

9. CRITERI DI RESISTENZA E SICUREZZA

9.3. STATI DI TENSIONE PLURIASIAI

Per gli stati di tensione pluriassiali si perde la possibilità di un confronto diretto con i risultati della prova di trazione (o di compressione). Infatti, mentre per gli stati di tensione monoassiali sono sufficienti le due tensioni limiti σ_0^f e σ_0^c per delimitare il dominio di crisi (v. [paragrafo 9.1](#)), nel caso di stati di tensioni pluriassiali sono infiniti gli stati di tensione limiti della crisi per un dato materiale, come si può dedurre dall'esempio qui di seguito illustrato.

Supponiamo di operare con un metallo duttile il cui comportamento a trazione sia approssimato da una bilatera (modello elastico - perfettamente plastico)

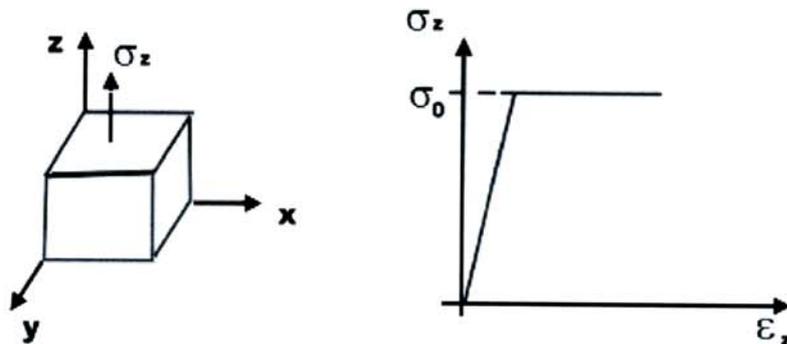


Fig. 9.2. a - Caso monoassiale

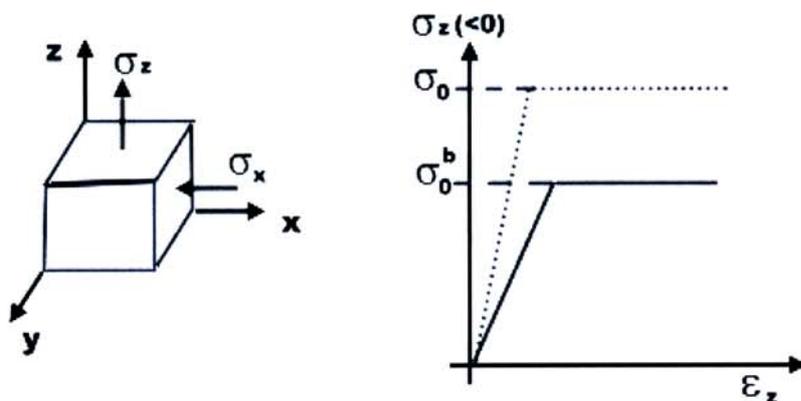


Fig. 9.2. b - Caso pluriassiale con σ_x di compressione

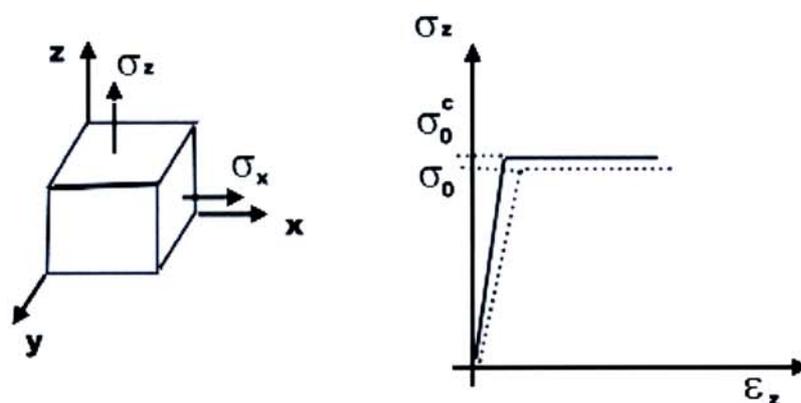


Fig. 9.2. c - Caso pluriassiale con σ_x di trazione

Ricordando la relazione costitutiva (5.18)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu I_\sigma \delta_{ij} \right]$$

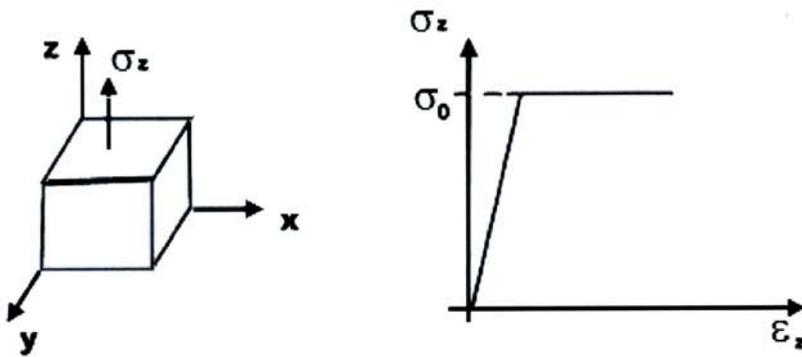
con $I_\sigma = \text{tr } \boldsymbol{\sigma}$, si deduce facilmente che, nel caso particolare in cui sia $\sigma_y = 0$, $|\sigma_x| = \sigma_z$, risulta:

caso a - $\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x$

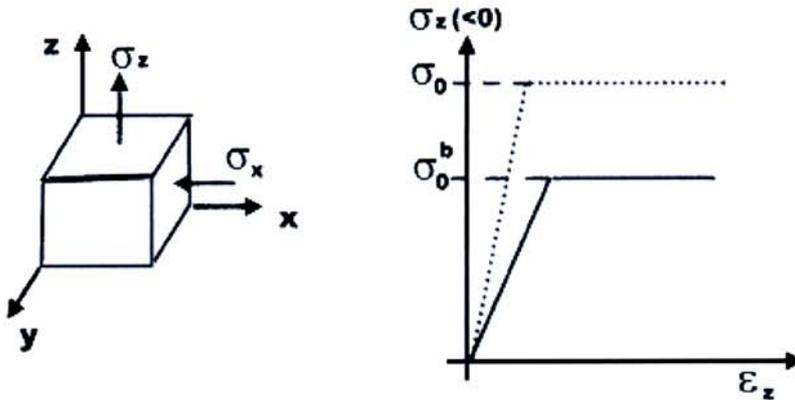
caso b - $\varepsilon_x = \frac{1}{E} (1 + \nu) \sigma_x$

caso c - $\varepsilon_x = \frac{1}{E} (1 - \nu) \sigma_x$

Come è noto, la prova di trazione (v. Fig. 9.2a), fornisce il modulo di elasticità E e la tensione di crisi σ_0 .



Se alla σ_x di trazione si associa una compressione trasversale (v. Fig. 9.2b), si osserva che la tensione di snervamento viene raggiunta ad un livello più basso. Se si opera con $|\sigma_x| = \sigma_x$, per metalli duttili, si può raggiungere lo snervamento anche ad una tensione $\sigma_0^b \approx \frac{1}{2} \sigma_0$.



Se esaminiamo invece il caso in cui alla σ_x di trazione si associ una trazione trasversale con $\sigma_y = \sigma_x$, l'intuizione porterebbe a ritenere che ora la tensione di snervamento debba aumentare. Tuttavia l'esperienza insegna che in tali casi la modificazione è modesta se non del tutto irrilevante.

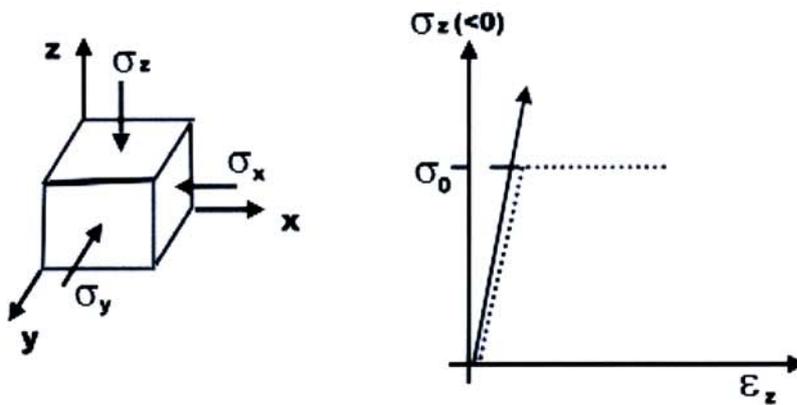
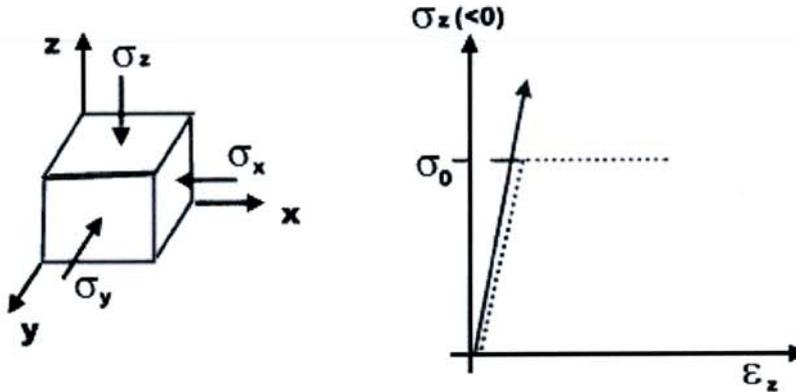


Fig. 9.2. d - Caso di compressione idrostatica

Se infine se si considera il caso di una compressione idrostatica (v. Fig. 9.2d), [in tal caso risulta $\epsilon_x = \frac{1}{E}(1 - 2\nu)\sigma_x$] mentre il risultato sperimentale porta a ritenere che la tensione di snervamento è difficile da raggiungere.



Questi quattro casi esaminati portano a concludere che il raggiungimento della condizione di snervamento o di crisi in un punto è influenzato da tutte e tre le tensioni principali, ossia dall'intero stato di tensione. Non è possibile pertanto utilizzare i risultati delle prove di trazione (o di compressione), né è pensabile tuttavia di condurre sperimentazioni specifiche per ogni singolo stato di tensione.

Tale difficoltà può essere superata soltanto se si trova il modo di ricondurre gli infiniti stati tensionali di crisi di un dato materiale, alle due tensioni di crisi σ_0^t e σ_0^c rispettivamente a trazione ed a compressione, della prova monoassiale.

Occorre quindi poter dedurre dallo stato di tensione triassiale due tensioni ideali σ_{id}^t e σ_{id}^c riconducibili ad uno stato di tensione monoassiale ugualmente pericoloso. Si tratta, in altre parole, di istituire un confronto fra stati di tensione sulla base della loro pericolosità, ossia del raggiungimento dello stato di crisi.

$$\left| \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{array} \right| \quad \text{confronto} \quad \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \sigma_0 \end{array} \right| \quad (9.6)$$

Si apre così il capitolo dei criteri di snervamento o di plasticizzazione (od anche di resistenza o di rottura).

Strettamente correlati ai criteri di snervamento sono quelli di fessurazione che fanno specifico riferimento alla *meccanica della frattura*.

NOTA SULLA FORMA GENERALE DEI CRITERI DI SNERVAMENTO

Come già avvertito al punto 9.1, più in generale il confronto fra stati di tensione deve consentire di stabilire se in qualche punto del solido si sia superata la tensione di crisi del materiale. Quest'ultima, come abbiamo visto a proposito della prova di trazione, può coincidere di volta in

volta con la tensione limite di elasticità, con la tensione di snervamento oppure con la tensione di rottura.

