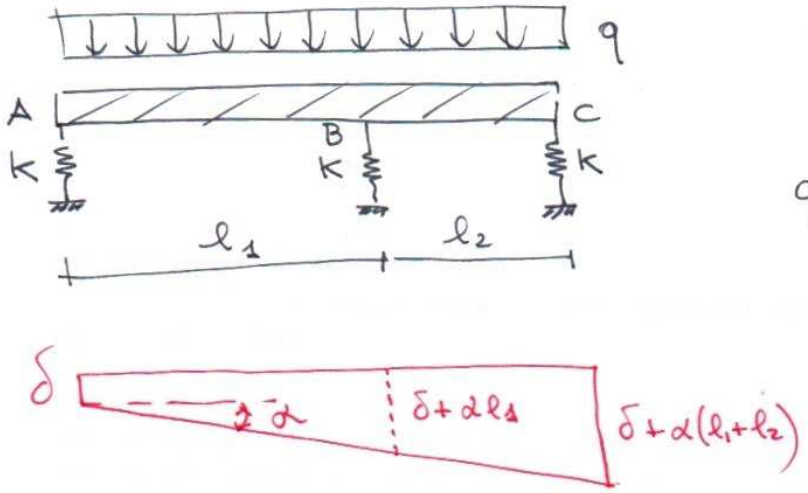


Equilibrio alla traslazione verticale

$$q(l_1+l_2) = K\left(\delta+\delta+\alpha l_1+ + \delta+\alpha(l_1+l_2)\right)$$

Equilibrio alla rotazione polo A

$$\frac{q(l_1+l_2)^2}{2} = K\left[\delta+\alpha l_1\right] l_1 + K\left[\delta+\alpha(l_1+l_2)\right](l_1+l_2)$$

Sviluppando:

$$\begin{cases} q(l_1+l_2) = K\left(3\delta+(2l_1+l_2)\alpha\right) \\ \dfrac{q(l_1+l_2)^2}{2} = K\left(\delta l_1+\alpha l_1^2+\delta l_1+\delta l_2+\alpha l_1^2+2\alpha l_1 l_2+\alpha l_2^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{q(l_1+l_2)}{K} = 3\delta+(2l_1+l_2)\alpha \\ \dfrac{q(l_1+l_2)^2}{2K} = \delta(2l_1+l_2)+(2l_1^2+2l_1l_2+l_2^2)\alpha \end{cases}$$

sistema di 2 eqq. in 2 inc. δ e α

moltiplico la 1ª equazione per $(2l_1+l_2)$ e la seconda per 3, poi sottraggo:

$$\begin{cases} \dfrac{q(l_1+l_2)(2l_1+l_2)}{K} = 3(2l_1+l_2)\delta+(2l_1+l_2)^2\alpha \\ \dfrac{3q(l_1+l_2)^2}{2K} = 3(2l_1+l_2)\delta+3(2l_1^2+2l_1l_2+l_2^2)\alpha \end{cases}$$

$$\frac{q(l_1+l_2)(2l_1+l_2)}{K} - \frac{3q(l_1+l_2)^2}{2K} = \left[(2l_1+l_2)^2 - 6l_1^2 - 6l_1l_2 - 3l_2^2\right]\alpha$$

$$\frac{q(l_1+l_2)}{K}\left[2l_1+l_2 - \frac{3(l_1+l_2)}{2}\right] = \left[4l_1^2 + l_2^2 + 4l_1l_2 - 6l_1^2 - 6l_1l_2 - 3l_2^2\right]\alpha$$

$$\frac{q(l_1+l_2)}{K}\left[\frac{4l_1+2l_2-3l_1-3l_2}{2}\right] = \left[-2l_1^2 - 2l_1l_2 - 2l_2^2\right]\alpha$$

$$\frac{q}{2K}(l_1+l_2)(l_1-l_2) = -2\left(l_1^2+l_1l_2+l_2^2\right)\alpha \qquad \text{da cui}$$

$$\alpha = \frac{q}{4K}\frac{(l_1+l_2)(l_2-l_1)}{l_1^2+l_1l_2+l_2^2}$$

si noti che, come ci si aspetta, se $l_2 = l_1 \rightarrow \alpha = 0$ inoltre $l_2 > l_1$ perché la trave ruoti in senso orario (nel caso in disegno $\alpha < 0$)

