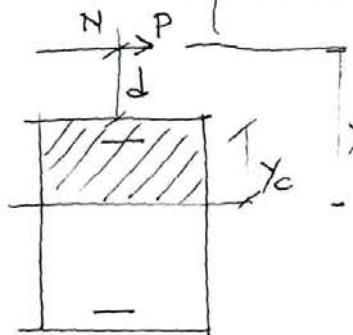


Pressoflessione in sezioni circolari (teoria del 17/11)

Le equazioni di equilibrio alla traslazione, alla rotazione



intorno all'asse neutro incognito
e all'asse di sollecitazione parante
per P , conducono come fia'
visto a:

$$\frac{\sigma_c}{Y_c} S_n = N$$

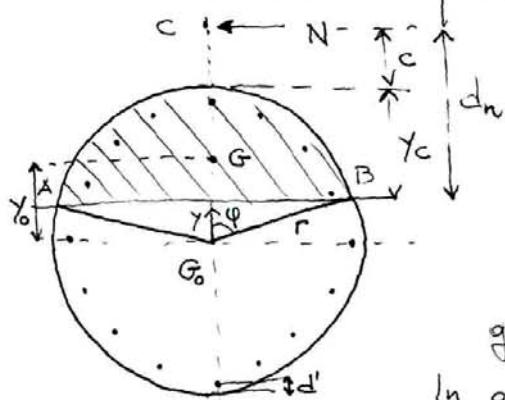
$$\frac{\sigma_c}{Y_c} I_n = N \cdot Y_p$$

$I_{ns} = 0$ — asse neutro e di
sollecitazione
conjugati

combinando le prime due si ottiene:

$S_n \cdot Y_p - I_n = 0$ che è la nota equazione per calcolare
la posizione dell'asse neutro.

Quest'equazione prescinde dalla forma della sezione. Un caso
di particolare interesse è quello della sezione circolare con
armatura distribuita a passo costante sul contorno



In tal caso l'equazione deve
la determinazione dell'asse
neutro presenta termini
piuttosto articolati in funzione
dei parametri che rappresentano la
geometria del problema.

In questa sede si svolgerà lo sviluppo

relativo al termine S_n , dando solo il risultato relativo ad

I_n e lasciando lo sviluppo di quest'ultimo per esercizio.

Come noto il momento statico dell'armatura può essere calcolato
nota la posizione delle armature.

(1)

Posto un sistema di riferimento in G_0 , si ha per le sole armature

$$S_n^{(s)} = \sum_{i=1}^{n_s} A_{s,i} (y_{s,i} - (r - y_c))$$

il problema principale risulta il calcolo del momento statico della sezione di calcestruzzo reagente, che teoricamente si può valutare dal prodotto tra l'area di calcestruzzo reagente e la distanza del baricentro di quest'ultima dall'asse neutro:

$$S_n^{(c)} = A_r^{(c)} \cdot (y_o - (r - y_c))$$

Il calcolo di $A_r^{(c)}$ si può effettuare sottraendo all'area del settore circolare G_0AB , l'area del trisegolo avente gli stessi estremi:

$$A_r^{(c)} = (A_{sc}) - (A_{tr}) =$$

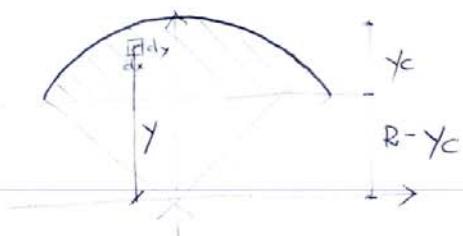
$\frac{1}{2} \pi r^2 \varphi$ $\frac{1}{2} r^2 \cos \varphi \sin \varphi$

$$= \frac{r^2 (\varphi - \cos \varphi \sin \varphi)}{2}$$

Si passa, quindi, al calcolo di y_o , per il quale bisogna calcolare ... il momento statico della parte reagente rispetto all'asse orizzontale passante per G_0 .