Nel seguito lo stato di tensione di riferimento è quello monoassiale dedotto da una prova di trazione:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix}$$

dove σ_0 indica la tensione di crisi; ovvero da una prova di trazione e da una di compressione che, in condizione di crisi, forniscono i valori:

$$\text{per la trazione: } \sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0' \end{vmatrix}$$

$$\text{e per la compressione: } \sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0'' \end{vmatrix}$$

dove σ_0' e σ_0'' sono le due tensioni di crisi rispettivamente a trazione ed a compressione.

Il problema così impostato implica che qualunque criterio può essere espresso in funzione del solo stato di tensione σ_{ij} nel punto considerato, mentre è ovvio che il criterio, applicato al caso monoassiale, deve risultare coerente con i risultati sperimentali.

Di conseguenza l'espressione più generale che si può attribuire ad un qualunque criterio è perciò una funzione di 6 variabili:

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma^k$$

essendo σ^k una appropriata costante. Il numero delle variabili di questa funzione si riduce a 3, se si ammette che il materiale sia isotropo nei confronti del raggiungimento della crisi e pertanto in tal caso si potrà scrivere:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = k$$

dove $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono le tensioni principali e k una costante che si determina, come vedremo nel seguito, applicando il criterio al caso monoassiale, ossia:

$$f(0,0,\sigma_0) = k$$

Nei punti che seguono illustreremo alcuni criteri di snervamento o di rottura.

9.3.1. Criterio della massima tensione normale

È il criterio più semplice ed antico, implicitamente adottato da G. Galilei e successivamente da Navier e Rankine.

Esso afferma che lo stato di tensione σ_{ij} , le cui tensioni principali siano σ_1 , σ_2 e σ_3 , con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, raggiunge la crisi quando

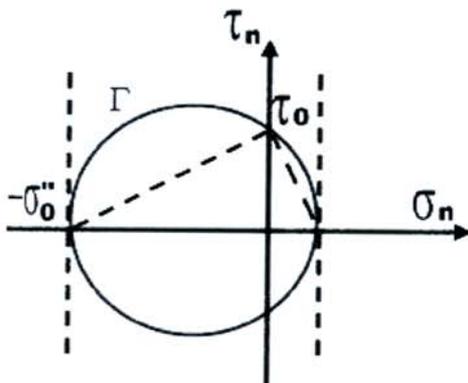
$$\begin{aligned} |\sigma_1| &\leq \sigma_0' \\ |\sigma_3| &\leq \sigma_0'' \end{aligned} \tag{9.7}$$

Ciò significa che nel piano di Mohr, i tre cerchi principali devono essere contenuti nella striscia definita dalle due rette

$$\sigma_x = \sigma_0'$$

$$\sigma_x = -\sigma_0''$$

S'individua così il massimo cerchio Γ compatibile con la crisi del materiale (v. Fig. 9.3).



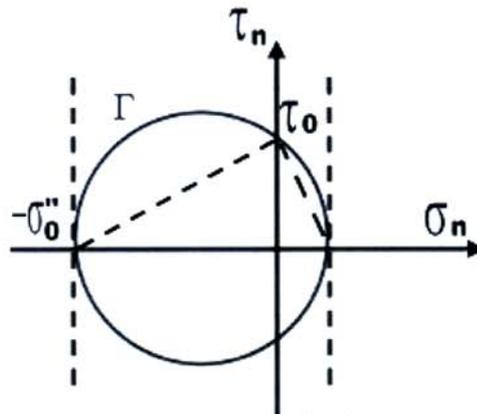


Fig. 9.3. - Cerchio limite

È interessante notare che al cerchio Γ corrisponde una τ_{\max} , non accompagnata da σ_x , data da

$$\tau_0 = \sqrt{\sigma_0' \sigma_0''} \quad (9.8)$$

che, per materiali con ugual resistenza a trazione ed a compressione ($\sigma_0' = \sigma_0'' = \sigma_0$), implica:

$$\tau_0 = \sigma_0 \quad (9.9)$$

Questo risultato non ha alcun riscontro sperimentale, certamente per i materiali duttili, per i quali la tensione tangenziale limite τ_0 assume, di solito, valori alquanto minori. Il criterio tuttavia trova interessanti applicazioni come criterio di rottura per materiali fragili quali la ghisa, i materiali vetrosi ed i materiali lapidei.

Dalle espressioni precedenti si deduce che, nel caso in cui sia $\sigma_1 \geq 0$ e $\sigma_3 \leq 0$, introdotte le tensioni ideali:

$$\sigma_{id}' = \sigma_1$$

$$\sigma_{id}'' = |\sigma_3|$$

la condizione di crisi (v. paragrafo 9.1.) è espressa mediante:

$$\sigma_{id}' = \sigma_0'$$

$$\sigma_{id}'' = |\sigma_0''|.$$

Nel caso di materiali con ugual resistenza a trazione ed a compressione, ossia quando risulti $\sigma_0' = \sigma_0'' = \sigma_0$, l'espressione della σ_{id} risulta:

$$\sigma_{id} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \quad (9.10)$$

e la condizione di crisi è espressa mediante :

$$\sigma_{id} = \sigma_0.$$

9.3.2. Criterio di Coulomb o dell'attrito interno

Questo criterio fa risalire la rottura allo scorrimento lungo elementi piani nei quali sia violata la condizione

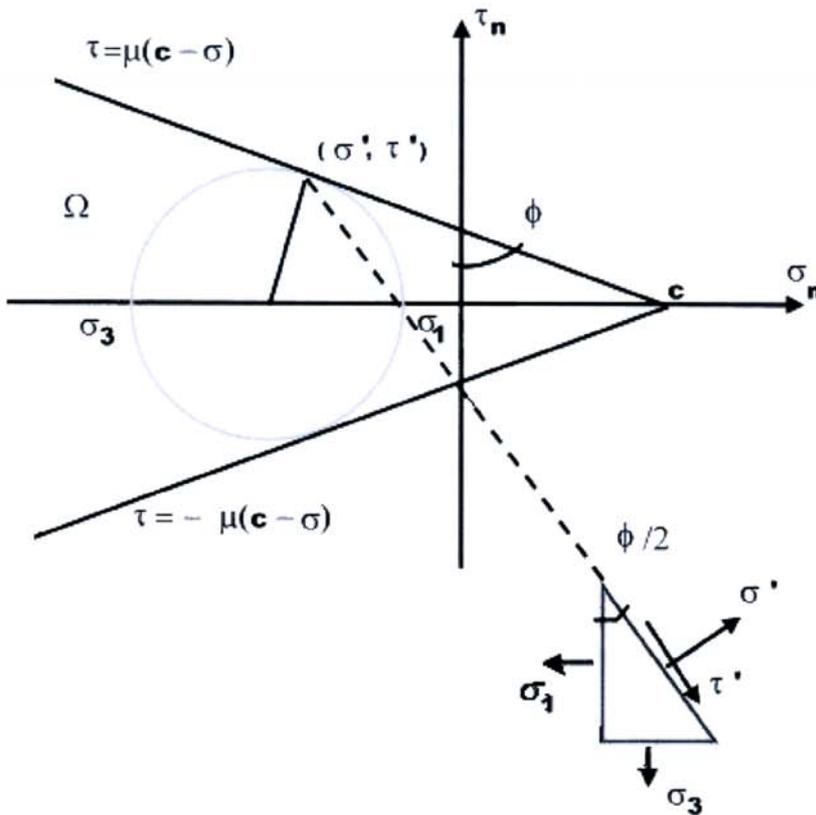
$$|\tau| < \mu(c - \sigma) \quad (9.11)$$

nella quale σ e τ sono rispettivamente tensione normale e tangenziale sull'elemento piano, c è una costante detta *coesione*, μ è il *coefficiente d'attrito interno*, legato all'*angolo d'attrito interno* φ dalla ben nota relazione:

$$\mu = \text{tang}\varphi \quad (9.12)$$

La (9.11) individua, nel piano di Mohr (v. Fig. 9.4), una superficie Ω delimitata dalle due rette:

$$|\tau| < \mu(c - \sigma)$$



$$\tau = \pm \mu(c - \sigma) \tag{9.13}$$

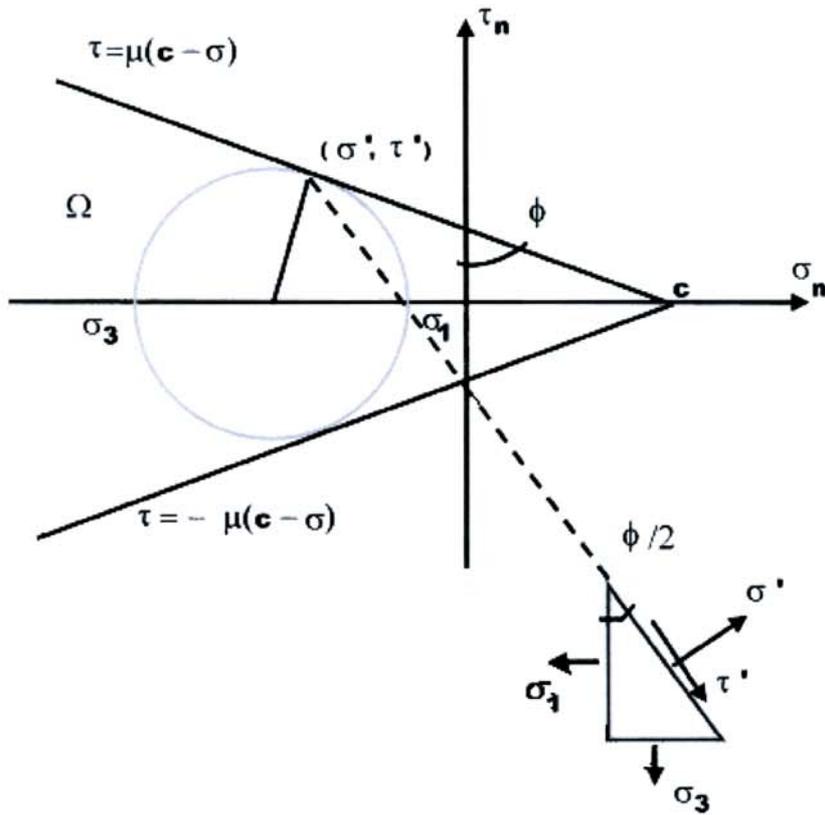
Noti i valori di μ e c , assegnato uno stato di tensione σ_{ij} , è possibile stabilire se esso rispetta il criterio (9.11) semplicemente calcolando le tre tensioni principali σ_1 , σ_2 e σ_3 e verificando che il più grande cerchio di Mohr sia interno, od al più tangente, alle due rette (9.13).

