

5.3.4 – Il metodo di Guyon – Massonet – Bares

a) Ipotesi

Questo metodo fu proposto da Guyon nel 1946 per un graticcio di travi prive di rigidezza torsionale, ripreso da Massonet nel 1950 per tener conto della torsione, ed infine esteso da Bares; questi ultimi autori hanno sistematizzato in modo definitivo la materia in un libro ("Le calcul des grillages de poutres et des orthotropes" Dunod - Paris) che fornisce un gran numero di tabelle direttamente utilizzabili dal progettista.

Il metodo non fa nessuna ipotesi sulle rigidezze flessionali e torsionali delle travi e dei traversi e quindi è utile nel caso di ponti molto larghi rispetto alla luce, oppure quando si hanno nervature dotate di una certa rigidezza a torsione, tutti casi questi in cui non è lecito applicare il metodo di Courbon.

Le ipotesi che si fanno sono tre:

- il graticcio è semplicemente appoggiato alle estremità;
- il graticcio effettivo può essere sostituito con uno a maglie infinitesime avente le stesse rigidezze medie flessionali e torsionali;
- la ripartizione trasversale dei carichi avviene in modo analogo a quella che si avrebbe se il carico fosse sinusoidale (vedi figura 5.16)

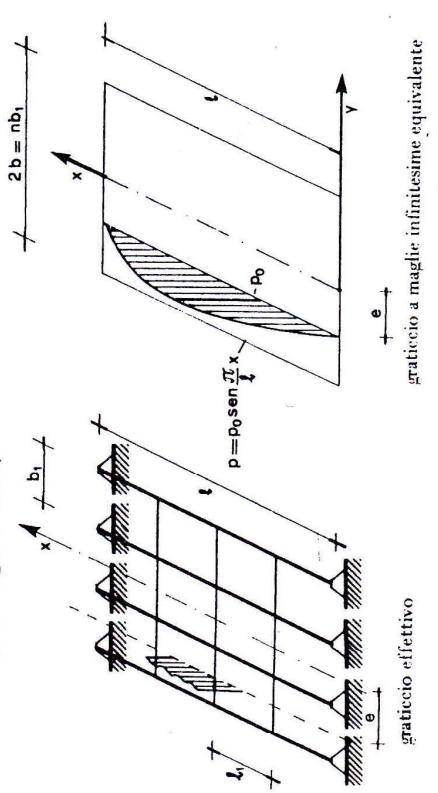


Fig. 5.16

La seconda ipotesi porta ad approssimazioni trascurabili specie se il numero dei trasversi è sufficientemente elevato (maggiore od eguale a 3) ed il carico è ripartito. Volendo una maggiore accuratezza si possono calcolare le sollecitazioni locali che nascono nella trave direttamente caricata, supposta dapprima su appoggi fissi, e poi applicare i carichi nodali al graticcio.

La terza ipotesi porta ad approssimazioni accettabili nel caso di carichi ripartiti e nel calcolo delle sollecitazioni nelle travi. Gli errori sono maggiori nel caso di carichi concentrati e nel calcolo delle sollecitazioni nei trasversi per cui è necessario ricorrere allo sviluppo in serie del carico come si dirà nel seguito.

Se indichiamo con

$$\begin{aligned} J_1, J_t & \text{ i momenti di inerzia delle travi e dei trasversi} \\ K_1, K_t & \text{ le costanti di torsione alla S t. Venant delle travi} \\ \text{e dei trasversi } {}^1) & \end{aligned}$$

le caratteristiche del graticcio equivalente varranno:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{EI_1}{b_1} & C_{xy} &= \frac{GK_1}{b_1} \\ D_y &= \frac{EI_t}{l_1} & C_{yx} &= \frac{GK_1}{l_1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

¹⁾ Si rammenta che la costante di torsione nel caso di sezione rettangolare di base b ed altezza h vale:

$$K = \frac{3b^3 h^3}{10(b^2 + h^2)^2}$$

che nel caso di rettangolo molto snello ($h \gg b$) vale

$$K = \frac{hb^3}{3}$$

Nel caso di sezioni di tipo "aperto", tipo doppio T o simili K si può ottenere come somma delle costanti di torsione relative ai rettangoli elementari in cui si può scomporre la sezione data. Nel caso infine di sezioni chiuse con pareti sufficientemente sottili vale la teoria di Breit per cui

$$K = \frac{4A^2}{\sum \frac{s_i}{f_i}}$$

Gli autori consigliano di considerare una larghezza convenzionale $2b = n b_1$ ($n = \text{numero delle travi}$) che peraltro in molti casi è prossima a quella effettiva essendo in genere lo sbalzo della soletta circa la metà dell'interasse delle travi.

b) Cenni di teoria

Una volta ridotto il graticcio ad un sistema continuo, il procedimento di calcolo è identico a quello che si segue per le piastre isotrope od ortotrope e che qui si richiama per sommi capi.

