. **VERIFICA** (della tensione max)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{48 \cdot 10^6}{324 \cdot 10^3} = \frac{48000}{324} = 148,2 \text{ MPa} < 160 \text{ MPa}$$

c. **PROGETTO**, piattabande di rinforzo



$$I_{x_G}^{\text{rinf}} = I_{x_G} + 2 \cdot \left[\frac{b \cdot s^3}{12} + (b \cdot s) \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{s}{2} \right)^2 \right]$$

I_{x_G} è il momento d'inerzia baricentrico di una trave IPE240. Quest'ultima ha le seguenti caratteristiche geometriche:

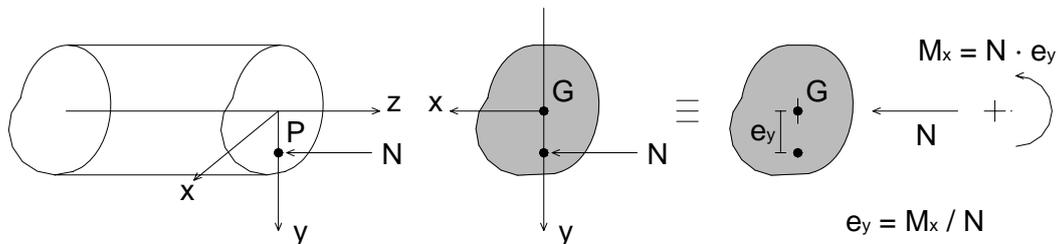
$$\text{IPE 240} \rightarrow h = 24 \text{ cm}, b = 12 \text{ cm}, I_{x_G} = 3892 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned} \bullet s = 0,5 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad I_{x_G}^{rinf} &= 3892 + 1801 = 5693 \text{ cm}^4 \\ W^{rinf} &= I_{x_G}^{rinf} / y_G = 5693 / 12,5 = 455,44 \text{ cm}^3 \\ M_{\max}^{rinf} &= \sigma_{adm} \cdot W^{rinf} = 160 \cdot 455,44 \cdot 10^{-3} = 73 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet s = 1 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad I_{x_G}^{rinf} &= 3892 + 3752 = 7644 \text{ cm}^4 & W^{rinf} &= 7644 / 13 = 588 \text{ cm}^3 \\ M_{\max}^{rinf} &= 94 \text{ kNm} \end{aligned}$$

8. PRESSOFLESSIONE (sezione omogenea, elemento in acciaio)

E' il caso in cui sulla trave agisce la forza normale N applicata in un punto P detto "centro delle pressioni" eccentrico rispetto al baricentro G .



Si parla di presso(tenso)flessione retta quando l'asse di sollecitazione (traccia del piano di sollecitazione nel piano della sezione) è normale all'asse neutro della sezione.

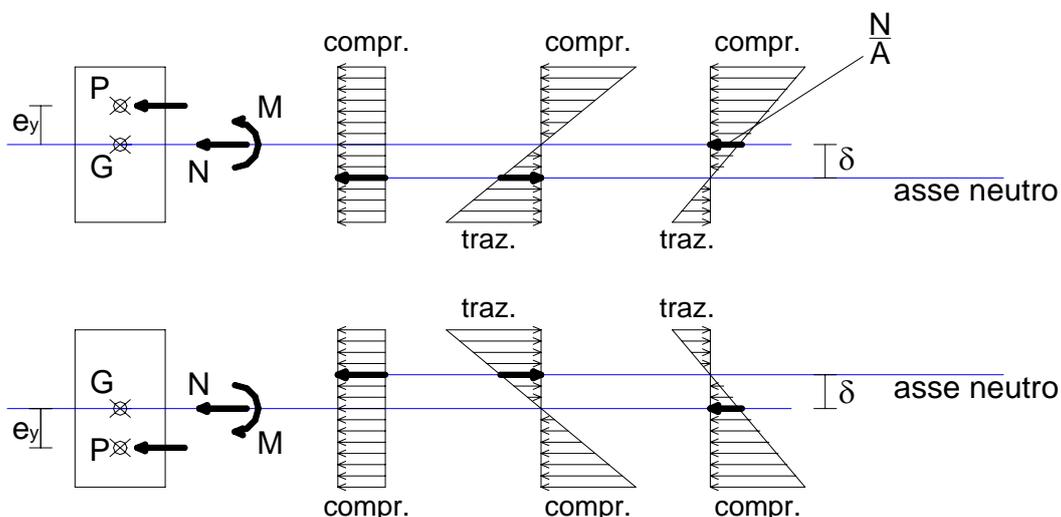
STATO TENSIONALE

Lo stato tensionale si valuta utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, dal quale risulta:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \quad \text{Formula binomia}$$

La presso(tenso)flessione è uno stato di sollecitazione che si verifica prevalentemente nei pilastri (pilastri esterni, azioni orizzontali pilastri alti).