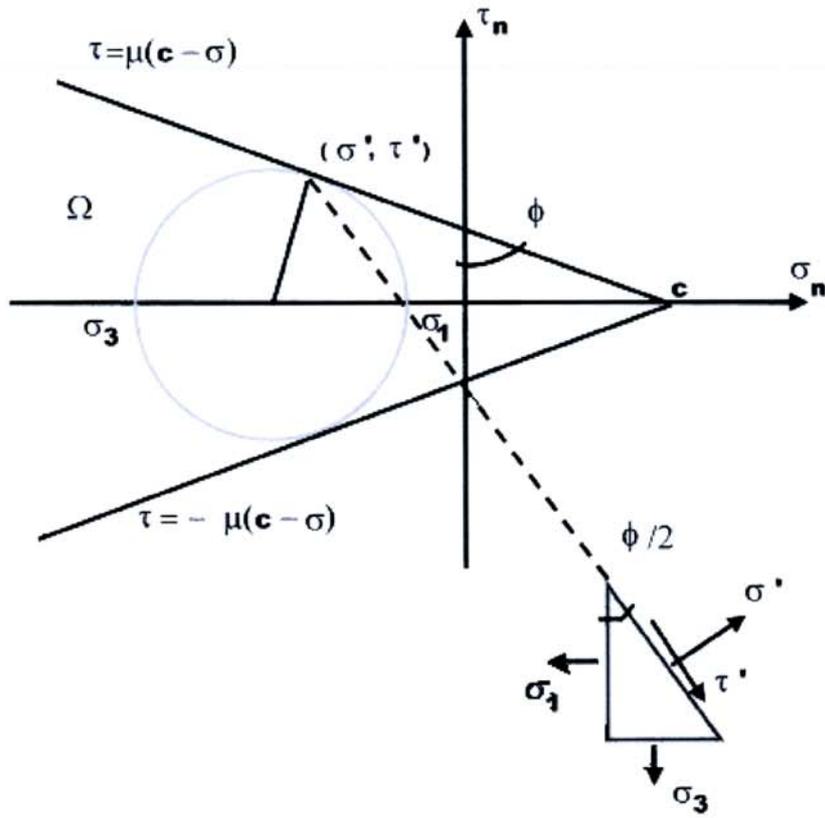
$$|\tau| < \mu(c - \sigma)$$

$$\tau = \pm \mu(c - \sigma)$$

Dalla figura 9.4. discende che per una data tensione normale σ' , il valore massimo della tensione tangenziale τ si verifica nel punto di tangenza (σ', τ') del più grande cerchio di Mohr. Questo punto individua anche il piano di scorrimento. Infatti, come è noto dalla costruzione dei cerchi di Mohr, esso appartiene al fascio avente come sostegno la direzione

principale relativa a σ_2 ed è inclinato di $\phi/2$ rispetto al piano relativo a σ_1 (v. Fig. 9.4).
L'angolo ϕ è dato da:





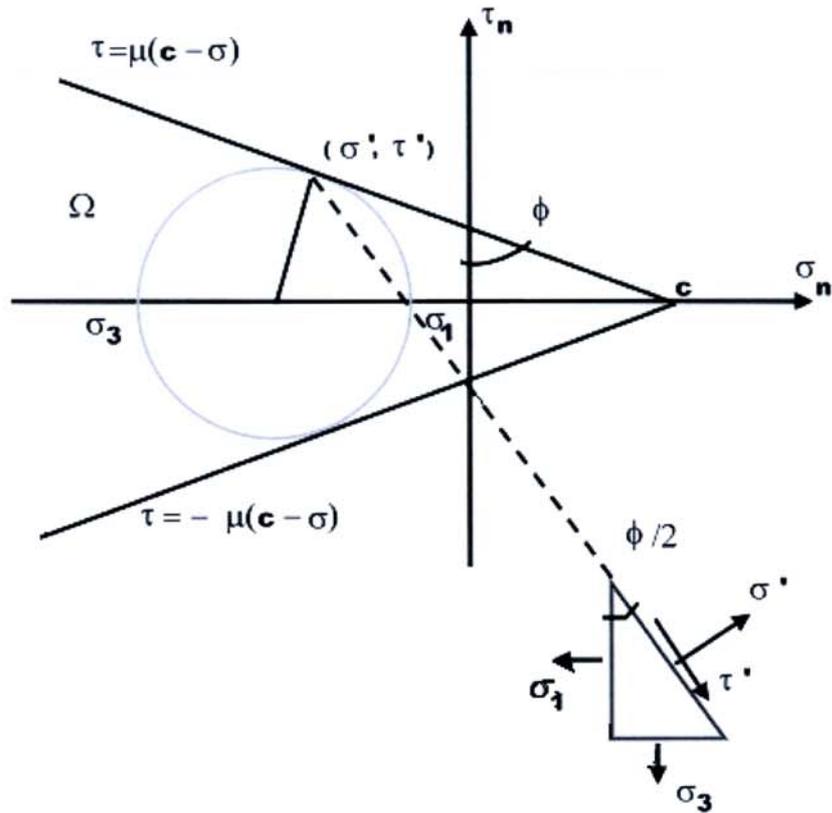
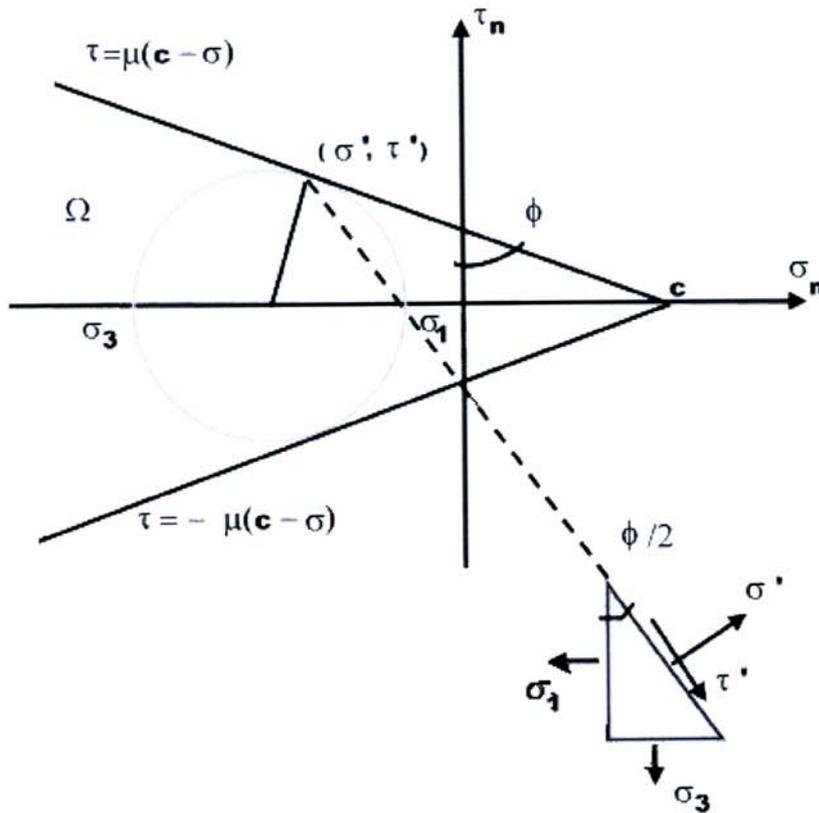


Fig. 9.4. Criterio di Coulomb

$$\operatorname{tg} \phi = 1/\mu, \quad \phi = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (9.14)$$

Si può notare che la tensione tangenziale $|\tau'|$ che provoca lo scorrimento cresce con la compressione σ' sul piano di scorrimento.

Il criterio (9.11) può essere espresso anche in termini di tensioni principali. Infatti, posto $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, dalla figura 9.4. si deduce immediatamente:



$$|\tau| < \mu(c - \sigma)$$

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi \quad (9.15)$$

$$\tau' = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi \quad (9.16)$$

Combinando la (9.11) con la (9.14), (9.15) e (9.16), si perviene a:

$$\operatorname{tg} \phi = 1/\mu, \quad \phi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi$$

$$\tau' = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi$$

$$|\tau| < \mu(c - \sigma)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi = 2\mu c \cos \varphi \quad \text{per } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (9.17)$$

e, per la (9.12)

$$\mu = \tan \varphi$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi = 2c \sin \varphi \quad \text{per } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (9.18)$$

In termini di tensioni principali, il criterio di Coulomb è perciò espresso, a seconda di quale delle tre tensioni principali sia quella intermedia, da una delle sei seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \text{tensione intermedia } \sigma_1 : & \quad |\sigma_2 - \sigma_3| + (\sigma_2 + \sigma_3) \sin \varphi = 2c \sin \varphi \\ \text{tensione intermedia } \sigma_2 : & \quad |\sigma_1 - \sigma_3| + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi = 2c \sin \varphi \\ \text{tensione intermedia } \sigma_3 : & \quad |\sigma_2 - \sigma_1| + (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi = 2c \sin \varphi \end{aligned} \quad (9.19)$$

Per tracciare le due rette (9.13), occorre conoscere almeno 2 circonferenze limiti. Eseguendo, ad es., una prova di trazione ed una di compressione, si determinano i due stati tensionali di crisi:

$$\tau = \pm \mu(c - \sigma)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \sigma'_0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \sigma''_0 \end{vmatrix} \quad (9.20)$$

e quindi le due circonferenze limiti Γ' e Γ'' . Si possono così individuare le due tangenti comuni a queste due circonferenze, come indicato nella [figura 9.5](#).

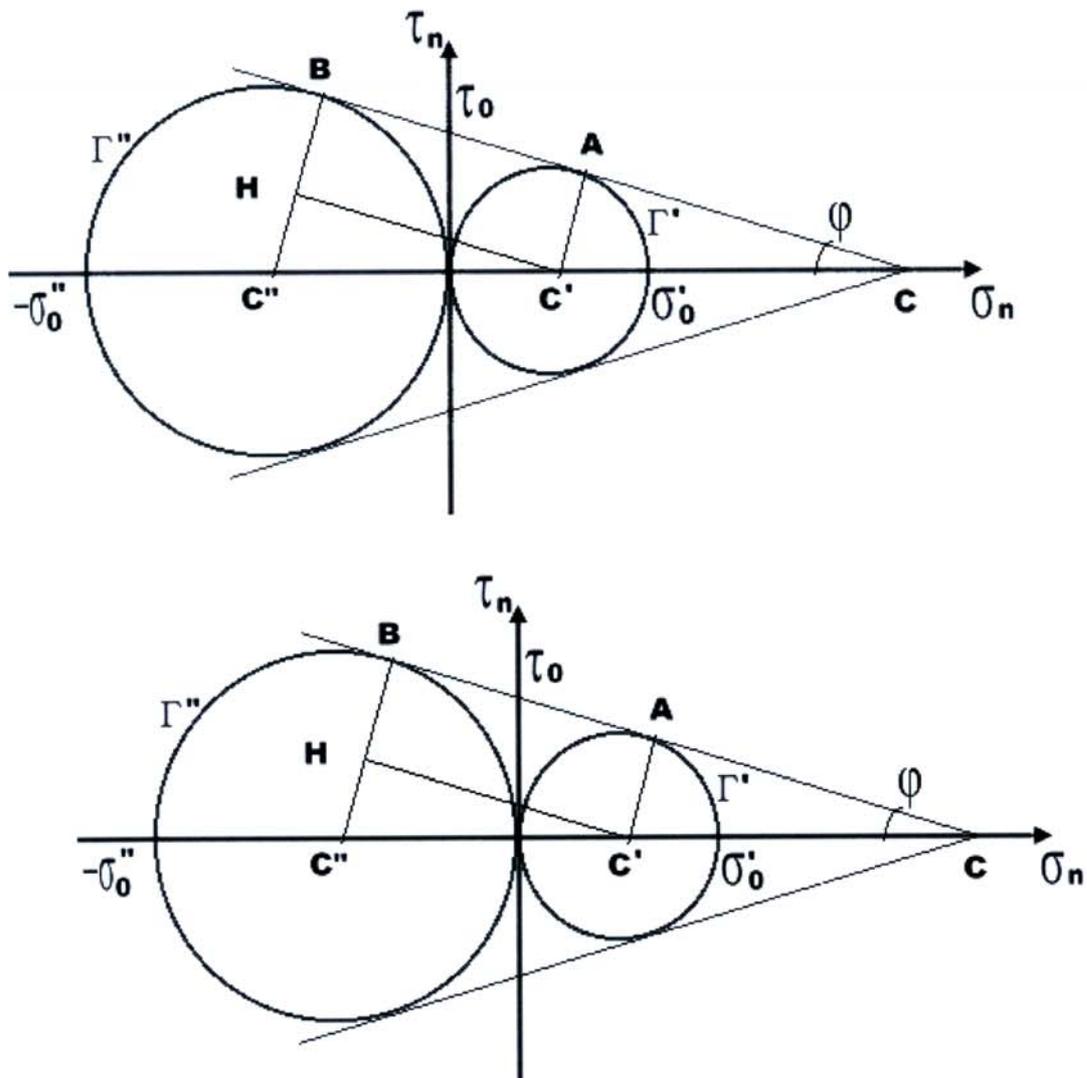
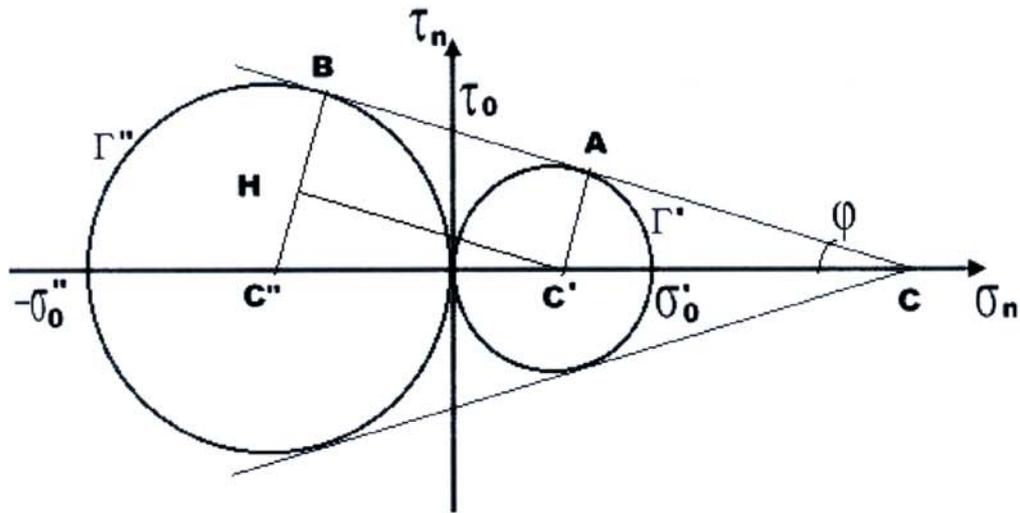


