Esercitazione: studio funzione difficolta' medio-alta

Si consideri la seguente funzione:

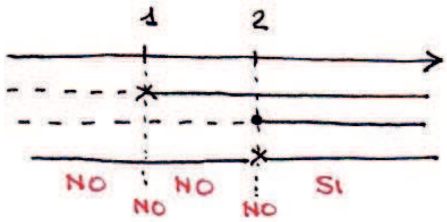
$$f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-2}}$$

Cominciamo a studiarne il dominio:

$$D: \begin{cases} x-1>0 \rightarrow \boxed{x>1} \\ x-2 \geq 0 \rightarrow \boxed{x \geq 2} \\ \sqrt{x-2} \neq 0 \rightarrow x-2 \neq 0 \rightarrow \boxed{x \neq 2} \end{cases}$$

Una radice di indice pari quando esiste è sempre non negativa. E' pari a zero se l'argomento è zero.

Mettiamo a sistema le 3 condizioni:



$D: x > 2$ che si può anche scrivere: $\forall x \in \left]2, +\infty\right[$

questo significa che lo studio dei limiti va fatto in 2 e $+\infty$

Passiamo allo studio della positività:

$$\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-2}} \geq 0$$

studiamo il segno di numeratore e denominatore

$N: \ln(x-1) \geq 0$ è una disequazione logaritmica si esponenziano i 2 termini

$$\cancel{e}^{\cancel{\ln}(x-1)} \geq e^0$$

poiche' "e" è maggiore di 1 il segno non si inverte.

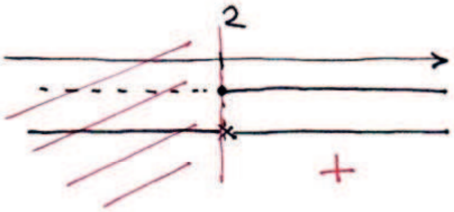
$$x-1 \geq 1$$

$$x \geq 2$$

D: $\sqrt{x-2} > 0$ una radice, come già detto, o è positiva o è nulla. Se si vuole sapere dov'è positiva basterà escludere i punti in cui è nulla:

$$x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$$

Effettuiamo lo studio del segno della frazione:



nel fare questo studio ricordiamo che tutto quello che accade prima di $x=2$ non ci interessa perché lì la funzione non esiste.

Infine gli asintoti ... guardando il dominio ci siamo accorti che ci sono da studiare 2 limiti: per $x \rightarrow 2^+$ e per $x \rightarrow +\infty$. Partiamo dal secondo

$\hookrightarrow$ la "x" può tendere a 2 solo da destra visto che per valori minori di 2 la funzione non esiste.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-2}} = \frac{\ln(+\infty)}{\sqrt{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

→ quando l'argomento tende a $+\infty$, il logaritmo di base maggiore di 1 tende a $+\infty$ (si allega tabella con limiti di logaritmo ed esponenziale)

E' una forma indeterminata, tuttavia il grado del logaritmo è più piccolo di quello di qualsiasi funzione, per cui il denominatore ha grado maggiore e il risultato è zero.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-2}} = 0 \Rightarrow \overset{x}{\cancel{y}} = 0 \quad \text{asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-2}} = \frac{\ln(2-1)}{\sqrt{2-2}} = \frac{\ln(1)}{\sqrt{0}} = \frac{0}{0}$$

Anche in questo caso abbiamo una forma indeterminata. Se ci fossero stati al numeratore e denominatore due polinomi si doveva procedere alla scomposizione, essendoci un logaritmo questa strada non puo' essere intrapresa.
Si deve usare un limite fondamentale. Nel nostro caso quello piu' adatto è:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

quello che è importante ricordare è che questo limite si puo' utilizzare anche quando al posto della "x" c'è un'altra quantita' che tende a zero. L'importante è che dentro il logaritmo e al denominatore ci sia la stessa quantita'.

Per poter utilizzare questo limite fondamentale si deve scrivere nel nostro caso l'argomento del logaritmo come 1 piu' una quantita' che va a 0:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\ln[1+(x-2)]}{\sqrt{x-2}}$$

$1+(x-2)$ è uguale a $x-1$ è solo un modo diverso di scriverlo, un modo utile visto che "$x-2$" tende a zero, per cui nel logaritmo abbiamo 1 piu' una quantita' che va a zero.

