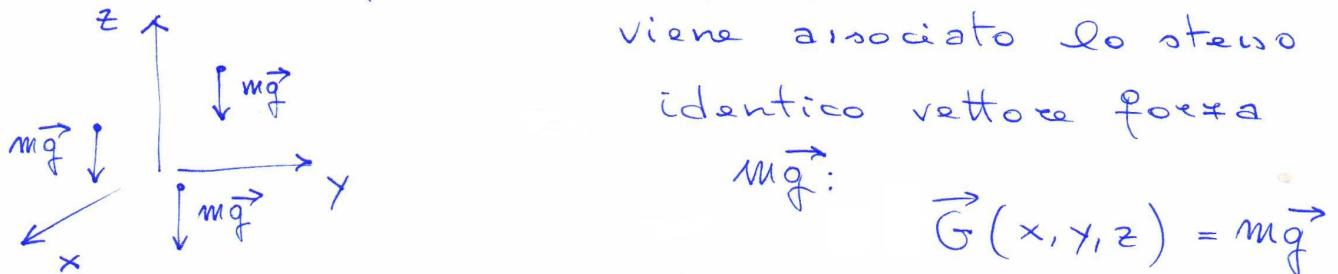


02/10/18

Energia potenziale e potenziale di un campo

Partiamo nell'esporre i concetti di energia nel caso della forza gravitazionale.

La "gravità" è un campo vettoriale di forze particolarmente semplice: ad ogni punto dello spazio



viene associato lo stesso identico vettore forza

$$\vec{Mg}:$$

$$\vec{G}(x, y, z) = \vec{mg}$$

Tale campo di forze compie un lavoro quando ci si sposta tra due punti A e B dello spazio. Poiché il campo è costante, è possibile dimostrare che il lavoro tra 2 punti può essere calcolato semplicemente

eseguendo il prodotto scalare

tra il vettore forza \vec{mg} ed il

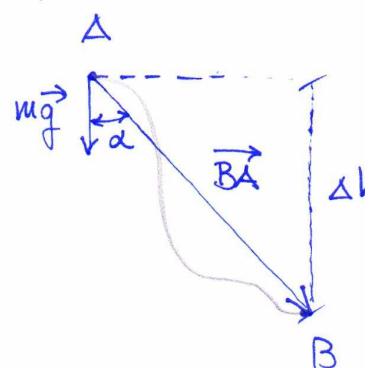
vettore spostamento \vec{BA} :

$$L = \vec{mg} \cdot \vec{BA} = mg \cdot BA \cdot \cos\alpha$$

la quantità " $BA \cdot \cos\alpha$ " utilizzando i teoremi sui triangoli rettangoli corrisponde alla differenza di quota tra A e B:

$$\Delta h = h_A - h_B$$

(1)



Si puo' riconfermare cosi' alle seguenti due conclusioni:

1) il lavoro della forza peso tra due punti non dipende dalla traiettoria seguita per andare da A a B, infatti ad essere utilizzato nel calcolo e' il vettore \vec{BA} che e' lo stesso qualunque sia la traiettoria. Un campo di forze che presenta questa proprietà si dice conservativo, solo se un campo e' conservativo ad esso puo' essere associata una funzione scalare detta "energia potenziale"

2) il lavoro calcolato tra due punti rappresenta proprio la differenza di energia potenziale tra tali due punti, infatti e' già noto come l'energia potenziale del campo gravitazionale sia pari a $U = m \cdot g \cdot h$ per cui essendo (come visto prima)

$$L = mg \Delta h = mg(h_A - h_B) =$$

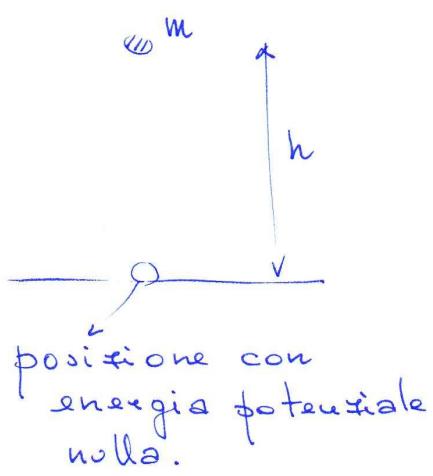
$$= mg h_A - mg h_B = U_A - U_B$$

Dove deve essere chiara un'idea, l'energia potenziale e' definita mediante il concetto di lavoro

(2)

solo in termini di differenza. Per poter definire l'energia potenziale c'è bisogno di fissare un "riferimento", ovvero una posizione in cui si assegna valore nullo all'energia potenziale.

Quando diciamo che una massa ha energia potenziale " Mgh ", lo diciamo perché implicitamente abbiamo individuato una posizione in



cui essa è zero, e rispetto a tale posizione calcoliamo l'altezza " h ".

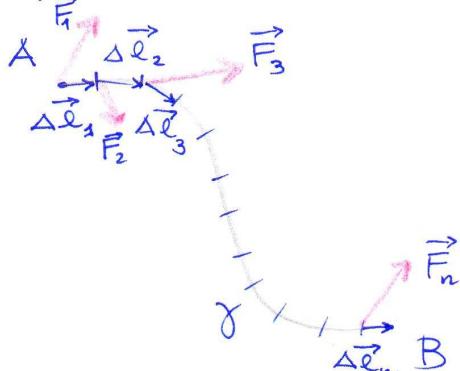
In altre parole potremmo anche dire che l'energia potenziale che compete ad

Una massa " m " in una certa posizione è pari al lavoro che compie la forza peso in una traiettoria fra tale posizione ed una posizione a cui si è assegnata energia potenziale nulla.

Capiti i concetti di cui sopra, c'è bisogno di fare il grande salto dal campo gravitazionale al campo elettrico.

Tale "salto" presenta un primo problema non di poco conto: il campo elettrico (salvo un unico caso particolare) non è costante come il campo gravitazionale, dunque sovrasta il problema di come calcolare il lavoro compiuto dalla forza elettrica lungo una traiettoria.

Ovviamente l'espressione $\vec{F} \cdot \vec{BA}$ non è più valida perché lungo la traiettoria da A a B la forza \vec{F} non è costante. Se però dividessi la traiettoria in tanti piccoli trattini, potrei approssimare la forza come costante accettando di commettere un errore e calcolando il lavoro



separatamente tratto per tratto utilizzando l'espressione adottata per la forza peso (cioè lecito proprio perché in ogni tratto si sta supponendo la forza costante). Dunque avremo per ogni tratto un lavoro:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{\Delta l}_1 \\ L_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{\Delta l}_2 \\ \vdots \\ L_n = \vec{F}_n \cdot \vec{\Delta l}_n \end{array} \right.$$

(4)

Il lavoro totale si otterrebbe come somma di tutti i contributi sui singoli tratti:

$$L = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta l}_i$$

Il valore del lavoro così calcolato è come detto una approssimazione, pensa sia semplice intuita come la qualità dell'approssimazione diventa tanto migliore quanto maggiore è il numero di tratti in cui si divide la curva. Dunque se volessimo un calcolo senza errori "basterebbe" dividere la curva in infiniti tratti, ognuno dei quali di lunghezza nulla, ciò equivale ad una operazione che i matematici chiamano "passaggio al limite", ovvero si fanno tendere le divisioni a infinito $n \rightarrow \infty$ e di conseguenza il vettore spostamento nei singoli tratti al vettore nullo $\vec{\Delta l} \rightarrow \vec{0}$ (in questo caso si usa sostituire la scrittura $\vec{\Delta l}$ con quella " $d\vec{l}$ "), così facendo il lavoro esatto si calcolerebbe:

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{F}_i \cdot \vec{d l}_i$$

tuttavia la sommatoria di infinite quantità piccolissime (infinitesime) in matematica è detto

(5)

integrale, e al posto della sommatoria viene utilizzato il simbolo " \int " eliminando il riferimento all'indice "i":

$$L = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

questo simbolo serve a far capire che trattasi di un integrale lungo una linea γ

Dunque, in generale, la differenza di energia potenziale tra due posizioni occupate da una carica posta in un campo elettrico, va calcolata con un integrale di linea, essendo il lavoro svolto dalla forza elettrica lungo un percorso tra le due posizioni.