Fig. 9.5. - Criterio di Coulomb dedotto da una prova di trazione (circonferenza Γ') ed una di compressione (circonferenza Γ'')

Dalla [figura 9.5](#) si deduce inoltre che



$$\frac{1}{2} \sigma_0' = (c - \frac{1}{2} \sigma_0'') \sin \varphi$$

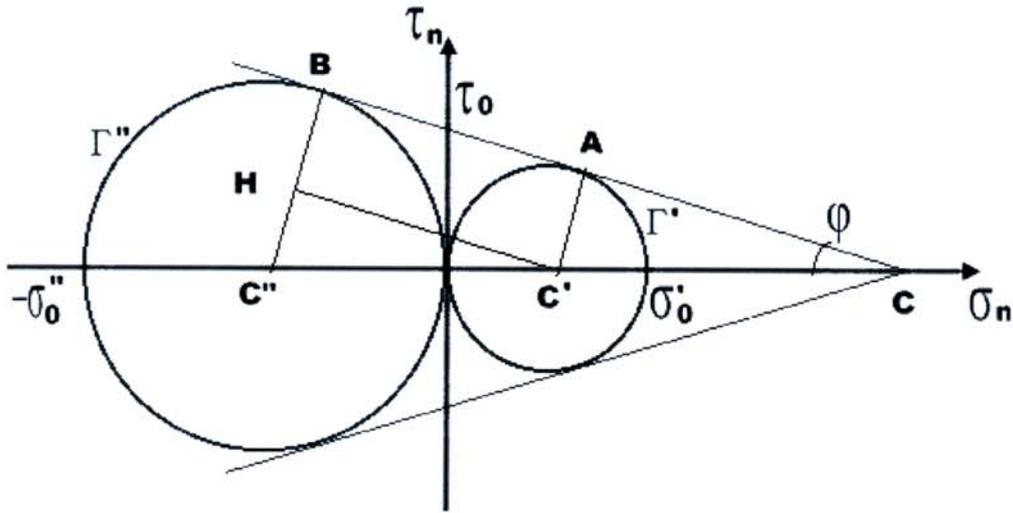
$$\frac{1}{2} \sigma_0'' = (c + \frac{1}{2} \sigma_0') \sin \varphi$$

e quindi, con facili passaggi, si trovano i valori della coesione c e dell'angolo di attrito interno φ

$$c = \frac{\sigma_0' \sigma_0''}{\sigma_0'' - \sigma_0'} \tag{9.21}$$

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_0'' - \sigma_0'}{\sigma_0'' + \sigma_0'}$$

Inoltre, sempre dalla [figura 9.5](#), è facile dedurre il valore massimo della tensione tangenziale τ_0 non accompagnata da tensione normale. Infatti risulta



$$\tau_0 = BD = AD = \frac{1}{2} C'H$$

$$C'H = (C'C''^2 - HC''^2)^{0,5} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_0' + \sigma_0''}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_0'' - \sigma_0'}{2}\right)^2}$$

Da cui discende

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_0' \sigma_0''} \tag{9.22}$$

Si tratta di un valore che è esattamente la metà di quello ottenuto con il criterio della massima tensione normale (v. 9.8).

$$\tau_0 = \sqrt{\sigma_0' \sigma_0''}$$

Questo criterio, con valori di μ positivi, trova importanti applicazioni nella geotecnica e, in generale, nei materiali fragili che presentano una resistenza a compressione molto più alta di quella a trazione, come la ghisa ed alcuni materiali ceramici.

9.3.3. - CRITERIO DELLA CURVA INTRINSECA O DI MOHR.

Il criterio di Mohr è una generalizzazione di quello di Coulomb e, analogamente a questo, presuppone che:

1. la rottura si manifesti lungo un elemento piano in dipendenza dei valori che su di esso assumono la tensione normale σ e tangenziale τ . La circonferenza che individua la crisi è sempre quella più grande.

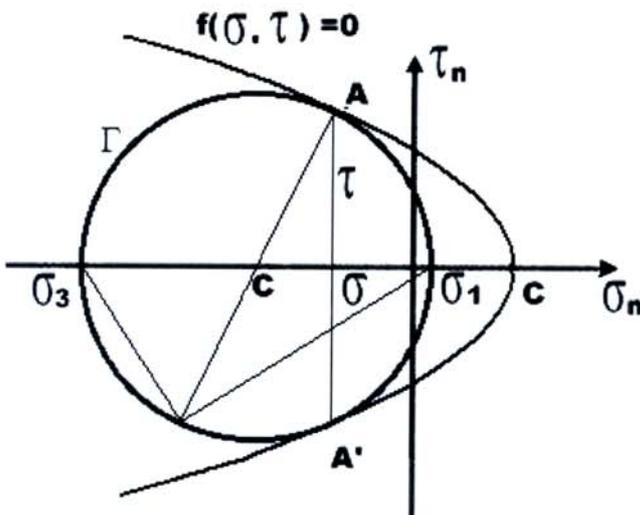
2. le superfici di scorrimento appartengano al fascio di sostegno σ_2 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) la quale però, come nel criterio di Coulomb, non esercita alcuna influenza sul raggiungimento dello stato di crisi.

Diversamente dal criterio di Coulomb, quello di Mohr prescinde dalla relazione lineare di crisi (9.13) $|\tau| = \mu(c - \sigma)$ in quanto suppone che la crisi si raggiunge quando la tensione tangenziale sul piano di scorrimento perviene ad un certo valore massimo legato alla da una relazione più complessa

$$\tau = \pm \mu(c - \sigma)$$

$$f(\sigma, \tau) = 0. \tag{9.23}$$

In tal modo i cerchi di crisi Γ individuano una curva inviluppo $f(\sigma, \tau) = 0$, luogo geometrico dei punti A, A' che, a parità di σ , hanno la massima ordinata τ (v. Fig. 9.6). Tale curva è naturalmente simmetrica rispetto all'asse σ_n .



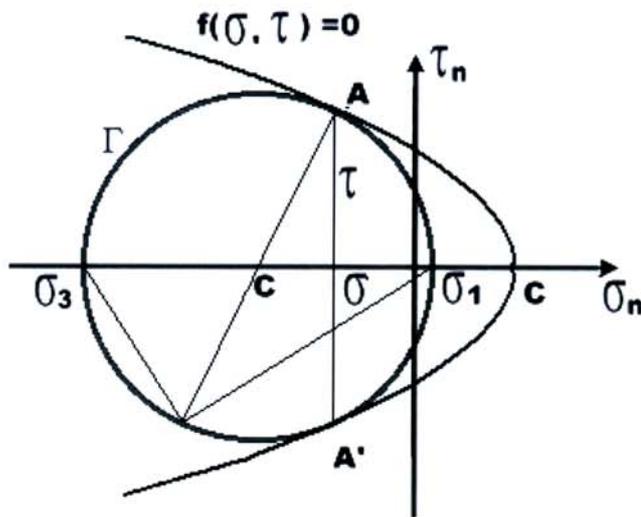


Fig. 9.6. Curva intrinseca di Mohr

Per un dato materiale, la curva intrinseca potrebbe essere costruita per punti sperimentalmente, operando con stati di tensione biassiali.

Per qualunque materiale la curva intrinseca presenta le seguenti caratteristiche:

- a) i due rami simmetrici si incontrano, dal lato delle $\sigma_x > 0$ nel punto $\sigma_x = c$. In tale punto il cerchio limite si riduce ad un punto ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). La crisi si manifesta sotto trazioni uguali agenti secondo le tre direzioni principali di tensione.
- b) È presumibile che la curva intrinseca non incontri l'asse σ_x dalla parte negativa. Numerose esperienze infatti confermano che nessun corpo perviene a rottura sotto una pressione uniforme.
- c) È plausibile che sotto pressioni elevate tutti i materiali assumano uno stato plastico per modo che al crescere di $|\sigma|$ sul piano di scorrimento, la τ tende a diventare costante ed indipendente dal valore della stessa σ . Se ne deduce quindi che la curva intrinseca presenta un asintoto orizzontale e che la sua concavità è rivolta verso l'asse delle ascisse.

In molti casi, nel tratto compreso tra il cerchio Γ' corrispondente alla crisi per trazione semplice e quello Γ'' corrispondente alla crisi per compressione semplice, si può sostituire, alla curva, una coppia di rette (v. Fig. 9.7), come nel criterio di Coulomb.

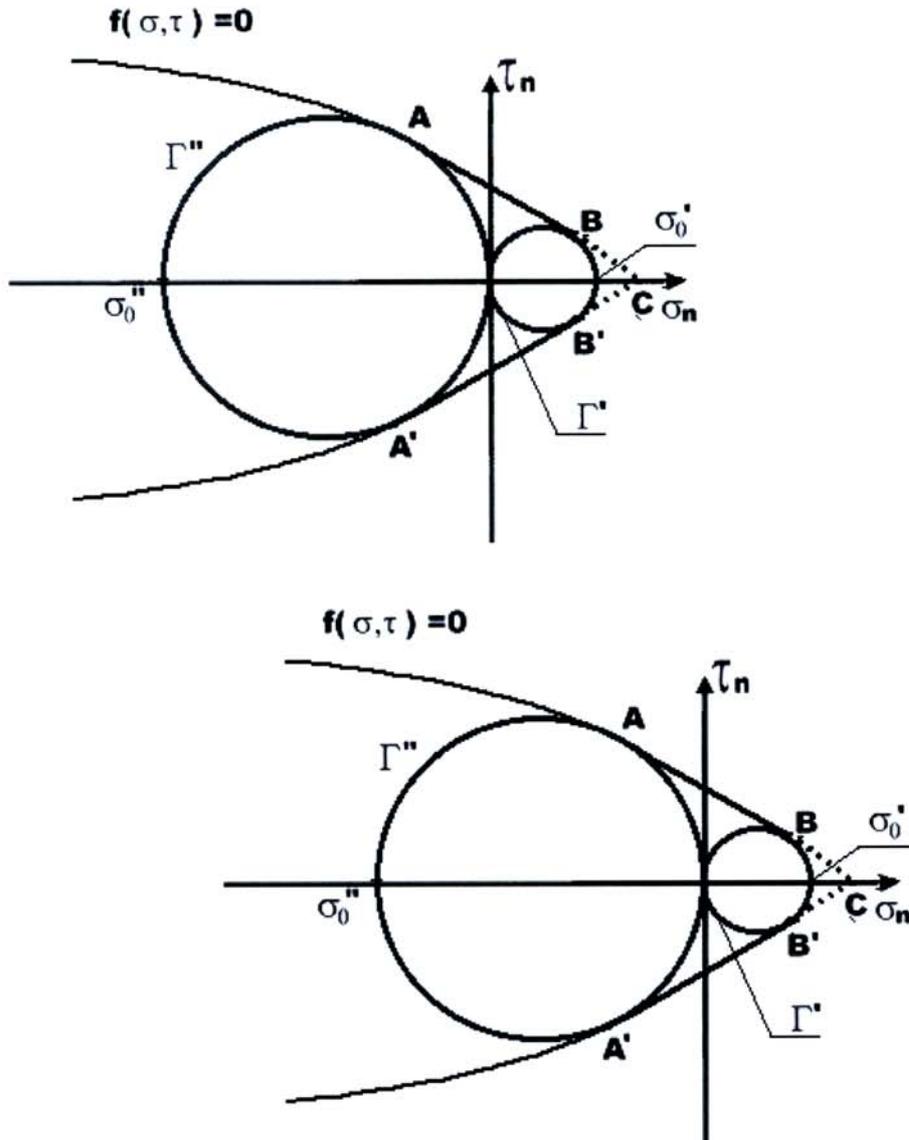


Fig. 9.7. Curva intrinseca di Mohr modificata

Per i materiali duttili, come l'acciaio, la curva intrinseca tende a trasformarsi in due rette parallele all'asse delle ascisse (vedi criterio di Tresca), delimitate dal cerchio di crisi per trazione semplice (v. Fig. 9.8)