Per poter applicare il limite fondamentale $(x-2)$ deve comparire anche al denominatore, per cui si moltiplica e divide per $(x-2)$:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln[1+(x-2)]}{\sqrt{x-2}\cdot(x-2)}\cdot(x-2) =$$

questo è il limite fondamentale, il cui risultato sappiamo è 1

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}} = \frac{0}{0}$$

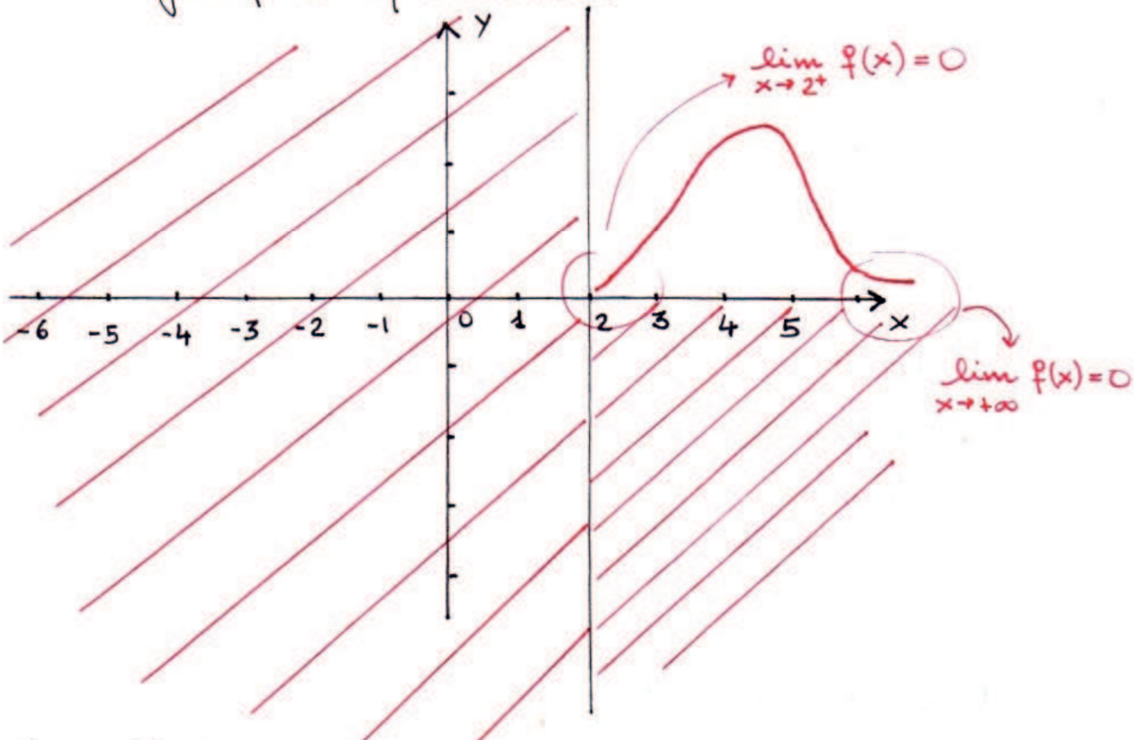
il limite è ancora 0/0 però il logaritmo è sparito, ed inoltre "$x-2$" si può scrivere $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-2}$ $\left(=\sqrt{(x-2)^2}=x-2\right)$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}\cdot\cancel{\sqrt{x-2}}}{\cancel{\sqrt{x-2}}} =$$