Considerando una generica sezione analizziamo come si evolve lo stato tensionale che risulta dall'applicazione di N ed M .

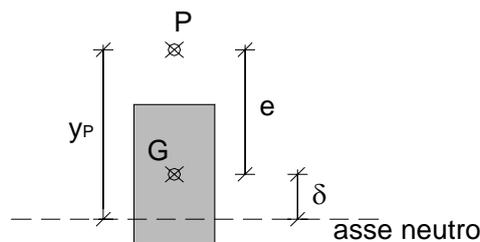


Lo stato tensionale della sezione è dato dalla somma (sovrapposizione degli effetti) di quello costante di compressione risultante dalla forza normale N , e di quello lineare (comprese le fibre superiori e tese quelle inferiori) risultante dal momento flettente M . Nel caso in cui il centro di pressione è spostato verso il lembo superiore della sezione, si ha una sezione compressa superiormente, e tesa inferiormente, con l'asse neutro posizionato dalla parte opposta, rispetto al baricentro, del centro di pressione.

Nel caso in cui il centro di pressione è spostato verso il lembo inferiore della sezione, si ha una sezione tesa superiormente, e compressa inferiormente.

Se P si avvicina a G l'asse neutro si allontana dal lembo della sezione (quindi la sezione è tutta compressa). Se P si allontana l'asse neutro si avvicina alla sezione. Si noti come l'asse neutro (non più baricentrico come nella flessione semplice) ed il centro di sollecitazione P (o delle pressioni) siano sempre da parte opposta rispetto a G .

POSIZIONE DELL'ASSE NEUTRO (SEZIONE RETTANGOLARE)



Dall'equilibrio alla traslazione in prossimità delle fibre neutre, dove $y = \delta$,

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y = 0$$

$$\frac{N}{A} + \frac{M}{I} \delta = 0 \rightarrow \delta = \frac{I}{A} \cdot \frac{N}{M} = \frac{I}{A \cdot e}$$

$$y_p = e + \delta \rightarrow y_p = e + \frac{I}{A \cdot e}$$

$$y_p = \frac{A \cdot e^2 + I}{A \cdot e} = \frac{A \cdot e^2 + I_{x_p} - A \cdot e^2}{S_{x_p}} \rightarrow y_p = \frac{I_{x_p}}{S_{x_p}}$$

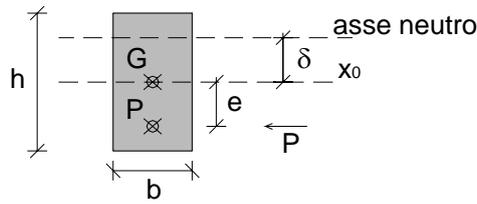
con

y_p : distanza del centro di pressione dall'asse neutro

e : distanza del centro di pressione dal baricentro

δ : distanza del baricentro dall'asse neutro

NOCCIOLO CENTRALE D'INERZIA (SEZIONE RETTANGOLARE)



$$y_p = e + \delta \qquad A = b \cdot h \qquad I_{x_0} = \frac{bh^3}{12}$$

$$\delta = \frac{I}{A \cdot e} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{1}{bh} \cdot \frac{1}{e} \qquad |\delta| = \frac{h^2}{12} \cdot \frac{1}{|e|}$$

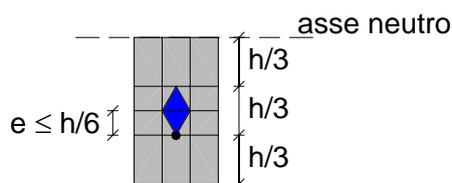
Se l'asse neutro taglia la sezione si ha trazione (per es. nei materiali non reagenti a trazione l'asse neutro deve essere tutto esterno).