Calcoliamo ora δ dalla 1ª equazione:

$$\delta = \frac{1}{3}\left[\frac{q(l_1+l_2)}{K} - (2l_1+l_2)\frac{q}{4K}\frac{(l_1+l_2)(l_2-l_1)}{l_1^2+l_1l_2+l_2^2}\right] =$$

$$= \frac{q}{3\cdot 4\cdot K}\left[4\cancel{q}l_1 + 4\cancel{q}l_2 - \frac{(2l_1+l_2)(l_2^2-l_1^2)}{l_1^2+l_1l_2+l_2^2}\right] =$$

$$= \frac{q}{12K}\left[\frac{(4l_1+4l_2)(l_1^2+l_1l_2+l_2^2) - 2l_1l_2^2 + 2l_1^3 - l_2^3 + l_1^2l_2}{l_1^2+l_1l_2+l_2^2}\right] =$$

$$= \frac{q}{12k\left(l_1^2+l_1l_2+l_2^2\right)} \cdot \left(4l_1^3+4l_1^2l_2+4l_1l_2^2+4l_1^2l_2+4l_1l_2^2+4l_2^3+ -2l_1l_2^2+2l_1^3-l_2^3+l_1^2l_2\right)$$

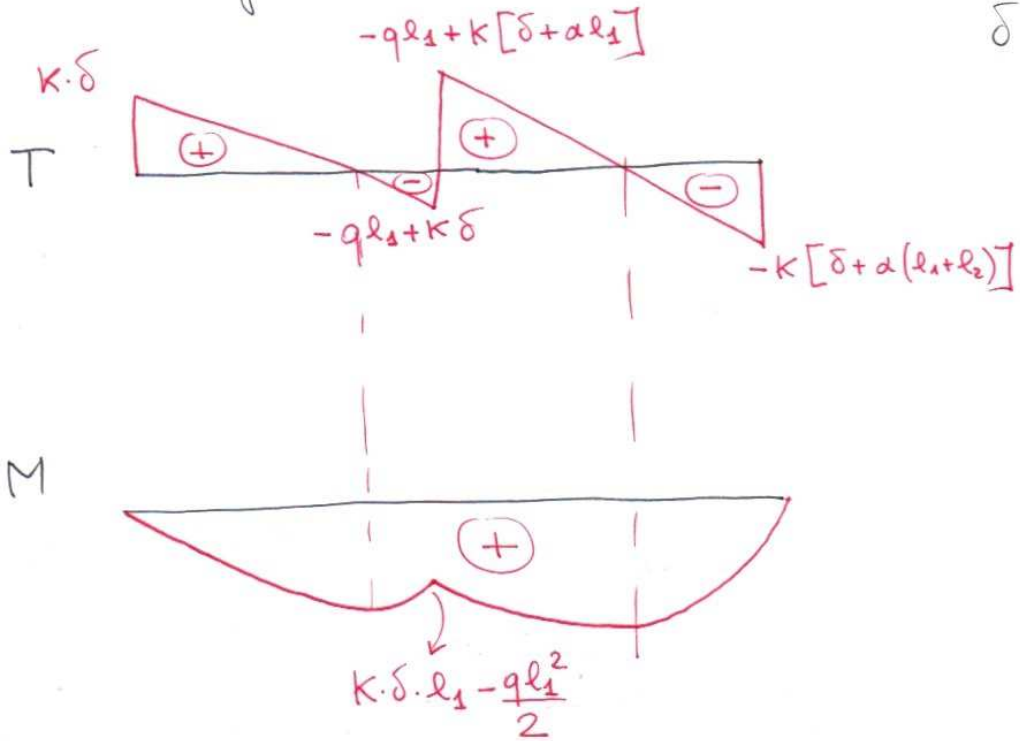
$$= \frac{q}{12k\left(l_1^2+l_1l_2+l_2^2\right)} \cdot \left(6l_1^3+3l_2^3+9l_1^2l_2+6l_1l_2^2\right) =$$

$$= \frac{q}{4k} \frac{\left(2l_1^3+l_2^3+3l_1^2l_2+2l_1l_2^2\right)}{l_1^2+l_1l_2+l_2^2}$$

