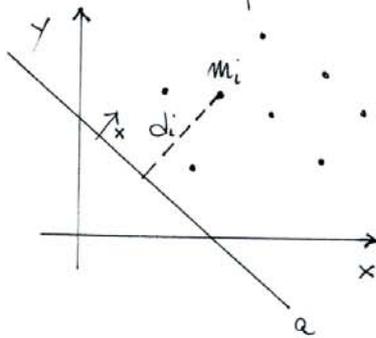


Esercitazione del 29/10/07

Richiami di geometria delle masse - Calcolo di baricentro e inerzia di una sezione a cassone

La conoscenza dei principali concetti di geometria delle masse risulta fondamentale nell'ambito dell'analisi dello stato di sollecitazione e deformazione di un elemento strutturale variamente caricato. In particolare la valutazione dei momenti statici, dei momenti d'inerzia rispetto ad un asse o ad un punto (inerzia polare) sono requisito imprescindibile per qualsiasi computazione legata alla statica delle costruzioni.

Partiamo, dunque, con la definizione di momento statico. In prima battuta si consideri un sistema di



masse puntiformi la cui posizione è descritta mediante un

generico sistema di riferimento "x-y". Si definisce momento

statico della distribuzione di

massa rispetto ad un generico asse "a" la somma dei prodotti tra la singola massa e la sua distanza dall'asse, presa positiva se essa si trova in un fissato semipiano generato da "a":

$$S_a = \sum_i m_i d_i$$

(1)

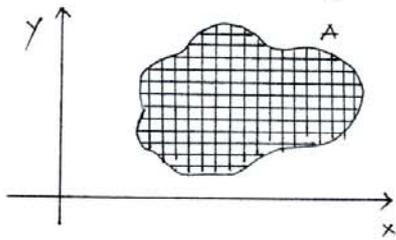
Assegnato un sistema di riferimento è possibile analogamente definire i momenti statici rispetto ai due assi del sistema:

$$S_x = \sum_i m_i d_{x,i} ; S_y = \sum_i m_i d_{y,i}$$

Ora se si sceglie di considerare $d_{x,i}$ positiva quando la massa si trova nel semipiano delle "y" positive, e $d_{y,i}$ positiva nel caso di coordinata "x" positiva, le due definizioni di cui sopra diventano:

$$S_x = \sum_i m_i y_i ; S_y = \sum_i m_i x_i$$

Si consideri ora di avere una distribuzione continua di massa in una fissata regione di piano, A. Per descrivere tale distribuzione si definisce una funzione detta "densità di massa areale":



una funzione detta "densità di massa areale":

$$\rho = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta A} = \frac{dm}{dA}$$

che chiaramente dipende dalle coordinate x e y dell'elementino ΔA di area considerato. Tale funzione rappresenta la "massa specifica" nella regione A al variare del punto scelto in tale regione. Ora, volendo valutare il momento statico di tale distribuzione, l'idea è quella di rifarsi al caso di masse puntiformi, si divide, allora, la regione A in infinite parti infinitesime dA , la cui massa associata sarà

$$dm = \rho dA \quad \text{e si calcola il momento statico ricordando che l'operazione di somma}$$

(2)

effettuata su infiniti termini infinitesimi equivale alla nozione di integrale. Si ottiene così:

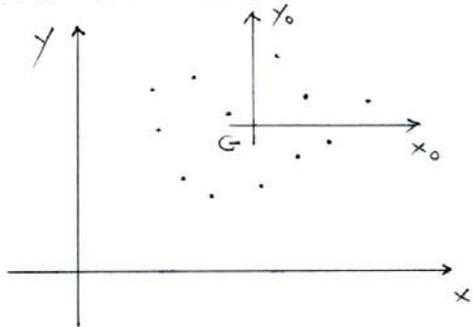
$$S_x = \int_A y \rho dA \quad S_y = \int_A x \rho dA$$

\searrow
 dm

Tali relazioni nel caso di massa distribuita uniformemente si scrivono:

$$S_x = \rho \int_A y dA \quad ; \quad S_y = \rho \int_A x dA$$

Quali informazioni forniscono i momenti statici di una distribuzione di massa? Essi, fissato un sistema di riferimento, ci dicono in termini globali come è distribuita la massa del sistema rispetto agli assi coordinati. Se, per esempio, si ha $S_x > 0$ vuol dire che la "maggior parte" della massa è disposta nel semipiano positivo delle "y", se $S_x < 0$ nel semipiano negativo. Ha dunque senso chiedersi se esista un punto del piano in cui



risulti $S_x = 0$ e $S_y = 0$, in base alle considerazioni svolte, infatti, quello sarebbe il punto in cui idealmente potrebbe pensarsi concentrata l'intera massa del sistema.

