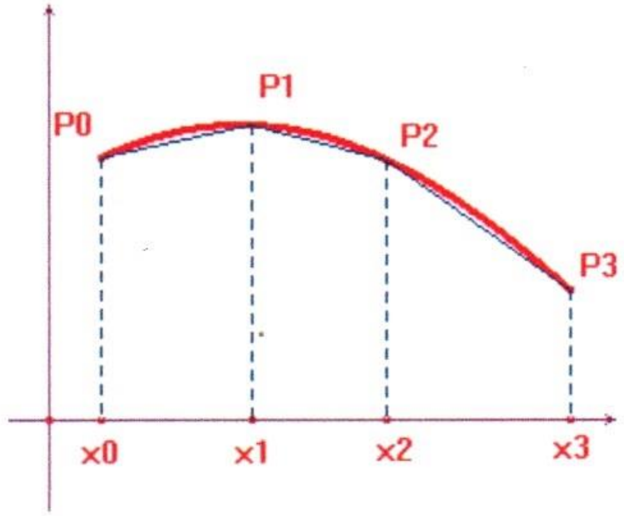
Lunghezza di un arco di curva espresso in forma cartesiana

Senza entrare nei dettagli e limitandoci a considerazioni intuitive e manifestamente non rigorose, vogliamo "dimostrare" la formula per calcolare la lunghezza di un arco di curva piana che sia grafico di un funzione reale di variabile reale, ovvero che si possa esprimere in quella che si dice la sua "forma cartesiana".

Supporremo che la funzione "$f(x)$" sia derivabile con derivata continua in un intervallo $[a,b]$.

Considerando una suddivisione di $[a,b]$ in intervalli (x_i,x_{i+1}), possiamo approssimare la lunghezza della curva considerando la somma delle lunghezze di tutti i segmenti che uniscono i punti di coordinate $(x_i,f(x_i))$ e $(x_{i+1},f(x_{i+1}))$ così come rappresentato nella seguente figura:



La lunghezza della spezzata così definita è pari a:

$$l' = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \qquad (1)$$

A questo punto poiché la funzione "f" si è supposta derivabile, ciò significa che ad essa posso applicare il teorema di Lagrange per ogni singolo intervallo (x_i, x_{i+1}). In particolare all'interno di ognuno di questi intervalli, la differenza tra i valori della funzione si può scrivere come la derivata calcolata in un punto interno all'intervallo per la differenza $(x_i - x_{i-1})$:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \qquad (2)$$

sostituendo questa espressione all'interno della (1) si ottiene:

$$l' = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}))^2} \qquad (3)$$

nella quale è possibile mettere in evidenza la differenza tra i valori delle ascisse al quadrato e portare tale termine fuori dalla radice:

$$l' = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sqrt{1 + f'^2(c_i)} \qquad (3')$$

Questa espressione rappresenta una approssimazione della lunghezza della curva. Tale approssimazione risulta essere tanto più precisa quanto maggiore è il numero di suddivisioni che si compiono dell intervallo [a,b] o, che è lo stesso, quanto più piccoli sono gli intervalli singoli che compongono tale suddivisione.

Perché il valore diventi esattamente quello della curva dobbiamo fare un ragionamento semplice già effettuato in passato, ovvero dobbiamo far tendere a zero l'ampiezza dei singoli intervalli:

$$l = \lim_{\Delta x_i \to 0} l' = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot \sqrt{1 + f'^2(c_i)} \qquad (4)$$

Ma quando un intervallo tende a zero, la sua ampiezza non si indica più con il simbolo delta, ma con il semplice "dx" (grandezza infinitesima), inoltre dovendo il punto "c_i" rimanere all'interno del singolo intervallo, andando a zero l'ampiezza di ogni intervallo, il punto "c_i" finisce con il coincidere punto per punto con il valore della funzione.

A chiudere tutto il ragionamento è l osservazione in base alla quale, a questo punto, i termini da sommare sono infiniti. Devo cioè svolgere la somma di infiniti termini infinitesimi che come noto equivale a calcolare un integrale.

Dunque l'espressione numerica corretta per la lunghezza di una curva diventa:

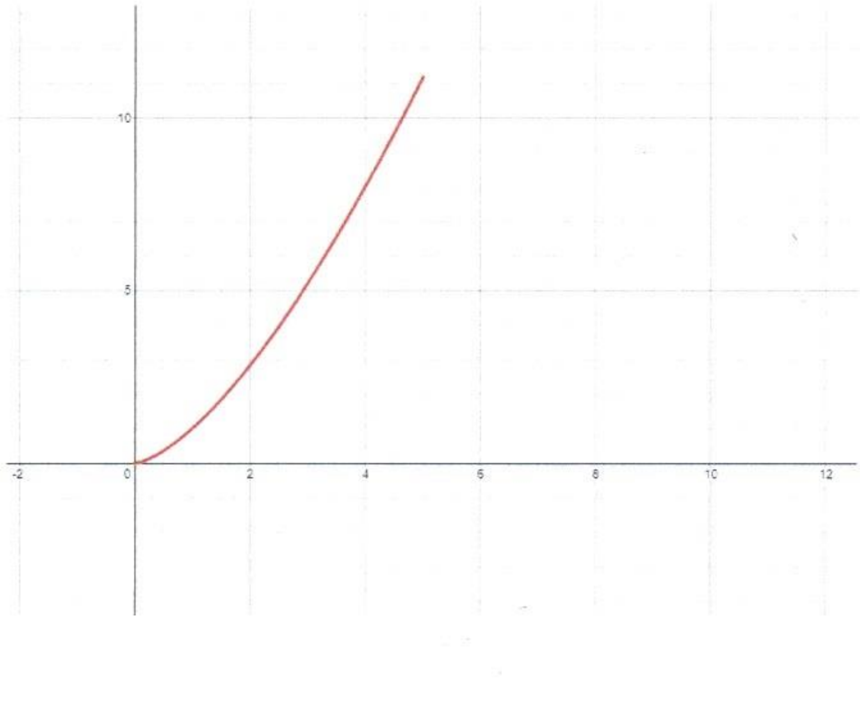
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \qquad (5)$$

Dunque per calcolare la lunghezza di una curva bisogna risolvere un integrale, tale integrale assegnando la funzione in maniera arbitraria può risultare anche molto complesso per via della presenza della radice. Per fortuna negli esercizi si fa in modo che l'integrale risulti abbordabile con le tecniche che conosciamo. Si svolge a fini applicativi il seguente esempio:

<u>Es.</u>: Calcolare la lunghezza della curva:

$$y = \sqrt{x^3}$$

per "x" che varia tra 0 e 5. La curva in questione è di presso rappresentata



Calcoliamo la lunghezza di tale curva applicando l' integrale (5):

$$f(x) = \sqrt{x^3} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \rightarrow f'^2(x) = \frac{9}{4}x$$

Sostituendo nell integrale:

$$l = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9} \cdot \int_0^5 \frac{9}{4} \cdot \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[1 + \frac{9}{4}x\right]_0^5 = \frac{8}{27} \cdot \left(1 + \frac{45}{4} - 1\right) = \frac{8}{27} \cdot \frac{45}{4} = \frac{10}{3}$$