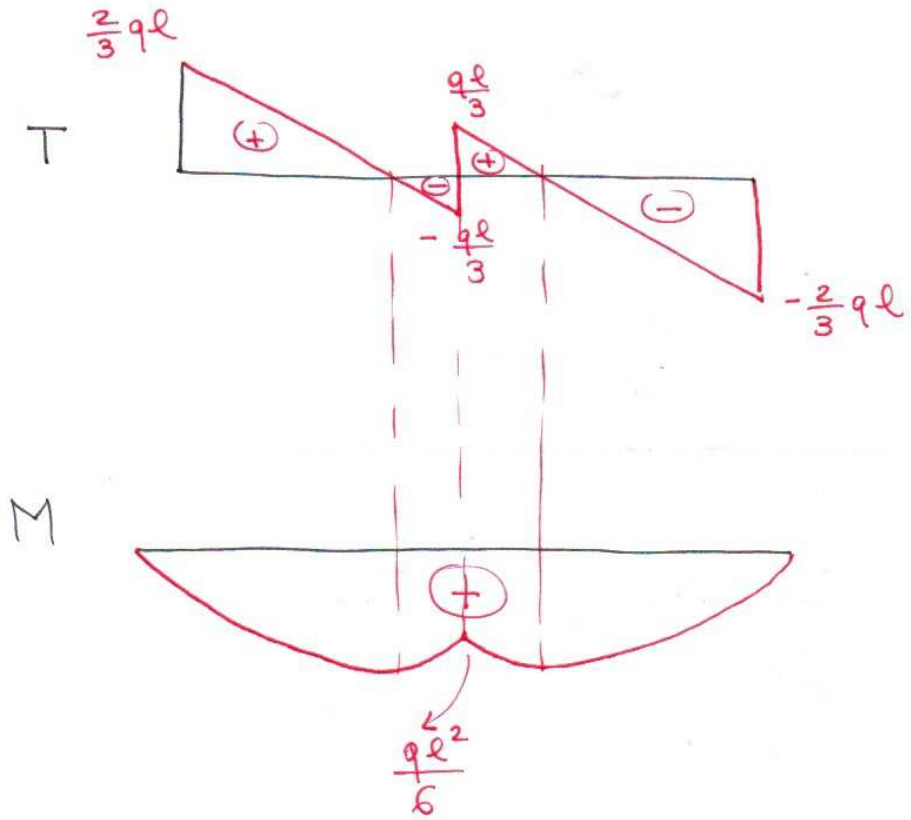
nel caso particolare $l_1 = l_2 = l$ $\quad \delta = \frac{q \cdot 8l^3}{4k \cdot 3l^2} = \frac{2}{3}\frac{ql}{k}$

(Questo valore è corretto perché se $l_1 = l_2$ il carico si distribuisce equamente sulle 3 molle e viene $k \cdot \delta = \frac{Q_{TOT}}{3} = \frac{2ql}{3}$, da cui $\delta = \frac{2ql}{3k}$)

Calcolati i valori di δ e α, possiamo passare al tracciamento dei diagrammi



Nel caso particolare $l_1 = l_2 = l$



Il taglio si annulla per $x = \frac{2}{3}l$ per cui in questo caso si può calcolare anche il M_{max}

$$M_{max} = \frac{2}{3}ql \cdot \left(\frac{2}{3}l\right) - \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}l\right)^2 = +\frac{q}{2}\left(\frac{2}{3}l\right)^2 =$$

$$= \frac{q}{\cancel{2}_{1}} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{9} l^2 = \boxed{\frac{2}{9} q l^2}$$