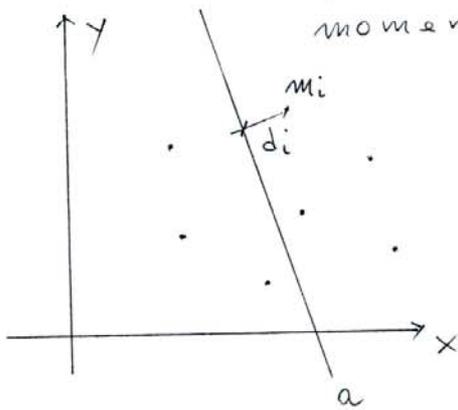
Un siffatto punto viene definito con il termine di "baricentro delle masse" e la sua posizione $G = (x_G, y_G)$ rispetto ad un sistema cartesiano generico può essere valutata attraverso le relazioni:

$$y_G = \frac{S_x}{M} ; \quad x_G = \frac{S_y}{M} ; \quad \text{ovvero per una distribuzione continua di massa :}$$

$$y_G = \frac{\int_A \rho y dA}{\int_A \rho dA} ; \quad x_G = \frac{\int_A \rho x dA}{\int_A \rho dA} \quad \text{nel caso particolare di } \rho = \text{cost.}$$

$$y_G = \frac{\int_A y dA}{A} ; \quad x_G = \frac{\int_A x dA}{A} \quad \text{dove i termini al numeratore possono definirsi momenti statici di area.}$$

Chiarito il concetto di momento statico e di baricentro, altra idea di notevole rilevanza nell'ambito della statica degli elementi strutturali è quello di momento d'inerzia. Data una qualsiasi



distribuzione di massa, che per semplicità considereremo puntiforme, ed un sistema di riferimento piano Oxy è possibile definire il momento d'inerzia rispetto ad un asse "a" come:

$$I_a = \sum_i m_i d_i^2, \quad \text{si noti che il segno di "d_i" è inessenziale.}$$

Con riferimento al sistema cartesiano possono così definirsi:

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2 ; I_y = \sum_i m_i x_i^2$$

Data una qualsiasi coppia di assi è possibile definire anche un momento d'inerzia misto detto "centrifugo" e pari a:

$$I_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i$$

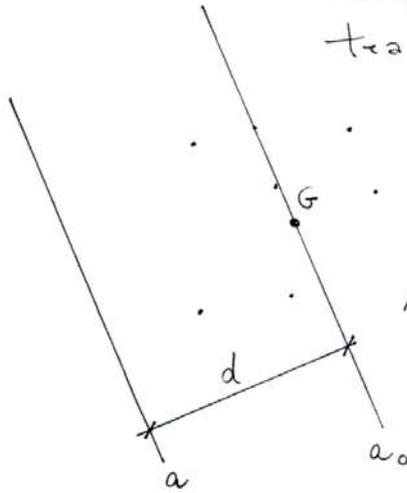
Con riferimento ad una distribuzione continua di massa, tali espressioni si scrivono:

$$I_x = \int_A \rho y^2 dA ; I_y = \int_A \rho x^2 dA ; I_{xy} = \int_A \rho xy dA$$

Si ricorda, prima di passare all'applicazione numerica, che valgono le seguenti affermazioni:

- il calcolo del momento statico di una distribuzione di massa rispetto ad un asse può calcolarsi facendo il prodotto tra la sua massa e la distanza del suo baricentro da tale asse
- Se una distribuzione di massa presenta un asse di simmetria, il baricentro è situato lungo tale asse
- Riguardo i momenti d'inerzia vale un teorema detto "del trasporto" o di Huyghens-Steiner, il quale dice che l'inerzia di una distribuzione di massa rispetto ad un asse non baricentrico è pari alla somma tra l'inerzia rispetto ad un asse parallelo a quello assegnato e passante per il

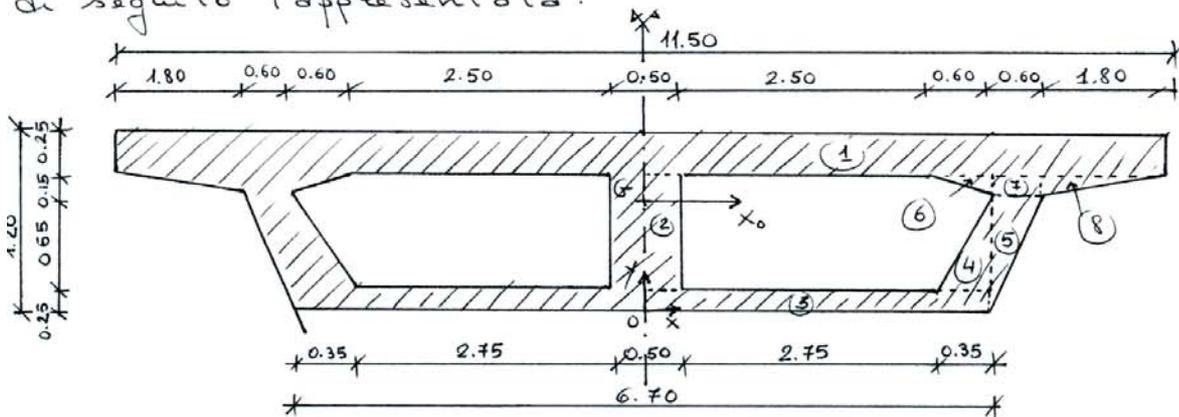
baricentrico e il prodotto tra la massa complessiva del sistema per la distanza tra i due assi paralleli



