Esercitazione

Si studia la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-2x+1}$$

, partiamo come sempre dal dominio:

$$\begin{cases} x^2-4 \geq 0 & \text{(per dare senso alla radice)} \quad (1) \\ x^2-2x+1 \neq 0 & \text{(per dare senso alla frazione)} \quad (2) \end{cases}$$

Risolviamo le 2 disequazioni:

(1) $x^2-4 \geq 0 \longrightarrow \Delta = b^2-4ac = 0^2-4\cdot 1\cdot(-4) = 16 > 0$

La soluzione della disequazione è:

$$x \leq x_1 \cup x \geq x_2$$

x_1 e x_2 sono le 2 soluzioni dell'equazione che risolviamo:

$$x^2-4=0 \quad \text{(equazione di 2° grado pura)}$$

$$x^2 = 4 \longrightarrow x = \pm\sqrt{4} \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

La soluzione della disequazione è allora: $\boxed{x \leq -2 \cup x \geq 2}$

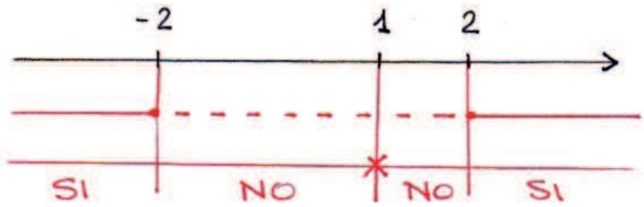
(2) $x^2-2x+1 \neq 0$

Quando c'è il segno di diverso si deve risolvere come se ci fosse l'uguale

$$\Delta = b^2-4ac = 4-4\cdot 1\cdot 1 = 4-4 = 0 \quad \text{(unica soluzione)}$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\pm\sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \longrightarrow \boxed{x \neq 1}$$

Mettiamo a sistema le due condizioni:



Il dominio risulta quindi $x \leq -2 \cup x \geq 2$

Scriviamolo con gli intervalli:

$$x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

Passiamo allo studio della positivita':

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-2x+1} \geq 0$$ studiamo numeratore e denominatore

N: $\sqrt{x^2-4} \geq 0 \quad \forall x \in D$ una radice di indice pari è sempre maggiore di zero. E' zero quando l'argomento è zero, cioè, in questo caso, se $x = \pm 2$

per ogni

(se la radice è di indice dispari, bisogna imporre che l'argomento sia ≥ 0)

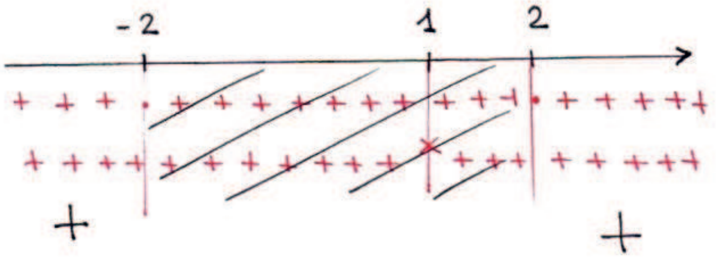
D: $x^2 - 2x + 1 > 0$ studiamo il Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$$

la soluzione di tale disequazione è $x \neq x_{1,2}$

$x_{1,2}$ l'abbiamo già calcolato quando si è svolto il dominio, ed è 1; per cui il denominatore è sempre positivo tranne quando la "x" è 1

$x \neq 1$ svolgiamo ora lo schema con i segni.



C'è da ricordarsi, quando si studia il segno, del dominio, per cui la parte tra -2 e 2 va elisa.

Dunque la funzione in oggetto è sempre positiva tranne che in $x=-2$ e $x=2$ dove si annulla.

Infine passiamo agli asintoti. Guardando il dominio ci si accorge che gli unici limiti da svolgere sono quelli a $-\infty$ e $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-2x+1} = \frac{\sqrt{+\infty-4}}{+\infty+\infty+1} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

si tratta di una forma indeterminata, per risolverla bisogna guardare ai gradi dei polinomi.
Il numeratore è di 1° grado perchè x^2 è sotto radice: $\sqrt{x^2} \Rightarrow x$, mentre il denominatore è di 2° grado.
Essendo il grado del denominatore maggiore di quello del numeratore, questo limite è pari a 0.

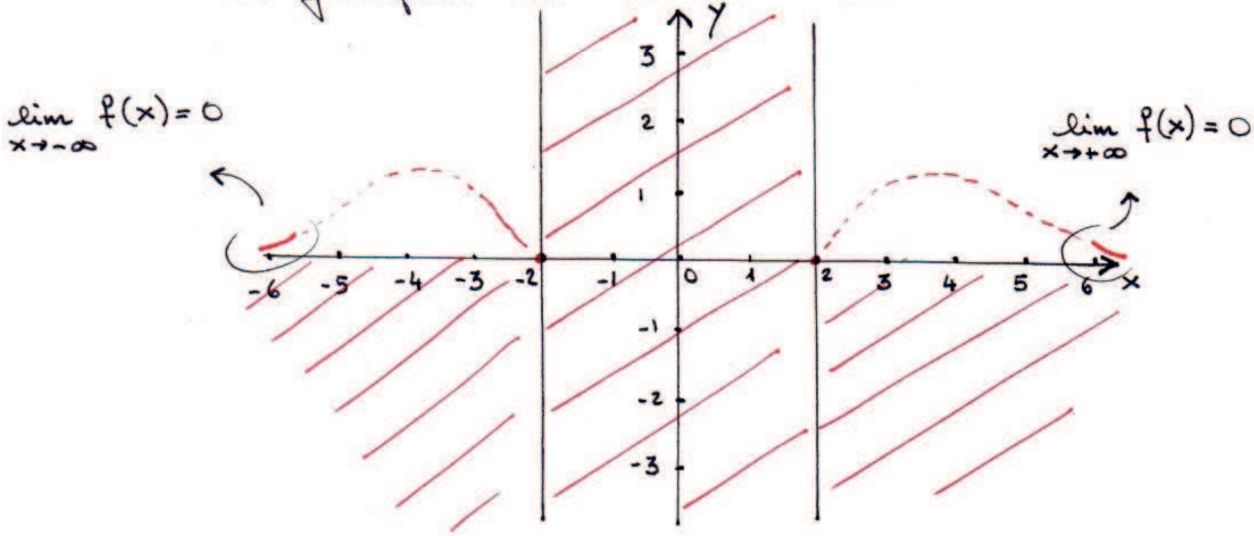
Lo stesso analogo ragionamento si può fare per il limite per $x \to +\infty$

Dunque:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-2x+1} = 0$$

poiche' il limite è un numero, questo significa che: $y=0$ (asse x) è asintoto orizzontale

Quindi, quando la "x" tende a $-\infty$ o a $+\infty$ la funzione si avvicina indefinitamente all' asse della "x" ($y=0$). Possiamo provare a tracciare un grafico di tentativo:



Da cio' che sappiamo non possiamo dire se le 2 parti della funzione sono speculari. Di presso il grafico esatto, da cui si evince che non lo sono.