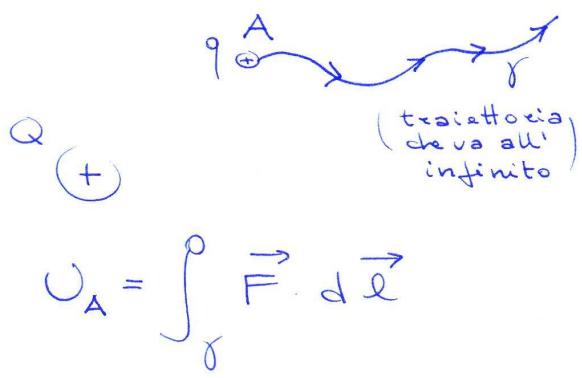
Si noti bene anche il campo elettrico, come quello gravitazionale, è conservativo, dunque il lavoro tra due punti non dipende dalla traiettoria percorsa, e al pari è possibile definire una funzione energia potenziale elettrica.

Resta un'unica cosa da fare per passare dalle differenze di energia potenziale, alla funzione energia potenziale elettrica, ovvero scegliere il punto in cui essa è nulla, quello che ho chiamato "il riferimento"

(6)

Ovviamente come per la forza gravitazionale la quota zero la posso scegliere in infiniti modi, stessa cosa vale nel caso della forza elettrica.

Tra tutte le possibili scelte, quella "fisicamente" più adatta è assegnare energia potenziale nulla ad una carica posta a distanza infinita dalle sorgenti del campo (e che quindi non è soggetta ad alcuna forza).



(Come è facile capire se non ci fosse la carica Q che genera la forza \vec{F} , l'energia potenziale sarebbe nulla ovunque)

Dunque l'energia potenziale elettrica fornita da una carica in una certa posizione altro non è che il lavoro che compie la forza elettrica quando questa carica si sposta verso l'infinito (lungo una traiettoria qualsiasi).

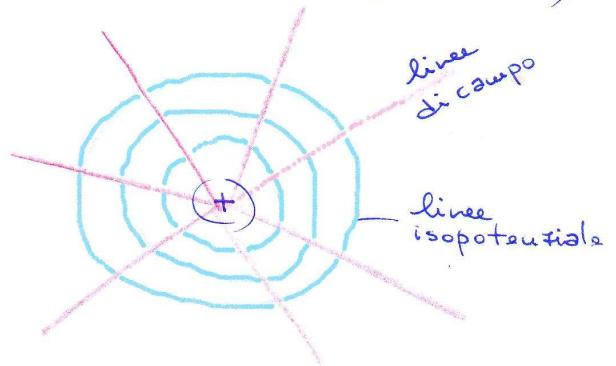
Potendo con gli strumenti matematici che conosciamo non siamo in grado di calcolare l'energia potenziale (non sappiamo svolgere integrali di linea), tuttavia possiamo fornire l'espressione senza dimostrazione per alcuni casi semplici

(7)

Prendiamo il caso di una carica positiva e del relativo campo che genera, vogliamo conoscere l'energia potenziale di una carica "q" posta a distanza "r" da essa. Essa è data dalla seguente espressione (nel vuoto)

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r}$$

In altre parole l'energia potenziale in questo caso dipende solo dalla distanza di "q" dalla carica "Q", e diventa sempre più piccola quanto più aumenta la distanza. Sono graficamente vengono rappresentate delle linee i cui punti sono caratterizzati dall'avere la medesima energia potenziale (linee isopotenziali). Nel caso della carica singola tali linee sono delle circonference (nel piano) in quanto per avere stessa "U" i punti devono stare alla stessa distanza dalla carica sorgente.