$$I_a = I_{a_0} + M \cdot d^2$$

Infine si precisa che nell'applicazione a svolgessi, come nella maggior parte delle applicazioni reali, si considererà densità di massa costante e si ragionerà in termini di area, invece che in termini di massa.

Si consideri, a questo punto, la sezione "a cassone" di seguito rappresentata:



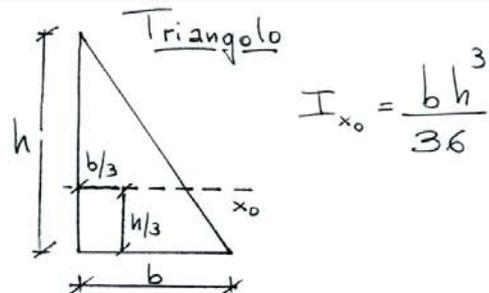
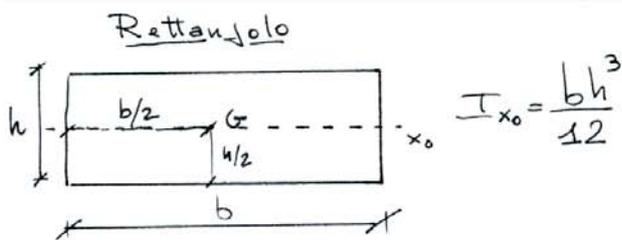
Di tale sezione si intende valutare la posizione del baricentro e l'inerzia rispetto all'asse orizzontale baricentrico. Alcune osservazioni a valle dei calcoli possono rendere quest'ultimi più snelli ed efficaci.

Nello specifico la sezione in esame presenta un asse di simmetria verticale, per cui il baricentro si troverà sicuramente lungo tale asse.

Si dispone così un sistema di riferimento avente l'asse y coincidente con l'asse di simmetria e quello "x" orizzontale, con origine sul lato inferiore della sezione; risulta così: $x_G = 0$ e resta da valutare $y_G = \frac{S_x}{A}$

Essendo la sezione simmetrica rispetto all'asse y , nella espressione per calcolare y_G si può fare riferimento alla sola parte di sezione a destra (o sinistra) dell'asse di simmetria. In tal caso, infatti, si calcolerà un momento statico che è la metà di quello complessivo, che sarà diviso, tuttavia, per un'area che è anch'essa la metà del totale, il che lascia il risultato finale immutato.

Scelto di voler operare sulla parte "destra" della sezione, il modo migliore per eseguire i calcoli è quello di provare a dividere la sezione in porzioni aventi forma geometrica semplice. Nel caso in esame si è divisa la metà sezione in 8 parti, di cui 4 rettangolari (parti 4,2,3,7) e 4 triangolari (parti 4,5,6,8), sia per il rettangolo che per il triangolo, infatti, sono note le proprietà geometriche utili agli sviluppi da compiere:



(7)

Possiamo ora passare al calcolo dei momenti statici rispetto all'asse "x" e delle aree, per ognuna delle 8 porzioni individuate

$$A_1 = \frac{11.50}{2} \cdot 0.25 = 1.4375 \text{ m}^2, \quad S_{x,1} = 1.4375 \cdot \left(1.20 - \frac{0.25}{2}\right) = 1.5453 \text{ m}^3$$

$$A_2 = \frac{0.50}{2} \cdot 0.70 = 0.175 \text{ m}^2, \quad S_{x,2} = 0.175 \cdot \left(0.25 + \frac{0.70}{2}\right) = 0.105 \text{ m}^3$$

$$A_3 = \frac{6.70}{2} \cdot 0.25 = 0.8375 \text{ m}^2, \quad S_{x,3} = 0.8375 \cdot \frac{0.25}{2} = 0.1047 \text{ m}^3$$

$$A_4 = \frac{0.35 \cdot 0.55}{2} = 0.0962 \text{ m}^2, \quad S_{x,4} = 0.0962 \cdot \left(\frac{0.55}{3} + 0.25\right) = 0.0417 \text{ m}^3$$