L'integrale da risolvere è il seguente:

$$\int_{R-y_c}^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} y \, dx \, dy$$



infatti l'equazione della circonferenza centrata nell'origine degli assi è

$$x^2 + y^2 = R^2$$

(2)

da cui fissato un certo valore della y , che varia tra $R-y_c$ ed R , è possibile salutare gli estremi di variazione della variabile " x :

$$x^2 = R^2 - y^2 \rightarrow -\sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2}$$

da cui l'integrale indicato che risotto prima rispetto alla x fornisce:

$$\begin{aligned} & \int_{R-y_c}^R 2y \sqrt{R^2 - y^2} dy = - \int_{R-y_c}^R \sqrt{R^2 - y^2} d(R^2 - y^2) = \\ &= - \left(\frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2} \right) \Big|_{R-y_c}^R = + \frac{2}{3} \left(R^2 - (R-y_c)^2 \right)^{3/2} = \\ &= \frac{2}{3} \left(R^2 - R^2 + 2Ry_c - y_c^2 \right)^{3/2} = \quad \text{essendo} \\ & \quad y_c = R(1 - \cos \varphi) \\ & \quad \text{si ottiene:} \\ &= \frac{2}{3} \left(2R^2(1 - \cos \varphi) - R^2(1 - \cos \varphi)^2 \right)^{3/2} = \\ &= \frac{2}{3} \left(2R^2 - 2R^2 \cos^2 \varphi - R^2 + 2R^2 \cos \varphi - R^2 \cos^2 \varphi \right) = \\ &= \frac{2}{3} \left(R^2 - R^2 \cos^2 \varphi \right)^{3/2} = \frac{2}{3} (R^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \varphi \end{aligned}$$

Per calcolare la posizione del baricentro questa quantità va divisa per l'area della sezione tangente

(3)

$$y_0 = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin^3 \varphi}{R^2 (\varphi - \cos \varphi \sin \varphi)}$$

moltiplicando e dividendo
per 2; e ricordando
che:
 $\sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi$

$$\boxed{y_0 = \frac{4}{3} \frac{R \sin^3 \varphi}{2\varphi - \sin 2\varphi}}$$

Il momento statico complesso sarà allora:

$$S_n = A_r^{(c)} \cdot (y_0 - R \cos \varphi) + n A_s R \cos \varphi$$

Molto più complessa
la valutazione del momento
d'inerzia rispetto all'asse
nietro.

Lo studente semplifichi che risulta:

$$I_n = 2R^4 \left[\frac{1}{8} \left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) + \cos^2 \varphi \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) - 2 \cos \varphi \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right] + n A_s \left[\frac{(r-d)^2}{2} + (r \cos \varphi)^2 \right]$$

Se l'armatura è
egualmente distribuita
lungo il perimetro essa si può
supporre concentrata nel
baricentro geometrico dell'
struttura.

