

Si propone la soluzione del seguente sistema di disequazioni, contenente disequazioni di vario tipo:

$$\begin{cases} \frac{3x}{x^2-9} + \frac{2}{x+3} \leq -\frac{5}{x-3} & (1) \\ \frac{2x^2+x}{x^2-2x+1} \geq 0 & (2) \\ \frac{1}{3}x - 4 + \frac{2}{9}x \leq 1 - \frac{x}{6} & (3) \\ x-3 < 0 & (4) \\ x^3 - 5x^2 - x + 5 \leq 0 & (5) \end{cases}$$

Cominciamo con il numerare le disequazioni che vanno risolte una alla volta separatamente.

(1) Per lasciare lo zero a destra si portano tutti i termini che vi sono alla sinistra del segno di disuguaglianza. Ovviamente quando si sposta un termine da destra a sinistra si cambia

segno:

$$\frac{3x}{x^2-9} + \frac{2}{x+3} + \frac{5}{x-3} \leq 0$$

$(x+3)(x-3)$

Ora si svolge il m.c.m. dopo aver scomposto i denominatori

$$\frac{3x+2(x-3)+5(x+3)}{(x+3)(x-3)} \leq 0$$

Si svolgono i calcoli al numeratore

$$\frac{3x+2x-6+5x+15}{(x+3)(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{10x+9}{(x+3)(x-3)} \leq 0$$

Non è necessario scomporre al numeratore perché il termine è di 1° grado.

(1)

Siamo interessati a capire che segno assume la frazione al variare di "x" per cui studiamo il segno di numeratore e denominatore:

$$N: 10x + 9 \geq 0$$

$$\frac{10x}{10} \geq \frac{-9}{10}$$

(si divide per 10 per lasciare la "x" da sola, poiché 10 è un positivo non si gira il verso della disuguaglianza)

$$x \geq -\frac{9}{10}$$

Attenzione: il segno di numeratore e denominatore, così come dei fattori in un prodotto, si pone sempre $>$ di 0. Per numeratore e fattori si aggiunge l'uguale se nella disuguaglianza di partenza è presente l'uguale (come in questo caso, visto che c'è $\leq$)

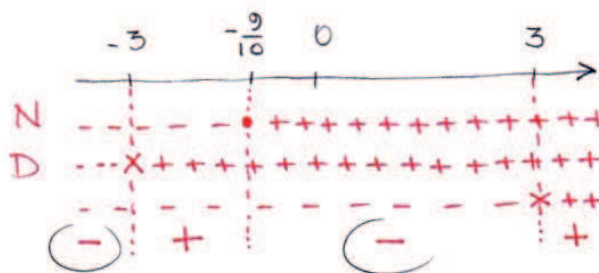
Passiamo ai denominatori:

$$D: (x+3) > 0 \rightarrow x > -3$$

$$(x-3) > 0 \rightarrow x > 3$$

si noti che per i denominatori l'uguale non si mette mai.

Abbiamo capito dove è positivo ogni singolo pezzo del rapporto, possiamo disegnare lo schema con i segni, per studiare il segno del rapporto:



Siamo interessati, poiché il segno originario della disuguaglianza è il $\leq$, a trovare i valori della "x" per cui la frazione è negativa. Ciò significa che nello schema dei segni ci interessano i "-". la soluzione della disuguaglianza (1) sarà

allora:

$$x < -3 \cup -\frac{9}{10} \leq x < 3$$

Possiamo passare alla seconda disuguaglianza:

(2)

$$\frac{2x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} \geq 0$$

sia il numeratore che il denominatore sono di 2° grado per cui vanno entrambi scomposti:

$$\frac{x(2x+1)}{(x-1)^2} \geq 0$$

passiamo allo studio del segno di numeratore e denominatore:

$$N: x(2x+1) \geq 0 \rightarrow x \geq 0$$

$$2x+1 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -1 \rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$D: (x-1)^2 > 0$$

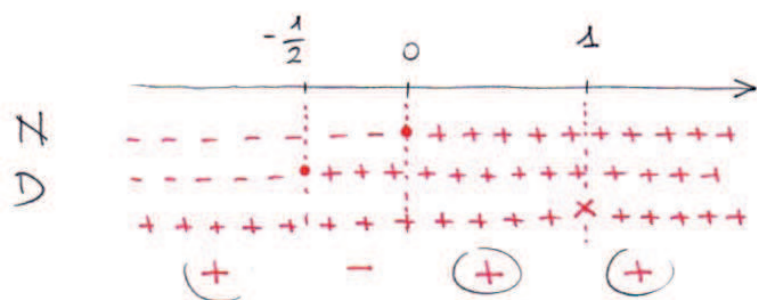
un quadrato è sempre positivo tranne che per i valori di "x" che rendono la base pari a zero.

In questo caso sarà:

$$x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

Possiamo disegnare lo schema con i segni.

(3)



Il segno della disequazione di partenza è ≥ 0 quindi sono interessati ai segni $+$.

La soluzione della disequazione è quindi:

$$x \leq -\frac{1}{2} \cup 0 \leq x < 1 \cup x > 1$$

La disequazione 3 è più semplice perché è di 1° grado va solo fatto il m.c.m. dopo aver spostato tutti i termini al 1° membro. In questo caso essendo il m.c.m. un numero si può eliminare, la stessa cosa non si può fare quando al denominatore c'è la "x" (in tal caso la disequazione è frazionaria e vanno studiati numeratore e denominatore).