Si scrivono dapprima le tre equazioni di equilibrio di un elemento di graticcio infinitesimo soggetto alle azioni riportate in fig. 5.17

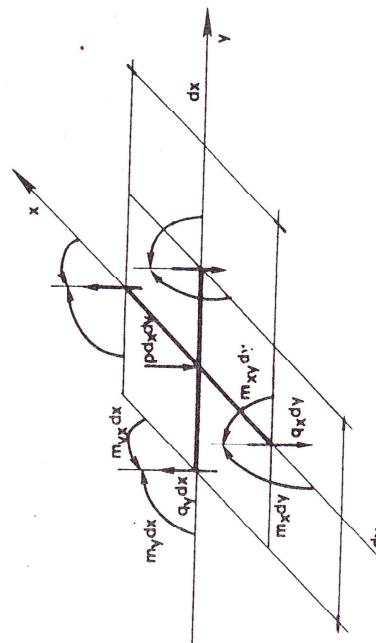


Fig. 5.17

$$\begin{aligned} \frac{\delta m_x}{\delta x} + \frac{\delta m_{yx}}{\delta y} &= q_x \\ \frac{\delta m_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta m_y}{\delta y} &= q_y \\ \frac{\delta q_x}{\delta x} + \frac{\delta q_y}{\delta y} &= -p \end{aligned} \quad (5.19)$$

Poiché, indicando con $w(x, y)$ l'abbassamento del generico

punto, i momenti si possono porre in relazione alla deformata con le note relazioni:

$$\begin{aligned} m_x &= -D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; & m_y &= -D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ m_{xy} &= -C_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; & m_{yx} &= -C_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

si arriva alla equazione risolutiva seguente:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p \quad (5.21)$$

avendo indicato con H la rigidezza torsionale media del grigliato, cioè:

$$H = \frac{1}{2} (C_{yx} + C_{xy}) \quad (5.22)$$

L'equazione (5.21) è formalmente eguale a quella di Huber per le piastre ortotrope. Le differenze consistono nel fatto che in questo caso si ha $\nu_x = \nu_y = 0$ ed inoltre che in generale non è $m_{xy} = m_{yx}$ come avviene nelle piastre in cui si ha continuità di materiale e quindi reciprocità delle τ .

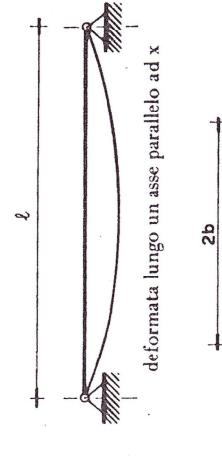
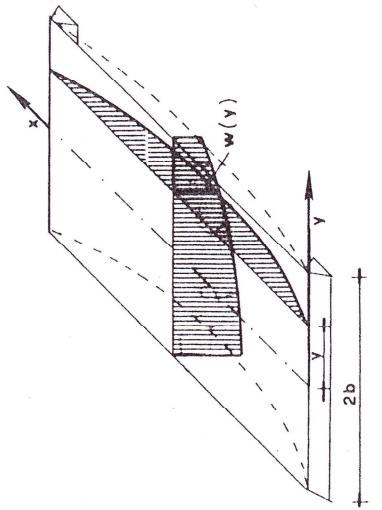
La risoluzione dell'equazione della piastra, cioè la determinazione della funzione $w(x, y)$, è in generale complessa; l'avere ipotizzato il carico sinusoidale permette però notevoli semplificazioni. Infatti ci si può ricondurre al calcolo di una funzione della sola variabile y in quanto si sa a priori che per questo tipo di carico la deformata lungo x è sinusoidale, cioè del tipo:

$$w(x, y) = w(y) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (5.23)$$

essendo $w(y)$ la deformata trasversale in mezzeria della piastra.