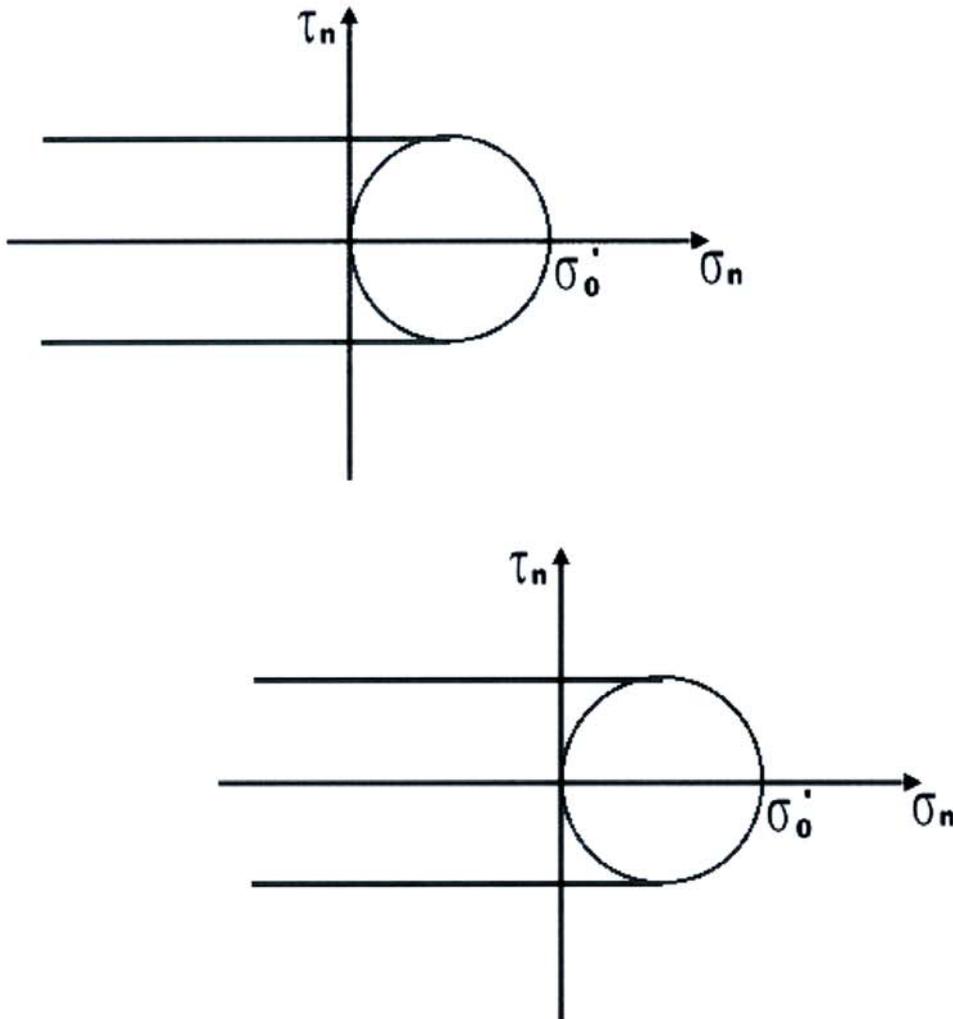


Fig. 9.8. Curva intrinseca di Mohr per materiali duttili

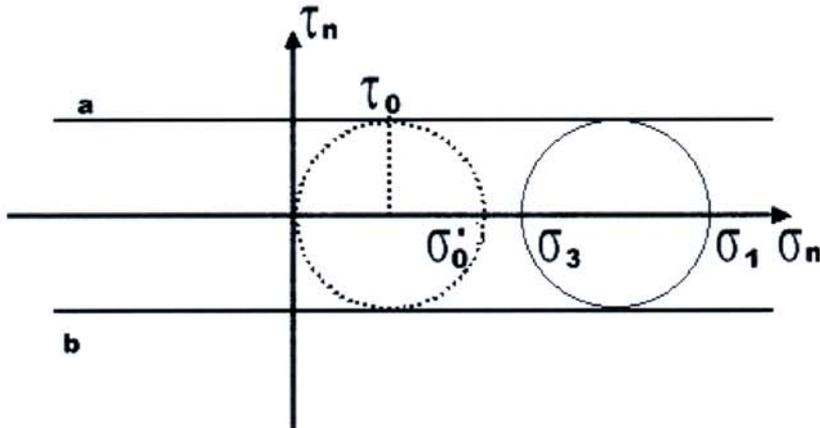
9.3.4. CRITERIO DELLA TENSIONE TANGENZIALE MASSIMA O DI TRESCA

Il criterio della tensione tangenziale massima fu originariamente proposto da Coulomb (1773) e successivamente (1868) da Tresca, a seguito delle sue indagini sperimentali sul flusso di metalli sottoposti ad elevate pressioni. Esso deriva dalla osservazione che, in un materiale duttile, lo scorrimento allo snervamento si manifesta secondo certi piani orientati i quali fanno pensare ad un ruolo rilevante da parte della tensione tangenziale massima. Si può perciò ritenere che il raggiungimento della crisi si manifesti quando la tensione tangenziale massima τ_{\max} raggiunge

un certo valore critico τ_0 :

$$|\tau_{\max}| = \tau_0 \quad (9.24)$$

Se $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ sono le tensioni principali, risulta (v. Fig. 9.9.):



$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad (9.25)$$

mentre il valore della τ_0 viene dedotto applicando il criterio al caso della trazione semplice allo stato di crisi, ossia allo stato di tensione monoassiale:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \sigma'_0 \end{vmatrix} \quad (9.26)$$

da cui si deduce

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma'_0 = \tau'_0 \quad (9.27)$$

Si può poi osservare che, applicando il criterio allo stato di compressione semplice

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \sigma_0'' \end{vmatrix}, \quad (9.28)$$

si perviene a

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_0'' = \tau_0'' . \quad (9.29)$$

Dovendo essere necessariamente unico il valore limite

$$\tau_0 = \tau_0' = \tau_0'' \quad (9.30)$$

dovrà evidentemente risultare

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_0 = \tau_0 . \quad (9.31)$$

dal che segue che il criterio è applicabile solo per quei materiali che presentano un'eguale resistenza a trazione ed a compressione.

La tensione tangenziale di crisi vale:

$$\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2} \sigma_0 \quad (9.32)$$

Dalle (9.24) e (9.25), sempre nel caso $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, si deduce:

$$|\tau_{\max}| = \tau_0$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3),$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2} \sigma_0 \quad (9.33)$$

da cui discende che la tensione ideale σ_{id} assume il valore:

$$\sigma_{id} = (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (9.34)$$

e, più in generale, può essere espressa dalla seguente relazione:

$$\sigma_{id} = (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (9.35)$$

Sul piano di Mohr ne deriva la rappresentazione riportata nella figura. 9.9., riferita al caso $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. La zona di crisi è esterna alle due rette *a* e *b*.

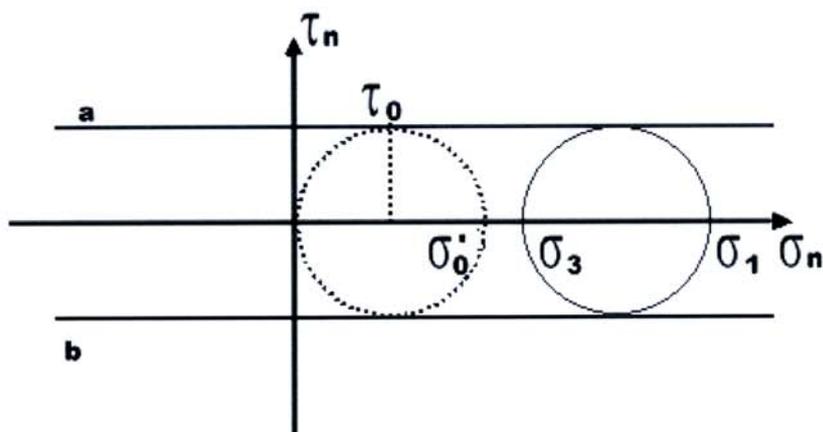
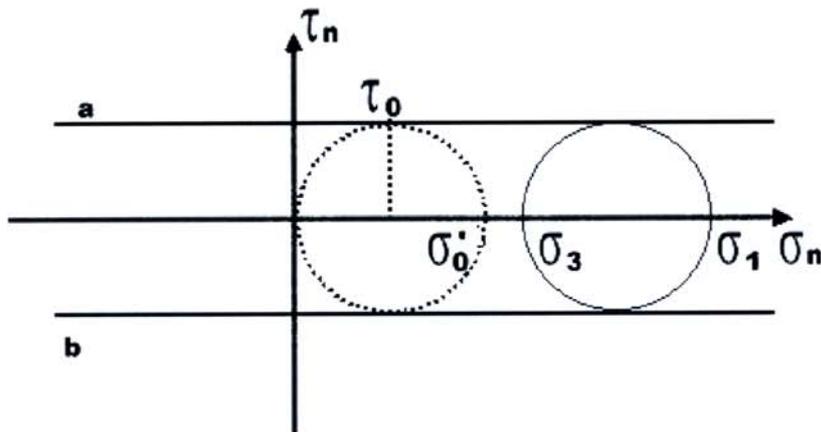


Fig. 9.9. Criterio della tensione tangenziale massima o di Tresca

Osservazioni:

1. Se allo stato di tensione σ_{ij} si aggiunge uno stato di tensione idrostatico (cioè tale che $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) non se ne modifica il raggiungimento della crisi. Infatti tale aggiunta ha il solo effetto di traslare il più grande cerchio lungo l'asse delle ascisse, mentre resta immutato il valore di τ_{max} .
2. Il criterio di Tresca può essere visto come un caso limite di quello di Coulomb quando

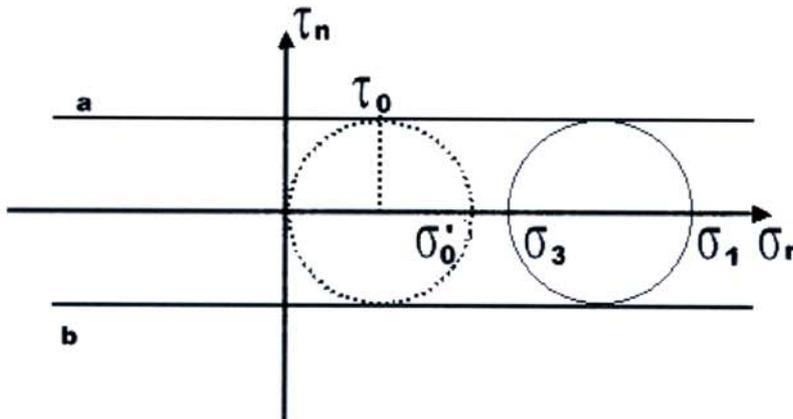
$$c \rightarrow \infty \quad \mu \rightarrow 0$$

In tal caso infatti le rette

$$\tau = \pm \mu(c - \sigma) \tag{9.13}$$

diventano parallele all'asse delle σ_x

1. Qualche perplessità desta il fatto che il criterio (vedi Fig. 9.9) è illimitato dalla parte delle $\sigma_x > 0$, tanto che alcuni propongono una delimitazione con il cerchio Γ_1 della trazione semplice in figura 9.10.