Nella espressione $U(r)$ fornita per il potenziale le cariche Q e q vanno introdotte con il loro segno, per cui se Q e q hanno stesso (8)

segno d'energia potenziale è positiva, altrimenti è negativa. Altra considerazione importante è che se si lasciasse libera di muoversi la carica " q " essa si sposterebbe sempre da posizioni ad energia potenziale maggiore verso posizioni ad energia potenziale minore.

Finora abbiamo parlato di energia potenziale, intesa come lavoro del campo di forze elettrico, per passare al potenziale invece di parlare di lavoro delle forze elettriche, bisogna semplicemente parlare di lavoro del vettore "campo elettrico", ovvero della forza quando la carica " q " è unitaria e positiva.

Detto diversamente tra energia potenziale e potenziale, c'è lo stesso rapporto che c'è tra forza elettrica e campo elettrico: l'energia potenziale e la forza elettrica dipendono sia dalle sorgenti del campo che dalla carica " q " posta nel campo elettrico, differentemente il campo elettrico e il potenziale dipendono solo dalle sorgenti. Volendo dare una definizione di potenziale, essa è l'energia potenziale divisa (9)

per la carica "q":

$$\xrightarrow{\text{potenziale}} V = \frac{U}{q}$$

Tale espressione nel caso di una singola carica porta alla relazione:

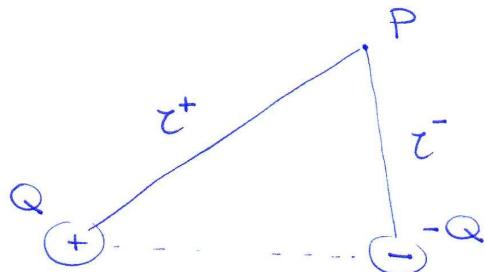
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r} \cdot \frac{1}{q}$$

da cui:

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}}$$

Così come per il campo elettrico, anche per il potenziale vale il principio di sovrapposizione: se a generare il campo sono più cariche, il potenziale in un certo punto si può calcolare come la somma dei potenziali dovuti ad ogni singola carica.

Consideriamo ad esempio il caso del doppio polo:



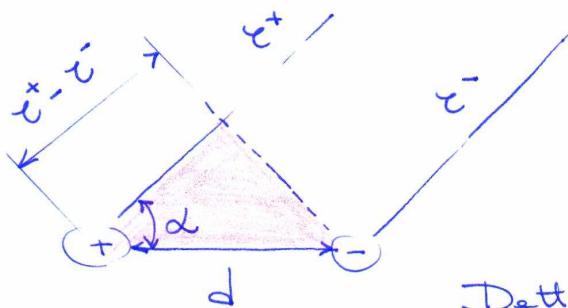
e calcoliamo il potenziale nel punto P (non c'è bisogno di piazzare alcuna carica in P, il potenziale è funzione solo delle sorgenti)

$$V(P) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^+} \right) + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{r^-} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r^+} - \frac{Q}{r^-} \right)$$

↓ potenziale della carica positiva ↓ potenziale della carica negativa

(10)

Un caso particolarmente interessante di potenziale del dipolo è quello di un punto "molto distante" dal dipolo stesso. In tale situazione le distanze r^+ ed r^- sono praticamente identiche:



$$r^+ \approx r^- \approx r$$

Inoltre le loro direzioni sono approssimativamente parallele.

Datta "d" la distanza tra le cariche del dipolo, si ha in questo caso

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q \cdot \frac{(r^- - r^+)}{r^- \cdot r^+} \rightarrow \text{questa quantità si può calcolare risolvendo il triangolo che ho evidenziato in figura}$$

$$r^+ - r^- = d \cdot \cos\alpha \rightarrow r^- - r^+ = -d \cdot \cos\alpha$$

dunque:

$$V(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d \cdot \cos\alpha$$

Gli segno "-" è dovuto al fatto che la carica positiva è quella più lontana, in caso opposto il potenziale avrebbe avuto la stessa espressione con il segno "+". Inoltre, la quantità $Q \cdot d = p$ è detta momento del dipolo elettrico, da cui:

$$V(r) = -\frac{p \cdot \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0}$$