$$A_5 = \frac{0.60 \cdot 0.80}{2} = 0.24 \text{ m}^2, \quad S_{x,5} = 0.24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.80 = 0.128 \text{ m}^3$$

$$A_6 = \frac{0.60 \cdot 0.15}{2} = 0.045 \text{ m}^2, \quad S_{x,6} = 0.045 \cdot \left(0.80 + \frac{2}{3} \cdot 0.15\right) = 0.0045 \text{ m}^3$$

$$A_7 = 0.60 \cdot 0.15 = 0.09 \text{ m}^2, \quad S_{x,7} = 0.09 \cdot \left(0.80 + \frac{0.15}{2}\right) = 0.0787 \text{ m}^3$$

$$A_8 = \frac{1.80 \cdot 0.15}{2} = 0.135 \text{ m}^2, \quad S_{x,8} = 0.135 \cdot \left(0.80 + \frac{2}{3} \cdot 0.15\right) = 0.1215 \text{ m}^3$$

$$A_{\text{tot}} = 3.0562 \text{ m}^2 \quad S_{x,\text{tot}} = 2.1294 \text{ m}^3$$

da cui:
$$y_G = \frac{S_{x,\text{tot}}}{A_{\text{tot}}} = \frac{2.1294 \text{ m}^3}{3.0562 \text{ m}^2} = 0.6967 \text{ m}$$

Tale risultato appare fisicamente plausibile, essendo l'altezza complessiva pari ad 1,20 m e dovendo il baricentro trovarsi spostato nella parte superiore per via della

8

maggiore quantità di massa che in tale parte si trova. Situato un asse orizzontale "x₀" passante per il baricentro si procede al calcolo dell'inerzia rispetto a tale asse

$$I_{x_0}^{(1)} = \frac{11.50}{2} \cdot \frac{(0.25)^3}{12} + \frac{11.50}{2} \cdot 0.25 \cdot (1.20 - 0.6967 - 0.125)^2 =$$

$$= 0.0075 + 0.2057 = \underline{0.2132} \text{ m}^4$$

$$I_{x_0}^{(2)} = \frac{0.25 \cdot (0.70)^3}{12} + 0.25 \cdot 0.70 \cdot (0.6967 - 0.60)^2 =$$

$$= 0.0071 + 0.0016 = \underline{0.0087} \text{ m}^4$$

$$I_{x_0}^{(3)} = \frac{6.70}{2} \cdot \frac{(0.25)^3}{12} + \frac{6.70}{2} \cdot 0.25 \cdot (0.6967 - 0.125)^2 =$$

$$= 0.0044 + 0.2737 = \underline{0.2781} \text{ m}^4$$

$$I_{x_0}^{(4)} = \frac{0.35 \cdot (0.55)^3}{36} + \frac{0.35 \cdot 0.55}{2} \cdot \left(0.6967 - 0.25 - \frac{0.55}{3}\right)^2 =$$

$$= 0.0016 + 0.0067 = \underline{0.0083} \text{ m}^4$$

$$I_{x_0}^{(5)} = \frac{0.60 \cdot (0.80)^3}{36} + \frac{0.60 \cdot 0.80}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 0.80 + 0.6967\right)^2 =$$

$$= 0.0085 + 0.0064 = \underline{0.0149} \text{ m}^4$$

$$I_{x_0}^{(6)} = \frac{0.60 \cdot (0.15)^3}{36} + \frac{0.60 \cdot 0.15}{2} \cdot \left(0.80 + \frac{2}{3} \cdot 0.15 - 0.6967\right)^2 =$$

$$= 0.0001 + 0.0019 = \underline{0.0020} \text{ m}^4$$

(9)

$$I_{x_0}^{(7)} = \frac{0.60 \cdot (0.15)^3}{12} + 0.60 \cdot 0.15 \cdot \left(0.80 + \frac{0.15}{2} - 0.6967\right)^2 =$$

$$= 0.0002 + 0.0029 = \underline{0.0031 \text{ m}^4}$$

$$I_{x_0}^{(8)} = \frac{1.80 \cdot (0.15)^3}{36} + \frac{1.80 \cdot 0.15}{2} \cdot \left(0.80 + \frac{2}{3} \cdot 0.15 - 0.6967\right)^2 =$$

$$= 0.0002 + 0.0056 = \underline{0.0058 \text{ m}^4}$$

$$I_{x_0, \text{tot}} = 0.5341 \text{ m}^4 = \boxed{53,41 \cdot 10^6 \text{ cm}^4}$$

Per esercizio si calcoli l'inerzia della sezione a cassone rispetto all'asse orizzontale "x" coincidente con il lato inferiore della sezione, nonché rispetto all'asse "y" di simmetria della stessa.