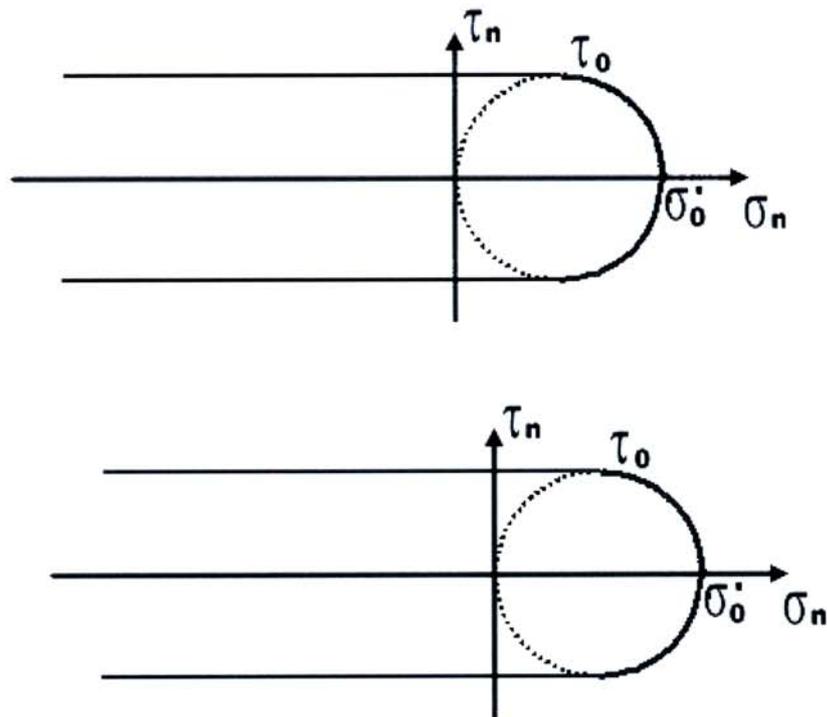


Fig. 9.10. Criterio di Tresca modificato

Il criterio di Tresca ha avuto significative applicazioni nella teoria della plasticità.

9.3.5 CRITERIO DELLA DILATAZIONE MASSIMA E MINIMA O DI GRASHOFF

In base a questo criterio la condizione di crisi in un punto viene fatta risalire al superamento di una certa soglia da parte della dilatazione massima e minima. Sia ε_{ij} il tensore delle deformazioni e siano ε_0' ed ε_0'' le soglie, rispettivamente per allungamenti e per accorciamenti, il criterio si può scrivere nella forma:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_0' \tag{9.36}$$

$$|\varepsilon_{\min}| = \varepsilon_0''$$

Per esprimere in termini di tensioni la condizione di crisi (9.36) occorre fare riferimento ad un modello costitutivo. Se ammettiamo che il materiale sia elastico lineare isotropo e che tale resti fino al raggiungimento della crisi, si può scrivere:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_0'$$

$$|\varepsilon_{\min}| = \varepsilon_0''$$

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

(9.37)

$$\varepsilon_{\min} = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

in cui $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ sono le tensioni principali.

I valori di di soglia ε_0' ed ε_0'' si ottengono applicando il criterio al caso della trazione semplice e delle compressione semplice rispettivamente.

Infatti, con riferimento alla condizione di crisi in trazione semplice (9.26) si ottiene:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \sigma_0' \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{E} \sigma_0' = \varepsilon_0'$$

(9.38)

$$|\varepsilon_{\min}| = \frac{1}{E} \sigma_0'' = \varepsilon_0''$$

Il criterio (9.36) in virtù delle (9.37) e (9.38) diviene:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_0'$$

$$|\varepsilon_{\min}| = \varepsilon_0''$$

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_{\min} = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{E} \sigma'_0 = \varepsilon_0'$$

$$|\varepsilon_{\min}| = \frac{1}{E} \sigma''_0 = \varepsilon_0''$$

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma'_0$$

$$\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma''_0$$

(9.39)

La tensione ideale, sempre nel caso in cui $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, assume i valori:

$$\sigma'_{id} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma''_{id} = |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)|$$

(9.40)

In generale, a seconda di quale delle tre tensioni principali sia quella intermedia, il criterio assume una delle seguenti espressioni:

tensione intermedia σ_1 :

$$\sigma'_{id} = |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)|$$

$$\sigma''_{id} = |\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)|$$

tensione intermedia σ_2 :

$$\sigma'_{id} = |\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)|$$

$$\sigma''_{id} = |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)|$$

tensione intermedia σ_3 :

$$\sigma'_{id} = |\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)|$$

$$\sigma''_{id} = |\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)|$$

Si noti che il criterio sarebbe inaccettabile se limitasse la sola dilatazione massima. Infatti in tal caso, con riferimento allo stato di compressione monoassiale di crisi:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \sigma''_0 \end{vmatrix}, \quad (9.28)$$

($\sigma''_0 < 0$) a cui corrisponde la deformazione

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

in cui

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu \frac{1}{E} \sigma''_0$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \sigma''_0 \quad (9.41)$$

Dovendo limitare la sola dilatazione massima, si porrà la seguente condizione di crisi:

$$|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = \varepsilon_0' = \frac{1}{E} \sigma'_0$$

e, dal confronto con la (9.41), segue

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu \frac{1}{E} \sigma''_0$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \sigma''_0$$

$$\nu \frac{1}{E} \sigma''_0 = \frac{1}{E} \sigma'_0 \Rightarrow \nu \sigma''_0 = \sigma'_0$$

risultato, quest'ultimo, senza alcun riscontro sperimentale. Infatti per molti materiale risulta $\sigma''_0 \approx \sigma'_0$ e, per altri, $|\sigma''_0| < \sigma'_0$.

Il criterio della dilatazione massima e minima è stato adottato per molti anni dalla maggior parte dei regolamenti ufficiali europei.

Nel caso in cui $\sigma'_0 = \sigma''_0 = \sigma_0$, la tensione ideale si può esprimere mediante:

$$\sigma_{id} = \max(|\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)|, |\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)|, |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)|) \quad (9.42)$$

Nel caso di uno stato di tensione tangenziale puro risulta:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \tau & & \\ & 0 & \\ & & -\tau \end{vmatrix}$$

ossia

$$\sigma_1 = \tau \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -\tau$$

e quindi dalla (9.40)

$$\sigma'_{id} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma''_{id} = |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)|$$

$$\sigma'_{id} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 = \tau + \nu\tau$$

da cui

$$\tau = \frac{\sigma'_o}{1+\nu} \equiv \tau_o \quad (9.43)$$

nel caso dell'acciaio ($\nu=0,3$) si ha:

$$\tau_o = 0.77 \cdot \sigma'_o \quad (9.44)$$

9.3.6 Criterio dell'Energia Potenziale Totale o di Beltrami

Secondo Beltrami si raggiunge la crisi in un punto quando la densità di *energia potenziale elastica* raggiunge, in quel punto, una certa soglia. Ricordando che la densità di energia ha l'espressione (5.29) :

$$\hat{\Phi}(\sigma_{ij}) = \Phi(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

$$\hat{\Phi}(\sigma_{ij}) = \Phi(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (9.45)$$

e che, avuto riguardo alle equazioni costitutive del solido lineare, elastico, questa in termini di tensioni diviene

$$\hat{\Phi}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} K_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (9.46)$$

dove K_{ijkl} è il tensore inverso di elasticità, si verifica immediatamente e che nel caso isotropo la (9.46) si riduce all'espressione:

$$\nabla^2 \sigma_{kk} + \frac{1}{1+\nu} I_{\sigma,kk} = - \left(b_{k,k} + b_{k,k} + \frac{\nu}{1-\nu} b_{j,j} \delta_{kk} \right)$$

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{2E} (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I), \quad (9.47)$$

la condizione di crisi si esprime semplicemente mediante:

$$\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_o \quad (9.48)$$

essendo $\hat{\Phi}_0$ il valore di soglia.

Con riferimento alla condizione di crisi in trazione semplice

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \sigma_0' \end{vmatrix} \quad (9.26)$$

la (9.47) si riduce a

$$\nabla^2 \sigma_{kk} + \frac{1}{1+\nu} I_{\sigma,kk} = 0$$

$$\hat{\Phi}_0' = \frac{1}{2E} \sigma_0'^2$$

mentre il riferimento alla condizione di crisi in compressione semplice

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \sigma_0'' \end{vmatrix}, \quad (9.28)$$

implica

$$\hat{\Phi}_0'' = \frac{1}{2E} \sigma_0''^2$$

e, dovendo essere unica la soglia $\hat{\Phi}_0$, si deduce che il criterio di Beltrami è applicabile soltanto a quei materiali aventi egual resistenza a trazione ed a compressione.

Ossia:

$$\sigma_0' = \sigma_0'' = \sigma_0; \quad \hat{\Phi}_0 = \frac{1}{2E} \sigma_0^2 \quad (9.49)$$

In tal caso la condizione di crisi (9.48) diviene:

$$U\{\varepsilon_{ij}\} = \int_V \Phi[\varepsilon_{ij}] dV = \int_V \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV$$

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{2E} (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I) = \frac{1}{2E} \sigma_0^2 \quad (9.50)$$

da cui si deduce la seguente espressione della tensione ideale:

$$\sigma_{id} = \sqrt{2E\hat{\Phi}} \quad (9.51)$$

ossia:

$$\sigma_{id} = \sqrt{(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - 2\nu(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I)} \quad (9.52)$$

Nel caso di uno stato di tensione tangenziale puro :

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \tau & & \\ & 0 & \\ & & -\tau \end{vmatrix}$$

ossia

$$\sigma_1 = \tau \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -\tau$$

la (9.52) fornisce:

$$\sigma_{id} = \sqrt{(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - 2\nu(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I)}$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{2(1+\nu)} \cdot \tau$$

e questa, in condizione di crisi, si riduce a

$$\sigma_{id} = \sqrt{2(1+\nu)} \cdot \tau_0 = \sigma_0$$

da cui discende:

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2(1+\nu)}} \quad (9.53)$$

e, nel caso dell'acciaio ($\nu = 0,3$) si ha:

$$\tau_p = 0.62 \cdot \sigma_p \quad (9.54)$$

9.3.7 Criterio della massima energia distortrice o di Mises

Sulla strada indicata da Beltrami (1885), dapprima M. T. Huber (1904) quindi R. von Mises (1913), dal quale il criterio ha preso successivamente il nome, ed infine H. Hencky (1925) proposero, soprattutto sulla base delle esperienze condotte da Huber, di fare riferimento non alla energia potenziale totale, ma piuttosto a quella distortrice. Tale proposta nasceva dall'esigenza di tener conto della indifferenza, per quanto riguarda il raggiungimento del limite di elasticità, rispetto a stati di tensione idrostatici di compressione. Le esperienze di Huber avevano dimostrato che non si perveniva alla plasticizzazione dei metalli sotto stati di tensione idrostatici di compressione comunque elevati.