Se ora si suppone di ripartire il carico uniformemente su tutta la larghezza della piastra, cioè se si considera il carico cilindrico di fig. 5.19, anche la deformata sarà cilindrica, cioè indipendente da y e si avrà

$$w(x) = \bar{w} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (5.24)$$



deformata lungo un asse parallelo ad x
deformata lungo un asse parallelo ad y

Fig. 5.18

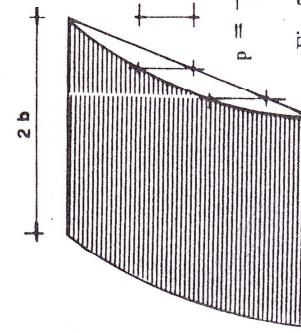


Fig. 5.19

$$p = \frac{P_0}{2b} \sin \frac{\pi x}{l}$$

E' facile vedere che il rapporto

$$K = \frac{w(y)}{\bar{w}}$$

tra la (5.23) e la (5.24) e cioè tra la deformata in un punto per effetto del carico lineare e quella che si avrebbe nello stesso punto se si ripartisse detto carico su tutta la larghezza del ponte è il "coefficiente di maggiorazione del valore medio" definito dalla (5.4).

Infatti si ha dalle (5.20):

per carico lineare

$$m_x = -D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\pi^2}{12} D_x w(y) \sin \frac{\pi x}{1}$$

per carico uniforme

$$\bar{m}_x = -D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\pi^2}{12} D_x \bar{w} \sin \frac{\pi x}{1}$$

cioè:

$$\frac{m_x}{\bar{m}_x} = \frac{w(y)}{\bar{w}} = K$$

Quindi K è anche il rapporto tra i momenti flettenti, in una trave longitudinale, dovuti al carico lineare eccentrico e quelli dovuti allo stesso carico ripartito su tutta la larghezza del ponte.

c) L'uso delle tabelle

La diffusione del metodo di calcolo in esame è dovuta alla disponibilità di un gran numero di tabelle che forniscono, oltre al coefficiente K visto, anche altri coefficienti per il calcolo dei momenti torcenti e delle sollecitazioni nei trasversi.

Questi coefficienti sono dati in funzione dei seguenti parametri (fig. 5.16):

- eccentricità relativa e/b del carico

- eccentricità relativa y/b della trave o della sezione del trasverso in cui si calcolano le sollecitazioni

- geometria e rigidezze del graticcio.

Per definire completamente queste ultime, cioè per descrivere il graticcio, gli Autori dimostrano che sono sufficienti due soli parametri:

- parametro di deformabilità trasversale

- parametro di torsione

vere il graticcio, gli Autori dimostrano che sono sufficienti due soli parametri:

- parametro di deformabilità trasversale

$$\Theta = \frac{b}{1} \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}} \quad (5.28)$$

- parametro di torsione

$$\alpha = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}} \quad (5.29)$$

La (5.28) conferma quanto detto in 5.3.3) a proposito del parametro di Hornberg, e cioè che è predominante l'influenza delle dimensioni in pianta del ponte, b/l , rispetto al rapporto delle rigidezze D_x/D_y che compare sotto radice quarta. Si noti ancora come il metodo di Courbon sia un caso particolare di quello in esame qualora si abbia $\Theta = \alpha = 0$.

Il parametro di torsione α nella quasi totalità dei casi è compreso tra 0 ed 1, valori questi che corrispondono a rigidezza torsionale nulla ($H = 0$) ovvero pari a quella di una piastra isotropa ($H = D_x = D_y$).

Da quanto detto risulta che le tabelle dovrebbero essere a quattro entrate (e, y, K, Θ); peraltro gli autori hanno trovato che era sufficiente fornire i coefficienti per $\alpha = 0$ ed $\alpha = 1$ potendosi accettare per valori intermedi di α una legge di interpolazione semiempirica del tipo:

$$K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \cdot \sqrt{\alpha} \quad (5.30)$$

avendo indicato con K_0 e K_1 i valori del coefficiente cercato per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$.

I coefficienti forniti sono i seguenti:

1) Coefficienti K per il calcolo dei momenti flettenti nelle travi, di cui si è già parlato.