Vediamo quale è la posizione limite (distanza di P da G) entro la quale la sezione risulta tutta compressa:

$$|\delta| = \frac{h^2}{12} \cdot \frac{1}{|e|} \quad \rightarrow \quad |e| = \frac{h^2}{12|\delta|}$$

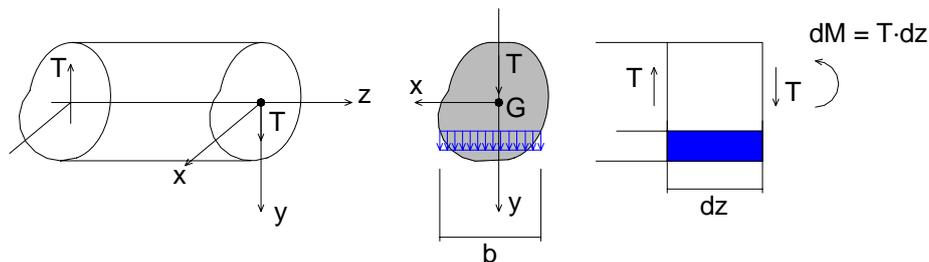
$$\text{se } |\delta| \geq \frac{h}{2} \qquad e \leq \frac{2}{12}h = \frac{h}{6}$$

Il limite $e \leq h/6$ individua il *nocciolo centrale di inerzia*



9. TAGLIO (SEZIONE OMOGENEA)

Una sezione è sollecitata dal solo sforzo di taglio T , quando la risultante delle forze esterne (azioni) ad un estremo della trave giace nel piano della sezione e passa per il baricentro. La sollecitazione di taglio si accompagna sempre alla flessione. Se si considera infatti un tronco elementare di trave, l'equilibrio richiede la presenza di un momento flettente dovuto alla risultante T , tra due sezioni vicine.



STATO TENSIONALE

Lo studio dello stato tensionale dovuto al taglio si basa su una teoria approssimata sviluppata da Jourawski nel 1845.

L'ipotesi semplificativa, ma che conduce comunque a risultati sufficientemente accurati per le applicazioni di interesse strutturale, consiste nell'assumere che la tensione tangenziale lungo ogni corda della sezione ortogonale all'asse per il quale passa la risultante T , sia costante.

Si consideri il tronco di trave tagliato dalla corda ii e se ne studi l'equilibrio alla traslazione in direzione z :

$$-\int_A \sigma_z \cdot dA - \tau_{zy} \cdot b \cdot dz + \int_A (\sigma_z + d\sigma_z) \cdot dA = 0$$

$$\int_A d\sigma_z \cdot dA - \tau_{zy} \cdot b \cdot dz = 0$$

$$\sigma_z = \frac{M}{I_{x_G}} \cdot y_G \quad \text{da cui} \quad d\sigma_z = \frac{dM}{I_{x_G}} \cdot y_G = \frac{T \cdot dz}{I_{x_G}} \cdot y_G$$

$$\frac{T}{I_{x_G}} dz \int_{A^*} y \cdot dA - \tau_{zy} \cdot b \cdot dz = 0$$

$$\frac{T}{I_{x_G}} \cdot S_x^* = \tau_{zy} \cdot b$$

$$\tau_{zy} = \frac{T \cdot S_x^*}{I_{x_G} \cdot b} \quad \text{[Jourawski, 1845]}$$

dove S_x^* è il momento statico dell'area A^* definita dalla retta ii rispetto all'asse baricentrico (asse neutro per flessione).

DEFORMAZIONE PER TAGLIO

In generale le tensioni tangenziali variano lungo l'altezza. Di conseguenza le deformazioni (scorrimenti angolari) $\gamma_{zy} = \tau_{zy} / G$ variano anch'esse lungo l'altezza.

In particolare si ha $\gamma_{zy} = 0$ nelle fibre esterne (dove $\tau_{zy} = 0$).

$$\gamma_m = \frac{dv}{dz}$$

Se le τ fossero costanti, le sezioni non si ingobberebbero (caso ideale) e risulterebbe:

$$\tau_{zy} = \frac{T}{A} \text{ (cost.)}, \quad \text{essendo } \tau_{zy} = \gamma_{zy} \cdot G \quad \text{si ha} \quad \gamma_{zy} = \frac{T}{A \cdot G}$$

Nel caso più generale di τ variabili (caso reale) si introduce il *fattore di taglio*, che dipende solo dalla geometria della sezione ed assume sempre valori >1 . L'espressione di γ , nel caso generale, si modifica nella:

$$\gamma_{zy} = \chi \cdot \frac{T}{A \cdot G}$$

CENTRO DI TAGLIO

In condizioni generali la forza di taglio, se presenta un'eccentricità rispetto all'asse della sezione, genera un momento torcente.