Partendo dalla (9.45)

$$\hat{\Phi}(\sigma_{ij}) = \Phi(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

$$\hat{\Phi}(\sigma_{ij}) = \Phi(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (9.45)$$

e scomponendo entrambi i tensori σ_{ij} ed ε_{ij} additivamente nelle parti sferica e deviatorica (v. paragrafo 3.10):

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + s_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_m \delta_{ij} + \eta_{ij}$$

si può dare alla Φ la seguente forma:

$$\Phi(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_m \delta_{ij} + s_{ij}) (\varepsilon_m \delta_{ij} + \eta_{ij}) = \frac{1}{2} s_{ij} \eta_{ij} + \frac{3}{2} \sigma_m \varepsilon_m \quad (9.55)$$

dalla quale si riconosce che il primo termine

$$\Phi_d = \frac{1}{2} s_{ij} \eta_{ij} \quad (9.56)$$

corrisponde all'energia distortente, associata quindi alla variazione di forma del solido, mentre il secondo

$$\Phi_m = \frac{3}{2} \sigma_m \varepsilon_m \quad (9.57)$$

è riferibile alla energia associata alla variazione di volume del solido.

Ritenendo ininfluenza la parte idrostatica del tensore σ_{ij} sul raggiungimento della plasticizzazione, si può affermare che si ha la crisi quando la sola energia distortente (9.56) attinge una certa soglia:

$$\Phi_d = \frac{1}{2} s_{ij} \eta_{ij}$$

$$\Phi_d = \Phi_d^0 \quad (9.58)$$

Naturalmente questa ipotesi presuppone, analogamente a quanto visto con il criterio di Beltrami, che il materiale abbia ugual resistenza (ovvero limite di elasticità) a trazione ed a compressione ($\sigma_0' = \sigma_0'' = \sigma_0$).

Nel caso di solido elastico, lineare, isotropo, la Φ_d , espressa in termini di tensioni, vale:

$$\Phi_d = \frac{1}{2} s_{ij} \frac{s_{ij}}{2G} = \frac{1}{4G} s_{ij} s_{ij} \quad (9.59)$$

mentre, con procedimento ormai noto, l'applicazione del criterio al caso monoassiale, opportunamente scomposto nella parte sferica ed in quella deviatorica:

$$\begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \sigma_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_0/3 & & \\ & \sigma_0/3 & \\ & & \sigma_0/3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\sigma_0/3 & & \\ & -\sigma_0/3 & \\ & & 2\sigma_0/3 \end{vmatrix} \quad (9.60)$$

consente di valutare la soglia Φ_d^0 . Infatti è facile vedere che in tal caso risulta:

$$\Phi_d^0 = \frac{1}{4G} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \right) \sigma_0^2 = \frac{1}{4G} \frac{2}{3} \sigma_0^2 \quad (9.61)$$

E questa, introdotta nella (9.58), avuto riguardo alla (9.59), fornisce:

$$\Phi_d = \Phi_d^o.$$

$$\Phi_d = \frac{1}{2} s_{ij} \frac{s_{ij}}{2G} = \frac{1}{4G} s_{ij} s_{ij}$$

$$\frac{1}{4G} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{4G} \frac{2}{3} \sigma_0^2 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} = \sigma_0^2 \quad (9.62)$$

da cui è immediata l'espressione della tensione ideale:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\frac{2}{3} s_{ij} s_{ij}} \quad (9.63)$$

Si noti che :

- l'ipotesi (9.58) che il raggiungimento del limite di elasticità non è influenzato dalla parte idrostatica del tensore σ_{ij} , mentre è da ritenersi valida per le compressioni idrostatiche non lo è altrettanto per le trazioni idrostatiche. In questo senso il criterio di Mises non è del tutto giustificato.

$$\Phi_d = \Phi_d^o.$$

Huber proponeva di adottare la (9.58) quando :

$$\sigma_m > 0$$

ossia quando la deformazione implica una diminuzione di volume.

- l'espressione della σ_{id} (9.63) non dipende dalle costanti elastiche. Questo risultato rende in un certo senso indipendente il criterio dall'ipotesi costitutiva adottata.

$$\sigma_{id} = \sqrt{\frac{2}{3} s_{ij} s_{ij}}$$

Quest'ultima osservazione ha spinto gli studiosi alla ricerca di altre interpretazioni del criterio di Mises, che pure ha il pregio di avere un forte significato fisico in quanto lega il raggiungimento della crisi al superamento di una certa soglia per l'energia accumulata dal solido.

Una forma alternativa del criterio di Mises, strettamente legata all'ipotesi di ritenere ininfluenza la parte idrostatica del tensore σ_{ij} sul raggiungimento della plasticizzazione, consiste nell'attribuire la crisi al raggiungimento di una certa soglia da parte dell'invariante secondo del deviatore s_{ij} :

$$J_2 + k^2 = 0 \quad (9.64)$$

essendo (vedi punto 3.10)

$$J_2 = -\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$$

e k una costante che, come al solito, viene determinata applicando la (9.64) al caso monoassiale.

$$J_2 + k^2 = 0$$

Si può osservare che questa ipotesi, meno significativa sul piano fisico, è del tutto svincolata da modelli costitutivi.

Con riferimento alla scomposizione (9.60), la (9.64) diviene:

$$J_2 + k^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \sigma_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_0/3 & & \\ & \sigma_0/3 & \\ & & \sigma_0/3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\sigma_0/3 & & \\ & -\sigma_0/3 & \\ & & 2\sigma_0/3 \end{vmatrix}$$

$$J_2 + k^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \right) \sigma_0^2 + k^2 = -\frac{1}{3} \sigma_0^2 + k^2 = 0$$

da cui si deduce

$$k^2 = \frac{1}{3} \sigma_0^2$$

e quindi il criterio assume la forma:

$$J_2 + \frac{1}{3} \sigma_0^2 = 0 \rightarrow 3J_2 = \sigma_0^2$$

che dà luogo alla seguente espressione per la tensione ideale

$$\sigma_{id} = \sqrt{-3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (9.65)$$

coincidente con la (9.63).

$$\sigma_{id} = \sqrt{\frac{2}{3} s_{ij} s_{ij}}$$

È facile provare che in termini di tensioni principali la σ_{id} è data da

$$\begin{aligned} \sigma_{id} &= \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2 + 2s_{23}^2 + 2s_{31}^2)} = \\ \sigma_{id} &= \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2 + 2s_{23}^2 + 2s_{31}^2)} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} \left[\frac{2}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1) \right]} \\ &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1} \end{aligned} \tag{9.66}$$

La (9.66) suggerisce un'ulteriore forma alternativa al criterio di Mises. Infatti è facile provare che la tensione tangenziale ottaedrale τ_{ott} ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{id} &= \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2 + 2s_{23}^2 + 2s_{31}^2)} = \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2} [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2]} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2} \left[\frac{2}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1) \right]} \\
 &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1} \\
 \tau_{ott} &= \sqrt{\frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2]} \quad (9.67)
 \end{aligned}$$

Questa suggerisce di enunciare il criterio dicendo che si raggiunge la crisi quando la tensione tangenziale ottaedrale (9.67) raggiunge una certa soglia

$$\begin{aligned}
 \tau_{ott} &= \sqrt{\frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2]} \\
 \tau_{ott} &= \tau_{ott}^0 \quad (9.68)
 \end{aligned}$$

valutabile, con procedimento ormai noto, con riferimento allo stato di tensione monoassiale σ_0 . In tal modo risulta infatti:

$$\tau_{ott} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_0.$$

che dà luogo alla seguente espressione per la σ_{id} è

$$\sigma_{id} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{ott} \quad (9.69)$$

che, come è facile provare, coincide con quelle già trovate.

Al criterio di Mises nella forma (9.68) si può dare un'interessante giustificazione fisica. Intanto ricordiamo che, assegnato il tensore

$$\tau_{\sigma\tau} = \tau_{\sigma\tau}^0$$

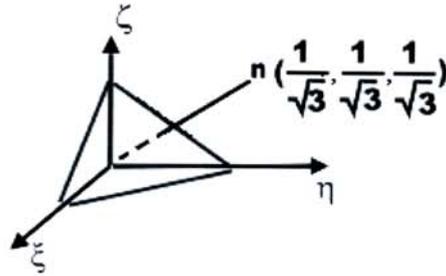


Fig. 9.11 - Piano ottaedrale

avente come direzioni principali gli assi ξ , η , ζ , la tensione normale sul piano ottaedrale, ossia sul piano avente coseni direttori uguali rispetto agli assi ξ , η , ζ , vale:

$$\sigma_{\sigma\tau} = \sigma_{ij} \alpha_i \alpha_j = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m \quad (9.70)$$

mentre la $\tau_{\sigma\tau}$ ha l'espressione (9.67).

$$\tau_{\sigma\tau} = \sqrt{\frac{1}{3}[(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2]}$$

Dal momento che la parte idrostatica di σ_{ij} , ossia, in virtù della (9.70), la $\sigma_{\sigma\tau}$ non influisce sul raggiungimento della crisi, è logico ricercare il piano in cui questa $\sigma_{\sigma\tau}$ si presenta come tensione normale ed attribuire quindi alla componente tangenziale sul medesimo piano il raggiungimento della crisi. Rispetto al criterio della τ_{\max} di Tresca si osserva che pur essendo la $\tau_{\sigma\tau}$ più piccola (di poco) della τ_{\max} , tuttavia essa si verifica su quattro elementi piani, mentre la τ_{\max} solo su due. Di conseguenza la $\tau_{\sigma\tau}$ ha una maggiore probabilità di interessare piani cristallini che sono orientati favorevolmente allo scorrimento e questa circostanza può compensare il fatto di essere di poco più piccola della τ_{\max} .

$$\sigma_{\sigma\tau} = \sigma_{ij} \alpha_i \alpha_j = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m$$

Il criterio, applicato al caso di uno stato di tensione tangenziale puro:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \tau & & \\ & 0 & \\ & & -\tau \end{vmatrix}$$

ossia per

$$\sigma_1 = \tau \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -\tau$$

fornisce (9.66) il seguente valore per la tensione ideale:

$$\begin{aligned} \sigma_{id} &= \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2 + 2s_{23}^2 + 2s_{31}^2)} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} \left[\frac{2}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) \right]} \\ &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \end{aligned}$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{3} \cdot \tau$$

e quindi al limite

$$\sigma_{id} = \sqrt{3} \cdot \tau_o = \sigma_o$$

da cui

$$\tau_o = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} = 0.58 \sigma_o \quad (9.71)$$

9. CRITERI DI RESISTENZA E SICUREZZA

9.4 CONFRONTO ED APPLICAZIONI DEI VARI CRITERI

Abbiamo finora esaminato diversi criteri ciascuno dei quali coglie aspetti particolari del complesso fenomeno del raggiungimento del limite di elasticità o della plasticizzazione ovvero della rottura in un punto di un dato materiale soggetto ad uno stato di tensione pluriassiale. Può essere ora utile effettuare un confronto che, per semplicità, riferiremo ad un materiale avente uguale resistenza a trazione ed a compressione, limitandone l'applicazione al caso di uno stato di tensione biassiale. Escluderemo altresì dal confronto il criterio di Coulomb e quello della curva intrinseca di Mohr.