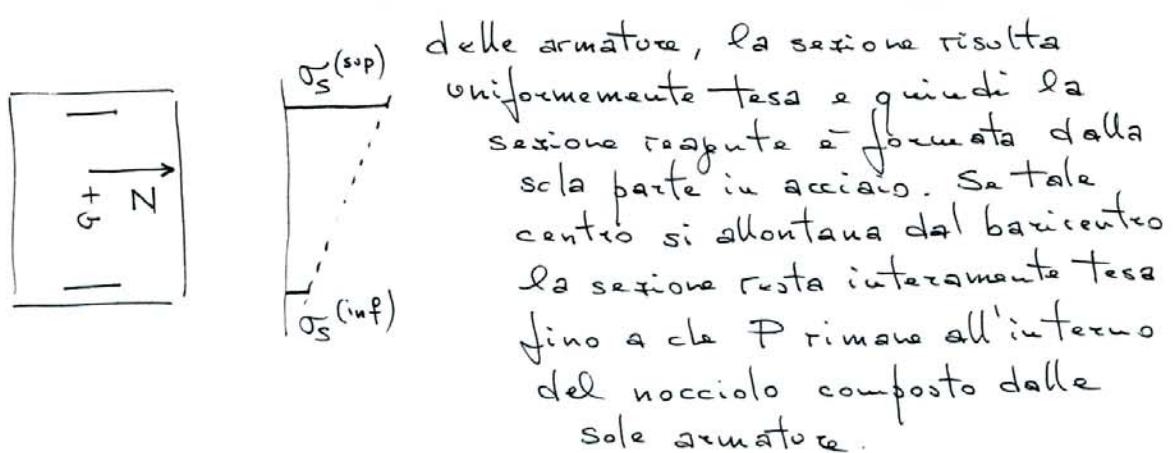
La procedura di ricerca dell'asse neutro farà quanto più
onerosa computazionalmente, segue la stessa logica del
più semplice caso di sezione rettangolare.

Tensile flexion in sections in c.e.

Nel caso in cui una forza di trazione eccentrica è applicata ad una sezione in c.e., si dice che essa è soggetta ad un regime di tensile flexion. Nel caso il centro di pressione è un punto di un asse di simmetria, allora la giacitura dell'asse neutro è nota e corrisponde alla perpendicolare all'asse di simmetria. In tale eventualità si parlerà di stato di sollecitazione di "tensile flexion retta". Così come per la pressoflessione è opportuno distinguere il caso in cui l'asse neutro è esterno alla sezione (piccola eccentricità) dal caso in cui il medesimo asse è interno (grande eccentricità).

- Caso di piccola eccentricità

Quando il centro di sollecitazione coincide con il baricentro delle armature, la sezione risulta



uniformemente tesa e quindi la sezione risulta composta dalla sola parte in acciaio. Se tale centro si allontana dal baricentro la sezione resta interamente tesa fino a che P rimane all'interno del nocciolo composto dalle sole armature.

L'equazione che stabilisce l'autodolarità rispetto all'ellisse centrale d'inerzia tra il centro di sollecitazione e l'asse neutro è la stessa che in pressoflessione:

$$\frac{X \cdot x_p}{I_x^2} + \frac{Y \cdot y_p}{I_y^2} + 1 = 0$$

Si intende far notare che in questa equazione quando si cerca il nocciolo centrale d'inerzia si fa un assunzione all'origine neutro tutte le posizioni tangenti al bordo della sezione e si ricavano le coppie (x_p, y_p) corrispondenti, il cui luogo geometrico rappresenta l'ellisse centrale d'inerzia. Per fare un esempio nel caso di sezione simmetrica

Ti solta:

$$\left| \frac{x_p}{x_0} \right| + \left| \frac{y_p}{y_0} \right| = 1 \quad \text{eq. del nocciolo}$$

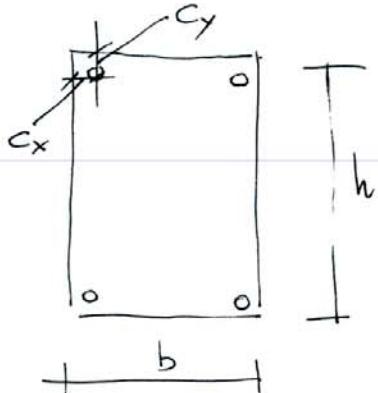
$$\text{con } x_0 = 2 \frac{T_x^2}{b} \quad y_0 = 2 \frac{T_y^2}{h}$$

Rispetto al caso della prenella si cambiano i punti x_0, y_0 in virtù del diverso valore dei raggi d'inerzia.

