

Studio dominio e positività

$$y = \ln_3 \left(\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) \right)$$

(1)

$$x^2 - 1 > 0$$

si studia il $\Delta = 4 > 0$

per cui le soluzioni sono
(da tabella) $x < x_1 \cup x > x_2$

Domaino:

Le condizioni da
imporre sono 2 vista
la presenza dei 2
logaritmi

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 1 > 0 \quad (1) \\ \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) > 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

Risoliamo l'equazione per

il calcolo di x_1 ed x_2 : $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \sqrt{1}$

donque: $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, per cui la soluzione
della disequazione è:

$$\boxed{x < -1 \cup x > 1}$$

(2)

È una disequazione logaritmica, per
studiarla bisogna esponentiare i 2 termini
con $1/2$ (in modo che il logaritmo sparisca).

Bisogna ricordarsi che, essendo $1/2$ minore
di 1, il verso della disuguaglianza si inverte

$$\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) < \left(\frac{1}{2} \right)^0 \rightarrow x^2 - 1 < 1$$

$x^2 - 2 < 0$ disequazione di 2° grado, si
procede come per la (1)

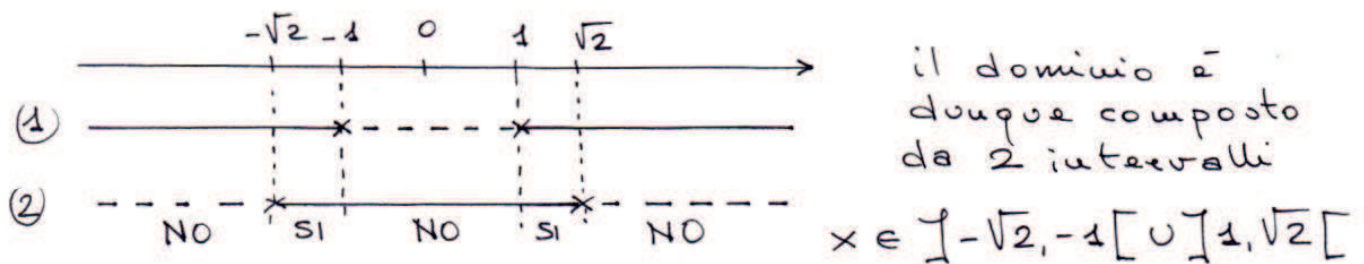
(1)

$$\Delta = 8 > 0 \quad x_1 < x < x_2$$

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

la soluzione è dunque $\boxed{-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}}$

Mettiamo a sistema le 2 condizioni:



Graficamente vediamo le zone da sbarcare:



Laddove la funzione è positiva cerchiamo ora di capire se essa è positiva o negativa, studiamo cioè la positività.

Positività: $\log_3 (\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1)) \geq 0$

Bisogna eliminare i 2 logaritmi, partiamo da quello esterno:

$$\cancel{3}^{\log_3} (\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1)) \geq 3^0$$

(il verso non si cambia perché $3 > 1$)

(2)

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \geq 1$$

ora esponenziamo
con $1/2$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$x^2 - 1 \leq \frac{1}{2} \rightarrow x^2 - 1 - \frac{1}{2} \leq 0 \rightarrow x^2 - \frac{3}{2} \leq 0$$

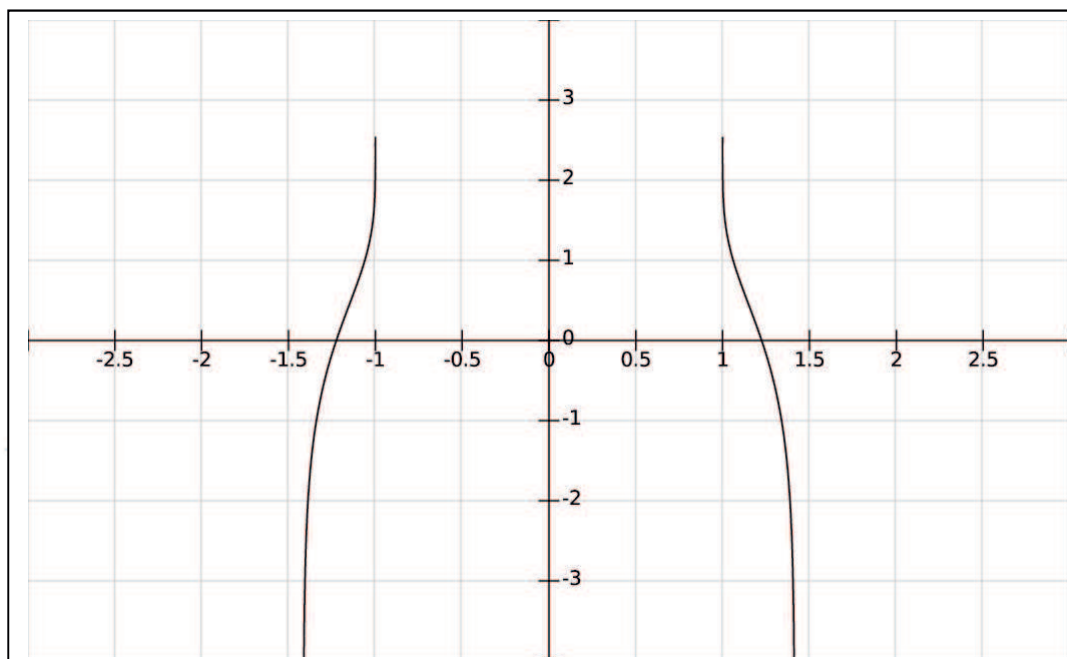
da qui in poi si procede come per le precedenti disequazioni:

$$x^2 - \frac{3}{2} \leq 0 \quad \Delta = -4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = +6 > 0$$

$x_1 < x < x_2$ risolviamo l'equazione $x^2 - \frac{3}{2} = 0$

$$x^2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{la funzione \u00e8 positiva} \\ \text{per} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{\frac{3}{2}} \end{matrix}$$

$\sqrt{\frac{3}{2}}$ \u00e8 un numero tra 1 e $\sqrt{2}$. Quando \u00e8 positiva sbarrare' la zona sotto l'asse delle "x", quando \u00e8 negativa quella sopra. Si riporta qui sotto il grafico della funzione fatto con una applet:

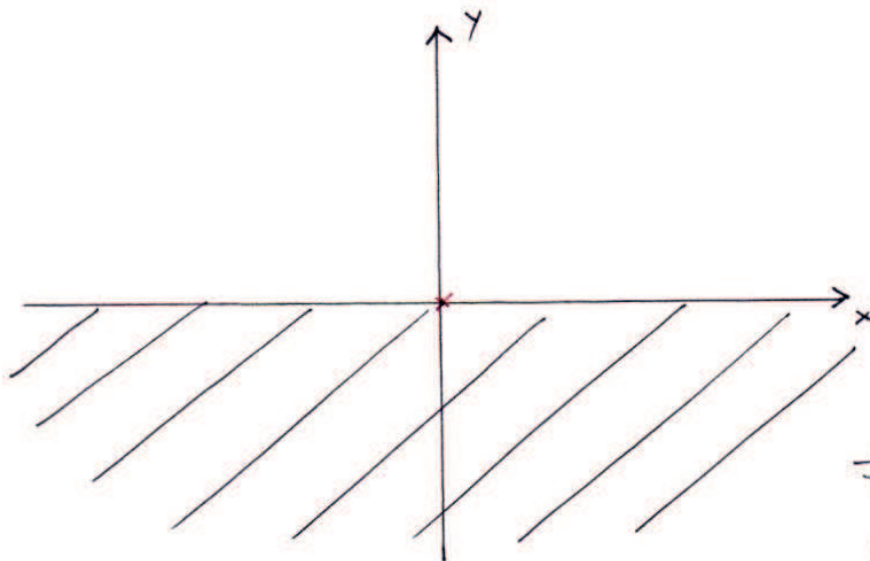


$$y = \frac{2^x - 1}{x}$$

Domínio: C'è solo il problema della frazione, per cui:
 $x \neq 0$ ovvero

$$x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

Graficamente non ci sono zone da sbarrare perché dal dominio è escluso un solo punto.



Per capire quali zone sbarrare sopra o sotto l'asse delle "x" studiamo la positività

Positività:

$$\frac{2^x - 1}{x} \geq 0$$

N: $2^x - 1 \geq 0$

si tratta di una disequazione esponenziale, la "x" si trova all'esponente.

La prima cosa da fare è lasciare solo il termine esponenziale:

$$2^x \geq 1$$

dopodiché per eliminare l'esponenziale di base 2 si dovrà svolgere il logaritmo in base 2 di ambo i termini:

si tratta di una disequazione fratta, vanno studiati numeratore e denominatore.

$$\log_2(2^x) \geq \log_2(1)$$

$$x \geq 0$$

Auche in questo caso
se la base fosse stata
minore di 1 si girava
il verso.

$$D: x > 0$$

La funzione
dunque è
sempre positiva e
si può sbarrare
ovunque sotto l'asse
delle "x".

Abbiamo segno di
numeratore e denominatore,
studiamo il segno della
frazione:

	0	
N	- - - - -	+
D	- - - - -	+
	(+)	(+)

Si riporta anche in questo caso il grafico della
funzione ottenuto a mezzo calcolatore:

