# Teorema della media

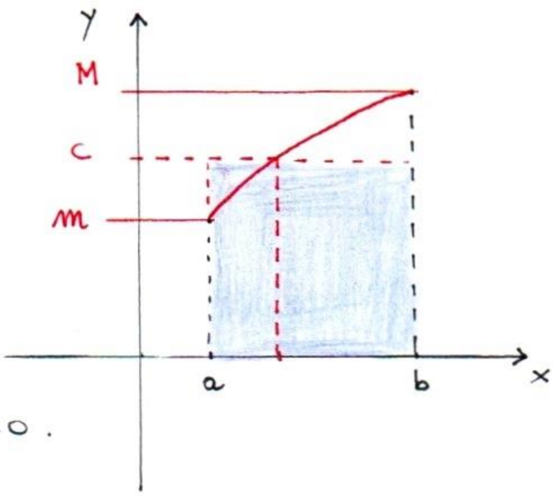
Si tratta del primo importante teorema che riguarda gli integrali definiti. Descriviamo cosa dice: se si considera una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a,b]$, sappiamo che di tale funzione è possibile calcolare l'integrale definito tra $[a,b]$ e che tale integrale è per definizione l'area tra la curva e l'asse delle "x". Il teorema della media garantisce che esiste un punto $c \in [a,b]$ tale che $f(c)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Volendo essere sintetici:

<u>Hp</u>: $f(x)$ continua in $[a,b]$

<u>Th</u>: $\exists c \in [a,b] : f(c)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$

<u>Dim</u>:




Partiamo dall'ipotesi, poiche' $f(x)$ è continua in $[a,b]$, in tale intervallo ammettera' un minimo ed un massimo, chiamiamo "m" il minimo ed "M" il massimo. Per definizione di minimo e massimo è possibile scrivere:

$$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$$

Se ora i valori numerici "m" ed "M" li si tratta come funzioni dal valore costante:

$$g(x) = m \;;\; h(x) = M \qquad \forall x \in [a,b]$$

posso applicare la proprieta' del confronto degli integrali definiti, ovvero:

$$\begin{matrix} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \forall x \in [a,b] \end{matrix} \longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b h(x)\,dx$$

ritornando al valore delle funzioni $g(x)$ ed $h(x)$ cio' equivale a scrivere:

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

Noi pero' sappiamo, sempre per una delle proprietà degli integrali, che l'integrale di una costante è pari alla costante per l'ampiezza dell'intervallo (l'area sotto la funzione diventa un rettangolo), il che ci consente di scrivere:

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a)$$

$(b-a)$ è necessariamente una quantita' positiva, per cui posso dividere i 3 termini della disequazione senza invertire i segni di disuguaglianza:

$$\frac{m \cdot \cancelto{1}{(b-a)}}{\cancel{(b-a)}_1} \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \leq \frac{M \cdot \cancelto{1}{(b-a)}}{\cancel{(b-a)}_1}$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \leq M$$

Si è dunque capito che il valore numerico $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$, perchè di un numero si tratta, è sempre compreso tra "m" ed "M", ovvero il minimo e il massimo della funzione $f(x)$ in $[a,b]$.
Tuttavia io conosco un teorema, detto "dei valori intermedi", che dice che la funzione $f(x)$ assume almeno una volta tutti i valori tra il suo minimo e il suo massimo, se essa è continua
Dunque dovrà per forza esistere un punto $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$
moltiplicando ambo i membri per $(b-a)$ si ottiene:

$$f(c)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

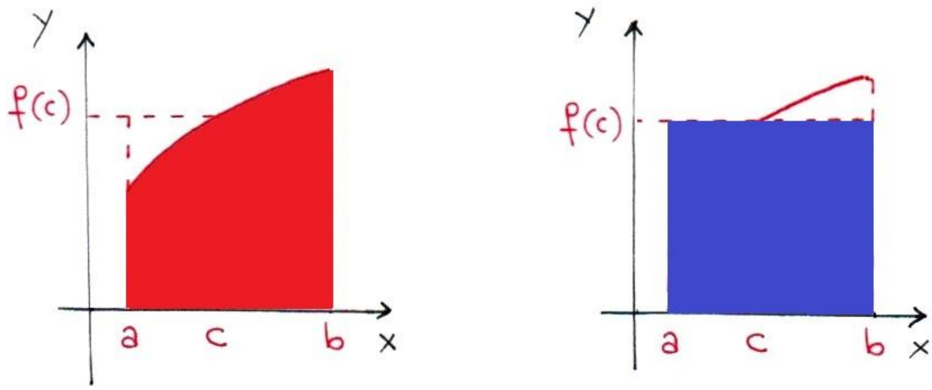
che è esattamente
ciò che si intendeva dimostrare.
Questo teorema ha una interpretazione di carattere grafico interessante, infatti ambo i termini dell'uguaglianza sono delle aree:

$$f(c)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

area del rettangolo avente come base $(b-a)$ e altezza proprio $f(c)$

area della regione di piano tra la funzione e l'asse delle "x"

In altri termini f(c) è proprio l'altezza che consente ad un rettangolo di base (b-a) di avere la stessa area della figura compresa tra la funzione e l'asse delle "x".




Le due aree evidenziate nei due grafici risultano uguali. In questo senso, spesso, ci si riferisce ad f(c) come valore medio (o valore medio integrale) della funzione.