2) Coefficienti μ per il calcolo dei momenti flettenti nei trasversi.

Nella sezione S di eccentricità y di un trasverso situato alla distanza \bar{x} dall'appoggio il momento vale (fig. 5.20).

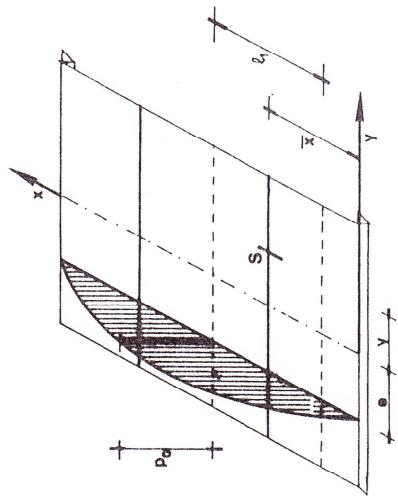


Fig. 5.20

$$M(x, y) = \mu(e, y)p_0 b \sin \frac{\pi x}{l} \quad (5.31)$$

Il momento flettente espresso dalla (5.31) è quello per unità di lunghezza nel graticcio ideale.

Poiché però nella realtà i trasversi hanno interasse l_1 , ciascun trasverso dovrà assorbire tutto il momento che compete alla fascia che lo riguarda, e cioè:

$$\bar{M} = \int_{\bar{x}-\frac{l_1}{2}}^{\bar{x}+\frac{l_1}{2}} M(x, y) dx = \mu \cdot p_0 \cdot b \cdot \int_{\bar{x}-\frac{l_1}{2}}^{\bar{x}+\frac{l_1}{2}} \sin \frac{\pi x}{l} dx \quad (5.32)$$

Nella pratica sarà sufficiente riferirsi al valore medio, cioè porre:

$$\bar{M} = \mu p_0 b \sin \frac{\pi \bar{x}}{l} \cdot l_1 \quad (5.33)$$

3) Coefficienti τ per il calcolo dei momenti di torsione

I momenti torcenti per unità di larghezza nelle due direzioni sono espressi in funzione del coefficiente adimensionale τ secondo le formule:

$$M_{xy} = \frac{C_{xy}}{H} \cdot \tau \frac{1}{\pi} p_0 \cos \frac{\pi x}{l} \quad (5.34)$$

$$M_{yx} = \frac{C_{yx}}{H} \cdot \tau \frac{1}{\pi} p \cos \frac{\pi x}{l}$$

A differenza di K e μ per i quali vale la (5.30) l'interpolazione di τ può effettuarsi come segue:

$$\tau_\alpha = \tau_1 \sqrt{\alpha} \quad (5.35)$$

Anche in questo caso i momenti torcenti effettivamente agenti sulle travi e sui trasversi si ottengono integrando le (5.34) sull'interasse effettivo b_1 ed l_1 come visto per μ .

4) Coefficienti v per il calcolo degli sforzi di taglio nei trasversi

Detto Q_y lo sforzo di taglio nel senso y per unità di lunghezza si ha:

$$Q_y = v p_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (5.36)$$

potendosi accettare per v la formula di interpolazione (5.30).

Sui bordi $y = \pm b$ il taglio \bar{Q}_y ha un valore diverso da quello che si ricava dalla (5.36), in quanto, come è noto dalla teoria delle piastre, sui bordi si hanno sforzi di taglio supplementari causati dalla torsione.

Per il calcolo di \bar{Q} pertanto gli Autori forniscono dei coefficienti \bar{v} , diversi dai precedenti, da impiegarsi per le sezioni di estremità dei trasversi.

5) Coefficienti ε per il calcolo degli sforzi di taglio nelle travi

Anche gli sforzi di taglio e le reazioni nelle travi longitudinali possono calcolarsi con l'ausilio di coefficienti simili a quelli già visti.

Pertanto per costruzioni non troppo grandi o non troppo caricate è sufficiente calcolare questi sforzi applicando alla trave in esame il carico:

$$p = K \bar{p} \quad (5.37)$$

già impiegato per la determinazione dei momenti flettenti.

d) Osservazioni

L'*ipotesi di carico sinusoidale* è in genere accettabile per il calcolo delle sollecitazioni nelle travi in quanto queste vengono calcolate per il carico effettivo e l'*ipotesi in discussione* serve solo per determinare il coefficiente di ripartizione.