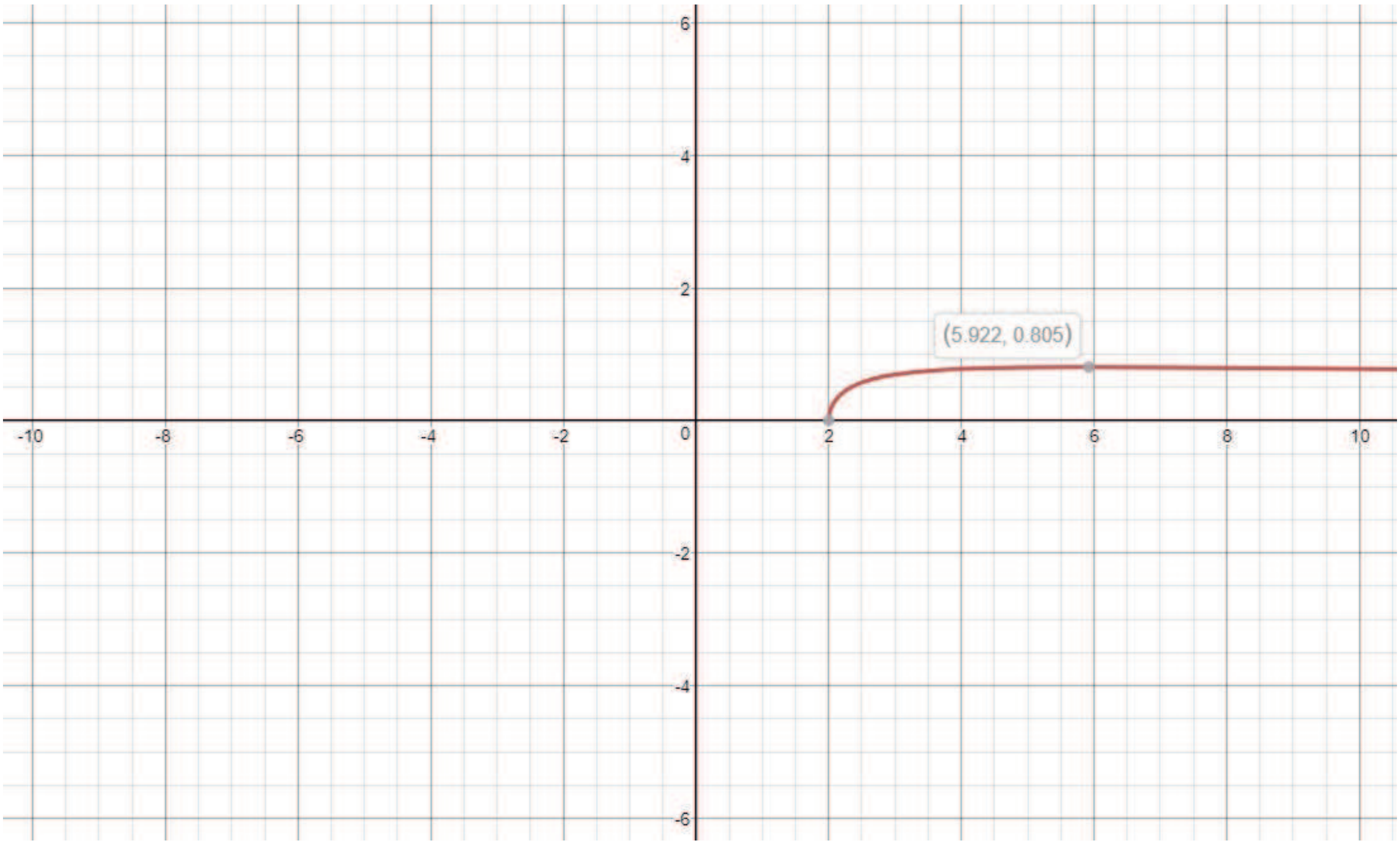
$$= \lim_{x\to 2^+} \sqrt{x-2} = \sqrt{2-2} = \sqrt{0} = 0$$

non ci sono asintoti verticali

Mettiamo insieme tutte le informazioni per tracciare il grafico ipotetico:



Si riporta di presso il grafico ottenuto mediante calcolatrice grafica



Il grafico ottenuto mediante calcolatore conferma lo studio condotto. La funzione non esiste prima di x=2, quando x tende a 2, essa tende a zero, quando x tende ad infinito essa tende a zero (anche se in maniera molto più lenta di come rappresentato nel grafico a maniera).

Si noti che la funzione presenta un punto di massimo in prossimità del valore x=6. Tale punto impareremo a calcolare prossimamente mediante il concetto di derivata.