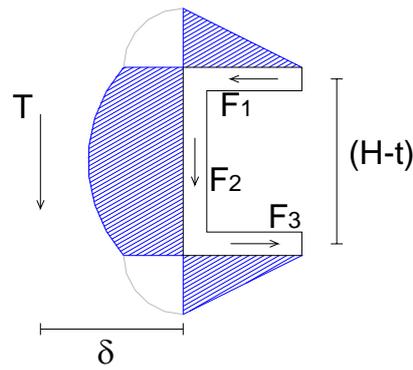
La condizione di taglio puro si ha se T ha retta d'azione passante per un punto tale che non ci sia torsione. Tale punto, detto *centro di taglio*, nel caso di sezioni a doppia simmetria coincide con il baricentro. Nei casi di sezioni non simmetriche giace sull'asse passante per G , ma ad una distanza δ tale non si abbia torsione.

Per quanto detto δ si può ricavare scrivendo la risultante delle tensioni tangenziali presenti sia sull'anima che sulle ali.

A titolo di esempio vediamo come si ricava la posizione del centro di taglio in una sezione a C:

$$S_x(y) = s \cdot t \cdot \left(\frac{H}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

$$\tau_{zy} = \frac{T \cdot S_x(y)}{I_{x_G} \cdot b}$$



Considerando T uniforme:

$$\tau_{zy} = s \cdot t \cdot \left(\frac{H}{2} - \frac{t}{2} \right) \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{I_{x_G}} = \frac{s \cdot t}{2 \cdot b \cdot I_{x_G}} (H - t)$$

per $t = b$ $\tau_{zy} = \frac{s}{2 \cdot I_{x_G}} (H - t)$ cresce linearmente con s .

$$\tau_{zy}(B) = \frac{B}{2 \cdot I_{x_G}} (H - t) \quad F_1 \equiv F_3 = \frac{\tau \cdot B \cdot t}{2} = \frac{B^2 \cdot t}{4 \cdot I_x} (H - t)$$

equilibrio dei momenti rispetto a O passante per F_2

$$T_x \cdot \delta = F_1 \cdot (H - t)$$

con $T_x = 1$, nota F , si determina:

$$\delta = F_{ala} \cdot (H - t)$$

✓ Esempio 9.1 Sezione rettangolare $b \times h$

Il momento statico:

$$S_x(y) = A \cdot y = \left[b \cdot \left(\frac{h}{2} - y_i \right) \right] \cdot \left[y_i + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y_i \right) \right] = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y_i \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y_i \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_i^2 \right)$$

Il momento d'inerzia baricentrico:

$$I_{x_G} = \frac{bh^3}{12}$$

E si ricava, quindi, la tensione tangenziale:

$$\tau_{zy} = \frac{T \cdot S_x(y)}{I_{x_G} \cdot b} = \frac{6T}{bh^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y_i^2 \right)$$

questa varia con legge parabolica ed assume valore nullo agli estremi, e valore massimo nel baricentro della sezione:

$$\tau_{zy}(\pm h/2) = \frac{6T}{bh^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) = 0$$

$$\tau_{zy, \max} = \frac{6T}{bh^3} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A}$$

✓ Esempio 9.2 Sezione doppio T

Supponendo piccoli gli spessori delle ali e dell'anima, risulta:

$$I = \frac{b_a h^3}{12} + \left[(b_f \cdot 2d) \cdot \frac{h^2}{4} \right] \cdot 2 = \frac{b_a h^3}{12} + b_f \cdot d \cdot h^2 = h^2 \cdot \left(\frac{b_a h}{12} + b_f \cdot d \right)$$

Il momento statico rispetto ad n nell'anima:

$$S_x(y) = \frac{b_a}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y_i^2 \right) + (2d + b_f) \cdot \frac{h}{2}$$

$$\tau_{zy} = \frac{T \cdot S_x(y)}{I_{x_G} \cdot b} = \frac{T}{I} \cdot \left[d \cdot h \cdot \frac{b_f}{b_a} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y_i^2 \right) \right]$$

per $y = 0$ (nel baricentro) τ_{\max} (anima)

per $y = \frac{h}{2}$ (attacco ala anima) τ_{\min} (anima)

mentre sulle ali (flange) si ha:

$$S_{x, flangia} = (b_f \cdot s) \cdot \frac{h}{2} \quad \tau_{zy} = \frac{T}{I_{x_G}} \cdot \frac{h \cdot s}{2}$$

per $s = d$ $\tau_{\max} = \frac{hd}{2} \cdot \frac{T}{I}$

per $s = 0$ $\tau_{estremo} = 0$

✓ Esempio 9.3

In una trave in cui lo spessore dell'anima è trascurabile rispetto alla larghezza delle ali (IPE), la $\tau_{\max} \cong \tau_{\min}$ e quindi per la τ sull'anima si può ragionevolmente far riferimento alla sola τ_{\max} , valutata in corrispondenza dell'asse neutro.

$$S_i = b \cdot \frac{h - h_1}{2} \cdot \left(\frac{h}{4} + \frac{h_1}{4} \right) + b_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2} - y \right) \cdot \frac{\frac{h_1}{2} + y}{2}$$

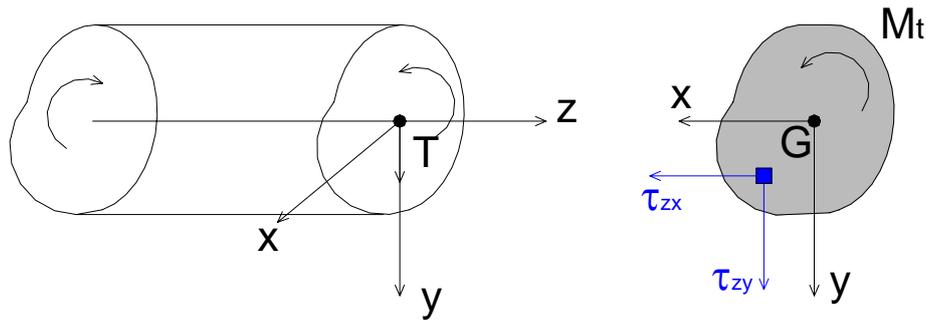
$$\tau_{\max} = \tau_{(y=0)} = \frac{T}{I_x \cdot b_1} \left[\frac{1}{8} \cdot (bh - bh_1) \cdot (h + h_1) + \frac{b_1 h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{T}{8I_x \cdot b_1} [bh^2 + bhh_1 - bh_1 h - bh_1^2 + b_1 h_1^2]$$

$$\tau_{\min} = \tau_{(y=h/2)} = \frac{T}{I_x \cdot b_1} \left[\frac{1}{8} \cdot (bh^2 - bh_1^2) + 0 \right] = \frac{T}{8I_x \cdot b_1} (bh^2 - bh_1^2)$$

L'unica differenza fra le due espressioni è nel prodotto $b_1 h_1^2$, ma essendo b_1 molto piccolo rispetto a b risulta ragionevole assumere $\tau_{\max} \cong \tau_{\min}$ quando b_1 sull'anima è costante e piccolo.

10. TORSIONE (SEZIONE OMOGENEA)

Si ha torsione semplice quando la risultante delle azioni esterne applicate ad un elemento trave è equivalente a due coppie uguali e contrarie M_t sulle sezioni di estremità agenti attorno all'asse geometrico del solido.

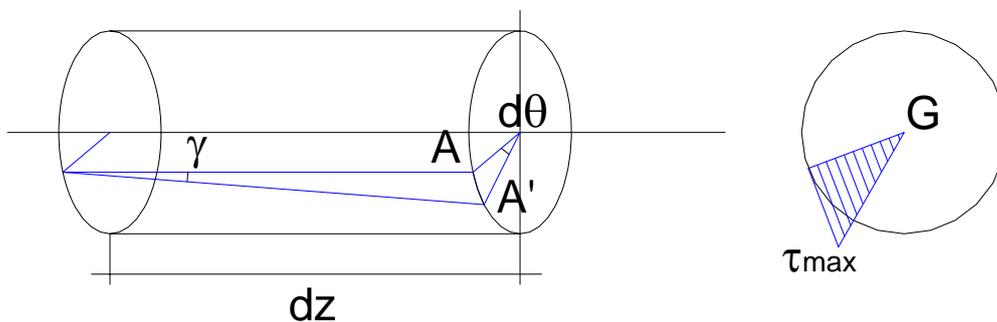


In generale
$$M_t = \int_A (\tau_{zy} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y) dA$$

Introduciamo prima il caso delle sezioni circolari per poi vedere l'estensione ai casi delle sezioni rettangolari, e poi quelle a parete sottile.