Ciò non è altrettanto vero per il calcolo dei momenti torcenti e delle sollecitazioni nei traversi, per cui può essere opportuno sviluppare il carico effettivo in serie di Fourier.

In questo caso si tenga presente che per la n. sima armónica la travata si flette su una luce l/n e quindi va variato il parametro di deformabilità trasversale che diviene:

$$\vartheta(n) = n\vartheta(1) \quad (5.38)$$

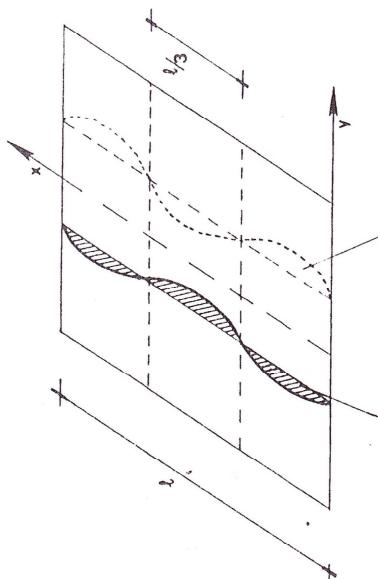


Fig. 5.21

$$p = p_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad w = w_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Il calcolo della rigidezza torsionale del graticcio va condotto con il seguente accorgimento.

Se si tratta di una sezione di tipo "aperto", si considerano i contributi dei singoli rettangoli elementari, ciò che equivale

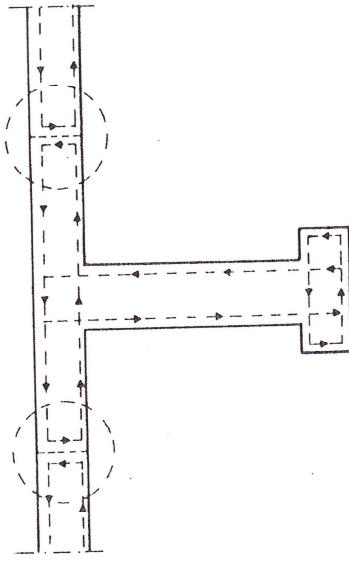


Fig. 5.22

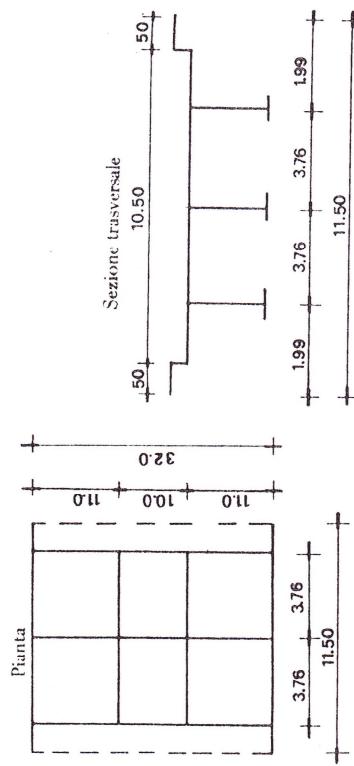
ad ipotizzare una circuitazione delle τ come segnato in figura 5.22. Ciò non è vero per la soletta superiore che noi abbiamo idealmente tagliato ma che in realtà è continua e quindi le τ che si hanno al bordo dell'ala (indicate con dei cerchi in figura) si elidono.

Questa incongruenza risulta evidente se si pensa ad una piastra isotropa come formata da tante travi di larghezza unitaria: la rigidezza torsionale che ne deriverebbe sarebbe il doppio di quella reale. Nel calcolo quindi bisogna tener conto solo della metà del contributo offerto dall'ala superiore della sezione a T.

Gli Autori forniscono infine anche dei criteri per l'impiego del metodo nel caso di travi di bordo aventi rigidezza diversa da quelle centrali nonché nel caso di momenti di inerzia variabili. In tutti questi casi peraltro le complicazioni di calcolo sono tali da non giustificare più l'impiego di un metodo approssimato, risultando più conveniente il calcolo del graticcio con l'elaboratore.

I coefficienti sono stati calcolati per travi semplicemente appoggiate. Nel caso di trave *continua* sono abbastanza validi solo per la campata caricata avendo l'accortezza di prendere nel calcolo di ϑ un valore $l \cong 0.7 l_{\text{eff}}$ (distanza dei punti di flesso nella deformata della trave).

e) **Esempio**
Travata in c.a.p. delle dimensioni di figura



dati:

$$J_1 = 1,3469 \text{ m}^4 \quad K_1 = 0,0833 \text{ m}^4$$

$$J_1 = 0,1672 \text{ m}^4 \quad K_1 = \sim 0$$

$$G = \frac{E}{2,2} \text{ (per } \nu = 0,1)$$

Calcolo dei parametri del graticcio equivalente

$$D_x = \frac{1,3469}{3,76} \cdot E = 0,358 E$$

$$D_y = \frac{0,1672}{10,50} \cdot E = 0,0159 E$$

$$C_{xy} = \frac{0,0833}{3,76} \cdot G = 0,0100 E \quad C_{yx} = 0$$

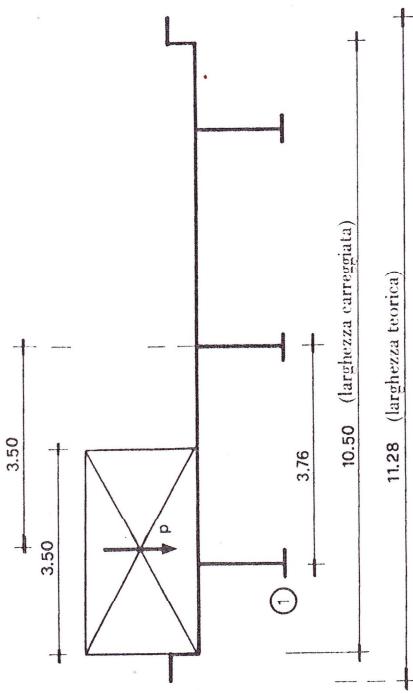
$$H = \frac{1}{2} (0,0100 + 0) E = 0,0050 E$$

Larghezza teorica $2b = 3 \times 3,76 = 11,28 \text{ m}$

$$\Theta = \frac{5,64}{32,00} \sqrt[4]{\frac{0,358}{0,0159}} = 0,384 \cong 0,40$$

$$\alpha = \frac{0,0050}{\sqrt{0,358 \times 0,0159}} = 0,07$$

Calcolo delle sollecitazioni massime sulla trave di bordo
dovute al carico militare (Attuali Norme Italiane)



eccentricità relativa della nervatura

$$y/b = \frac{3,76}{5,64} = 0,667$$

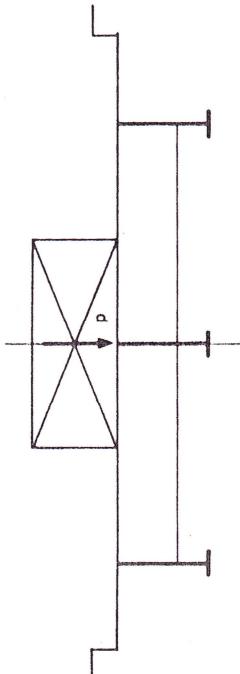
eccentricità relativa del carico

$$e/b = \frac{3,50}{5,64} = 0,620$$

Dalle tabelle di K per $\Theta = 0,40$ qui di seguito riprodotte si trae interpolando linearmente per i valori di y ed e trovati:

e	$-b$	$-3b/4$	$-b/2$	$-b/4$	0	$b/4$	$b/2$	$3b/4$	b
$\vartheta = 0, 40^\circ$	K_9								
0	+ 0.8273	+ 0.9225	- 1.0129	+ 1.0851	+ 1.1160	+ 1.0851	+ 1.0129	+ 0.9225	+ 0.8273
5b/4	+ 0.1337	+ 0.2800	- 0.6250	+ 0.8637	+ 0.9851	+ 1.2696	+ 1.4005	+ 1.5005	+ 1.5816
b/2	- 0.5106	- 0.1350	+ 0.2426	+ 0.6250	+ 0.7129	+ 1.4005	+ 1.7275	+ 2.1128	+ 2.4490
3b/4	- 1.1536	- 0.6344	- 0.1350	+ 0.3890	+ 0.9255	+ 1.5005	+ 2.1128	+ 2.7438	+ 3.2702
b	- 1.7381	- 1.1296	- 0.5106	+ 0.1337	+ 0.8273	+ 1.5916	+ 2.4490	+ 3.3702	+ 4.3560
	K_{11}								
0	+ 0.9220	+ 0.3613	+ 1.0030	+ 1.0414	+ 1.0601	+ 1.0414	+ 1.0800	+ 0.9613	+ 0.9220
b/4	+ 0.7862	- 0.8420	+ 0.9943	+ 0.9733	+ 1.0414	+ 1.0914	+ 1.1051	+ 1.0994	+ 1.0883
b/2	+ 0.6779	+ 0.7429	+ 0.8171	+ 0.9043	+ 1.0030	+ 1.0530	+ 1.1931	+ 1.2489	+ 1.2893
3b/4	+ 0.5903	+ 0.6613	+ 0.7429	+ 0.8420	+ 0.9613	+ 1.0994	+ 1.2489	+ 1.3940	+ 1.5186
b	+ 0.5148	+ 0.5903	+ 0.6778	+ 0.7862	+ 0.9220	+ 1.0693	+ 1.2893	+ 1.4293	+ 1.5188

come si deduce dalla figura 5.14



$$K_0 = 2,25$$

K₁ = 1 285

e quindi $K\alpha = 2,256 - (2,256 - 1,285) \sqrt{0,07} = 2,0$

La trave di bordo numero nervature = 3)

$$p_1 = K \bar{p} = 2,0 \cdot \frac{p}{3} = 0,667 \text{ p}$$

Applicando il metodo di Coulomb si ottiene

$$P_1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{3,50 \cdot 3,76}{2 \cdot (3,76)^2} \right) p = 0,798 \text{ p}$$

mentre trascurando le rigidezze torsionali nell'esempio in corso si sarebbe ottenuto:

$$p_1 = K_0 \cdot \bar{p} = \frac{2,256}{3} \cdot p = 0,752 \text{ p}$$

Calcolo delle sollecitazioni max in un trasverso

Per il calcolo del massimo momento positivo la posizione più sfavorevole del carico è quando esso sia in asse al ponte,

calcolo delle sollecitazioni max in un traverso

Per il calcolo del massimo momento positivo la posizione più sfavorevole del carico è quando esso sia in asse al ponte,

$$\mu_0 = 0,237$$

e quindi $4\alpha = 0,237 - (0,237 - 0,156) : \sqrt{0,07} \equiv 0,216$

Dalle tabelle μ per $\alpha = 0,40$ (primo termine dello sviluppo in serie del carico) cui di seguito riportate si trae:

$$\mu_0 = 0,237 \quad \mu_1 = 0,156 \quad \text{e quindi } u_C = 0,237 - (0,237 - 0,156) \cdot \frac{\sqrt{0,07}}{0,216} = 0,216$$

Il momento in mezzeria di un trasverso ideale, posto alla distanza di 11,0 m dall'appoggio, provocato dal 1° termine dello sviluppo in serie del carico p supposto uniformemente ripartito sulla luce, vale (vedi 5.31)

$$m_y = 0,216 \cdot \left(\frac{4}{\pi} \cdot p \right) \cdot 5,64 \cdot \sin \frac{\pi \cdot 11,0}{32,0} = 1,368 p \left(\frac{t \cdot m}{m} \right)$$

Tenuto conto dell'interasse effettivo dei traversi pari a m 10,50 applicando la formula approssimata (5.33), si ha il momento per le verifiche:

$$\bar{m} = 1,368 \cdot p \cdot 10,50 = 14,4 \cdot p (t \times m)$$

Volendo una maggiore precisione si dovrebbero considerare anche altri termini dello sviluppo in serie del carico. Per esempio per il 3° termine (il 2° manca trattandosi di un carico uniformemente ripartito e quindi simmetrico) si dovrebbe ripetere il calcolo per:

$$\Theta_3 = 3\Theta_1 = 3 \cdot 040 = 1,2 \quad (\alpha \text{ invariato})$$

$$p_3 = \frac{4}{3\pi} p = \frac{1}{3} p_1$$

cercando i nuovi valori di μ_0 e μ_1 .