(3)

$$\frac{1}{3}x - 4 + \frac{2}{9}x - 1 + \frac{x}{6} \leq 0 \quad \text{m.c.m.} = 18$$

$$\frac{6x - 72 + 4x - 18 + 3x}{18} \leq \frac{0}{18}$$

$$13x - 90 \leq 0$$

$$13x \leq 90$$

$$x \leq \frac{90}{13}$$

Attenzione: questa disequazione non è né un prodotto né un rapporto per cui si studia direttamente.

(4)

(4)

$$x - 3 < 0 \rightarrow \boxed{x < 3}$$

È una disequazione immediata che si può svolgere direttamente.

(5)

$$x^3 - 5x^2 - x + 5 \leq 0$$

Questa disequazione è di grado superiore al primo e va scomposta facendola diventare una moltiplicazione.

Per scomporre la cosa migliore è la messa in evidenza parziale (si potrebbe utilizzare anche Ruffini):

$$x^2(x-5) - 1 \cdot (x-5) \leq 0$$

$$(x^2 - 1)(x-5) \leq 0 \quad \text{il primo fattore si può ancora scomporre:}$$

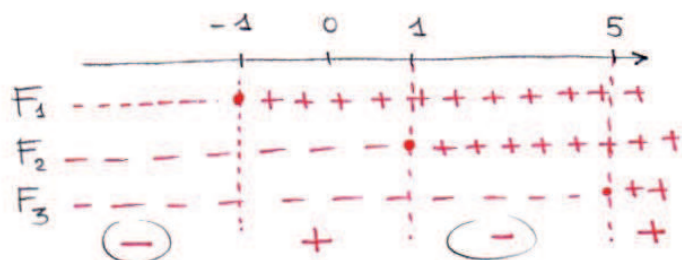
$$(x+1)(x-1)(x-5) \leq 0 \quad \text{Ora si studiano i 3 fattori imponendoli } \geq 0$$

$$F_1: (x+1) \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$

$$F_2: (x-1) \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$F_3: (x-5) \geq 0 \rightarrow x \geq 5$$

Si procede allo schema dei segni:



La soluzione della disequazione è:

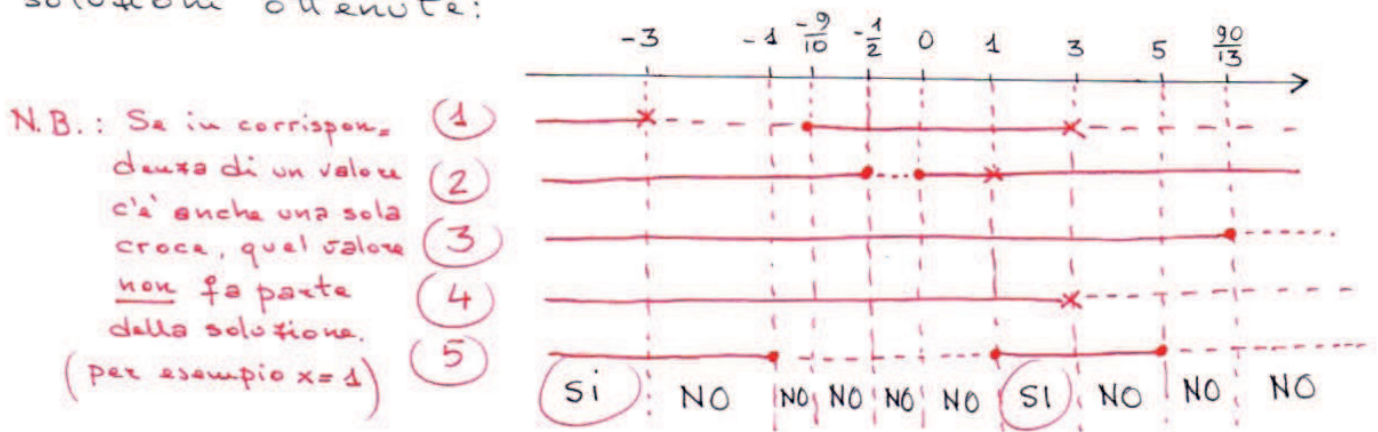
$$\boxed{x \leq -1 \cup 1 \leq x \leq 5}$$

(5)

Abbiamo risolto tutte e 5 le disequazioni, riassumiamo qui di fresco i risultati ottenuti:

- (1) $x < -3 \cup -\frac{9}{10} \leq x < 3$
- (2) $x \leq -\frac{1}{2} \cup 0 \leq x < 1 \cup x > 1$
- (3) $x \leq \frac{90}{13}$
- (4) $x < 3$
- (5) $x \leq -1 \cup 1 \leq x \leq 5$

Dobbiamo passare ora alla risoluzione del sistema, cioè a chiedersi se esistono dei valori della "x" per cui le 5 disequazioni siano tutte rispettate. Per farlo disegniamo un altro schema in cui rappresentiamo con linee continue e tratteggiate le 5 soluzioni ottenute:



Si cercano, in fine, le zone del grafico in cui ci sono le 5 linee continue, ovvero le disequazioni sono tutte vere:

$$x < -3 \cup 1 < x < 3$$

(6)