SEZIONE CIRCOLARE

Si considera un cilindro elementare. Quale ipotesi semplificativa si assume che la sezione circolare durante la deformazione si conservi piana e che lo scorrimento angolare ($\gamma = \gamma_{z\theta}$) vari linearmente lungo l'asse del cilindro.



Esprimendo l'arco elementare AA' si ha:

sulla sezione
$$d\theta = \frac{AA'}{R}$$

sul tronco
$$\gamma = \frac{AA'}{dz}$$

quindi
$$\begin{cases} AA' = R \cdot d\theta \\ AA' = \gamma \cdot dz \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \gamma = R \frac{d\theta}{dz} \quad [\text{ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE}]$$

Considerando il legame costitutivo $\tau = G\gamma$ si ottiene $\tau = G r \frac{d\theta}{dz}$, la quale esprime che le tensioni tangenziali sono proporzionali al raggio r e dirette normalmente ad esso.

Uguagliando il momento interno prodotto dalle τ con M_t esterno, si ottiene l'espressione dell'angolo unitario di torsione.

$$\int_A \tau \, dA \cdot r = M_t$$

essendo $\tau = G r \frac{d\theta}{dz}$ si ottiene $G \frac{d\theta}{dz} \int_A r^2 \, dA = M_t$

ed essendo $\frac{d\theta}{dz} = \frac{M_t}{G \cdot I_p}$, ed $I_p = \int_A r^2 \, dA$

si ottengono:

$$\gamma = \frac{M_t r}{G I_p}, \quad \tau = \frac{M_t}{I_p} r$$

(si noti l'analogia con l'espressione di Navier per la flessione).

La tensione assume valore max sul contorno della sezione, cioè per $r = R$, ed

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}, \text{ si ha:}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} R = 2 \frac{M_t}{\pi R^3}$$

Nel caso di sezioni circolari la condizione di equilibrio al bordo è verificata in quanto la tensione tangenziale è tangente al bordo stesso. Se la sezione non è circolare, la τ non è più tangente al bordo, e si ha una componente tangente ed una normale.

SEZIONE A PARETE SOTTILE

Nel caso di travi che hanno una sezione a parete sottile chiusa si fa ricorso all'analogia idrodinamica in cui la τ viene associata alla velocità di un fluido dotato di moto di rotazione permanente. L'ipotesi semplificativa, tanto meglio verificata quanto minore è lo spessore, che la tensione tangenziale τ sia

uniformemente distribuita attraverso lo spessore. Questo comporta che in una sezione a parete sottile di spessore δ il flusso $\tau \cdot \delta = \text{cost.}$
 Scrivendo l'equilibrio longitudinale di un tratto finito ds , con s ascissa curvilinea:

$\tau \delta ds$ forza elementare agente su un'area elementare δds

$$M_t = \int \tau \delta r ds = \tau \delta \int r ds = \tau \delta 2\Omega$$

dove Ω è l'area racchiusa dalla linea media.

Tale soluzione approssimata introdotta da Bredt consente di esprimere la τ per sezioni a parete sottile di qualsiasi forma

$$\tau(s) = \frac{M_t}{2\Omega \cdot \delta(s)}$$

FATTORE DI TORSIONE

In generale per sezioni non circolari la distribuzione delle tensioni dipende dalla forma della sezione. In questi casi, si introduce un fattore correttivo q , detto *fattore di torsione*. Questo dipende dalla forma della sezione, è sempre >1 tranne che per la sezione circolare per la quale si ha $q=1$.

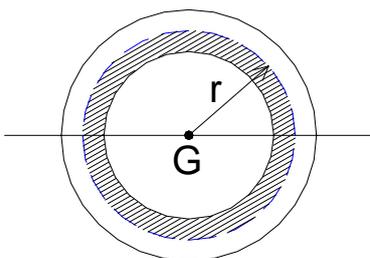
L'angolo unitario di torsione si esprime:

$$\frac{d\theta}{dz} = q \frac{M_t}{G I_p}$$

$$\begin{cases} \gamma = q \frac{M_t}{G I_p} r \\ \tau = q \frac{M_t}{I_p} r \end{cases}$$

Esempio 10.1

Per una sezione a forma di corona circolare sottile si ha:



$$\Omega = \pi r^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2\pi R^2 \delta}$$