Intanto nei precedenti punti abbiamo trovato per le seguenti espressioni delle tensioni ideali :

Criterio della massima tensione normale:

$$\sigma_{id} = \max (|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \quad (9.72)$$

Criterio di Tresca:

$$\sigma_{id} = \max (|\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_1|) \quad (9.73)$$

Criterio della dilatazione massima e minima:

$$\sigma_{id} = \max (|\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)|, |\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)|, |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)|) \quad (9.74)$$

Criterio di Beltrami:

$$\sigma_{id} = \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \quad (9.75)$$

Criterio di Mises:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \quad (9.76)$$

Assumendo $\sigma'_0 = \sigma''_0 = \sigma_0$ e riducendoci al caso biassiale ponendo $\sigma_3 = 0$, le precedenti espressioni si semplificano nel seguente modo:

- *Criterio della massima tensione normale :*

$$\sigma_{id} = \max (|\sigma_1|, |\sigma_2|) \quad (9.77)$$

- *Criterio di Tresca:*

$$\sigma_{id} = \max (|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) \quad (9.78)$$

- *Criterio dilatazione massima e minima:*

$$\sigma_{id} = \max (|\sigma_1 - \nu\sigma_2|, |\sigma_2 - \nu\sigma_1|, |\nu(\sigma_1 + \sigma_2)|) \quad (9.79)$$

- *Criterio di Beltrami:*

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2} \quad (9.80)$$

- *Criterio di Mises:*

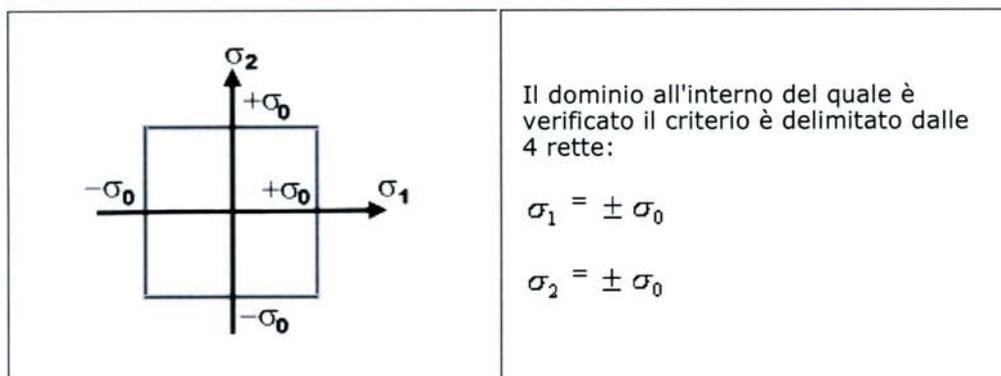
$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \quad (9.81)$$

dove la condizione di crisi è data, per tutti i criteri, da:

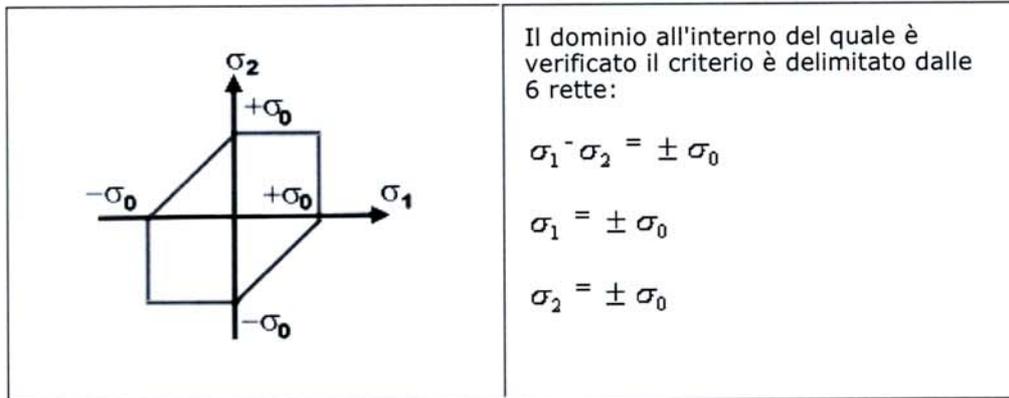
$$\sigma_{id} = \sigma_0 \quad (9.82)$$

Ne derivano le seguenti rappresentazioni nel piano delle tensioni (σ_1, σ_2):

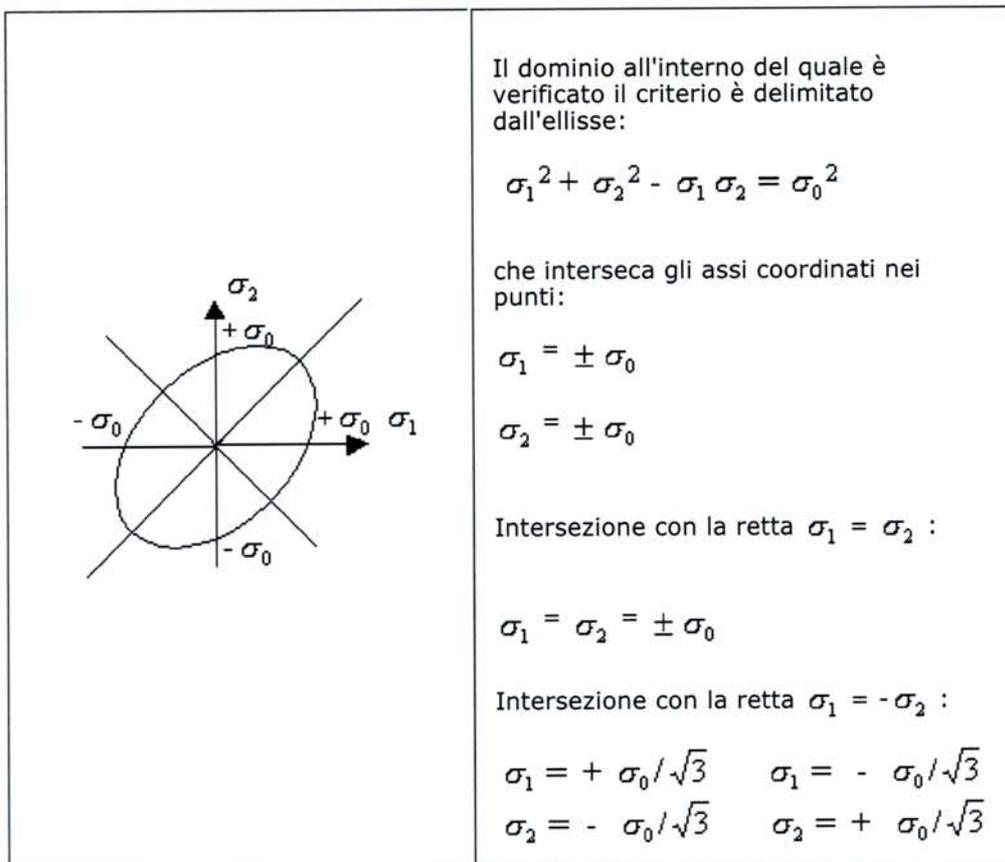
Criterio della massima tensione normale: σ_0



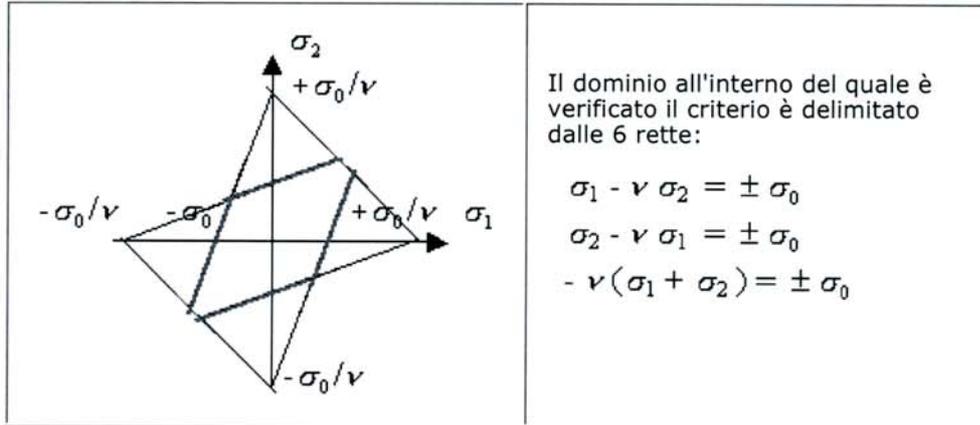
Criterio di Tresca:



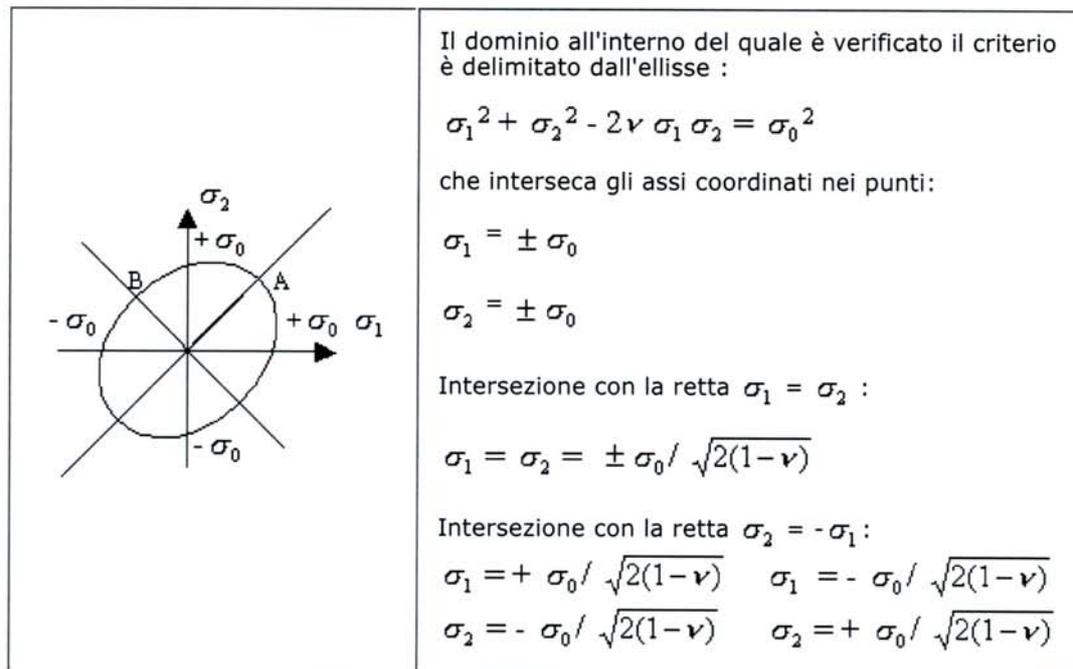
Criterio di Mises:



Criterio dilatazione massima e minima



Criterio di Beltrami:



Con riferimento ad uno stato di tensione corrispondente alla trave di Saint Venant (si pensi per es. al caso della flessione e taglio), e ad un opportuno riferimento, ossia con riferimento al tensore

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma_x \end{vmatrix}$$

ed alle tensioni principali corrispondenti:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} \sigma_x + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} \sigma_x - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \end{aligned} \quad (9.83)$$

è facile provare, alla luce delle espressioni da (9.72) a (9.76), che si perviene ai risultati qui di seguito riportati.

$$\sigma_{id} = \max (|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|)$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}$$

Criterio della massima tensione normale:

$$\sigma_{id} = \left| \frac{1}{2} \sigma_x \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \right| \quad (9.84)$$

Criterio di Tresca:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \quad (9.85)$$

Criterio della dilatazione massima e minima:

$$\sigma_{id} = \left| \frac{1-\nu}{2} \sigma_x \pm \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \right| \quad (9.86)$$

Nel caso dell'acciaio ($\nu = 0,3$). La (9.86) fornisce

$$\sigma_{id} = \left| \frac{1-\nu}{2} \sigma_x \pm \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \right|$$

$$\sigma_{id} = |0,35 \sigma_x \pm 0,65 \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}| \quad (9.87)$$

Criterio di Beltrami:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + 2(1+\nu)\tau^2} \quad (9.88)$$

Nel caso dell'acciaio ($\nu = 0,3$). La (9.86) fornisce

$$\sigma_{id} = \left| \frac{1-\nu}{2} \sigma_x \pm \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \right|$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + 2,6\tau^2} \quad (9.89)$$

Criterio di Mises:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} \quad (9.90)$$

E' immediato rilevare che il criterio di Tresca è il più cautelativo in quanto implica la σ_{id} più grande.