Essendo reperibile solo l'acciaio, infatti, ti solta:

$$T_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^m A_{si} x_i^2}{\sum_{i=1}^m A_{si}} \quad T_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^m A_{si} y_i^2}{\sum_{i=1}^m A_{si}}$$

Ora se l'armatura è disposta a distanza c_x dai bordi verticali e c_y da quelli orizzontali (si pensi ad un'armatura nei 4 spigoli), è ovvio che:



$$T_x = \frac{b}{2} - c_x \quad T_y = \frac{h}{2} - c_y$$

Per calcolare l'ampiezza del nocciolo, basta sostituire queste in x_0 e y_0

$$x_0 = \frac{2}{b} \left(\frac{b}{2} - c_x \right)^2 \quad y_0 = \frac{2}{h} \left(\frac{h}{2} - c_y \right)^2$$

(6)

da cui:

$$x_0 = \frac{2}{b} \left(\frac{b^2}{4} - b c_x + c_x^2 \right) \cong \frac{b}{2} - 2 c_x$$

$$y_0 = \frac{2}{h} \left(\frac{h^2}{4} - h c_y + c_y^2 \right) \cong \frac{h}{2} - 2 c_y$$

il che equivale a dire che i punti di uccello si trovano ad una distanza dall'armatura pari a quella che l'armatura presenta dal bordo della sezione. Se la forza di trazione è contenuta all'interno

a quella che l'armatura presenta dal bordo della sezione. Se la forza di trazione è contenuta all'interno

di quest'area, non esiste il problema di trovare l'area neutra poiché si sa a priori che tutta la sezione è reagente. Per calcolare la tensione nelle armature basterà utilizzare

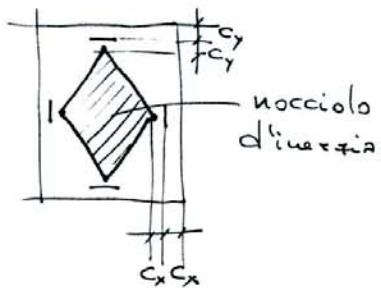
$$\sigma_s = \frac{N}{A_s} + \frac{N x_p x}{I_y^{(s)}} + \frac{N y_p}{I_x^{(s)}} \cdot y$$

dove A_s , $I_y^{(s)}$, $I_x^{(s)}$ sono l'area, il momento d'inerzia rispetto all'asse y , il momento d'inerzia rispetto all'asse "x" dello sole armature.

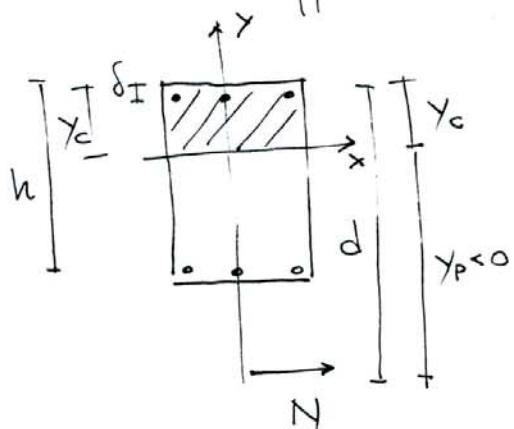
- Caso di grande eccentricità

Lo scopo del ragionamento che faremo ora è quello di provare ad utilizzare le equazioni già note dal caso di presoflessione a grande eccentricità. Partendo dal caso limite si supponga di fissare un momento $M=N \cdot e$, nel caso in cui $e \rightarrow \infty$ e $N \rightarrow 0$ siamo in pura flessione.

(7)



Questo ragionamento è equivalentemente valido sia che $N \rightarrow 0^+$ (compressione) sia che $N \rightarrow 0^-$ (trazione). Ora volendo cambiare N e mantenere costante il momento, se per un valore di N positivo si ha una certa eccentricità, per lo stesso valore di N negativo si avrà un'eccentricità esattamente opposta. Si comprende, quindi, come nel caso



di trazione di grande eccentricità il bordo della sezione maggiormente compresso è quello più distante dalla forza. Scrivendo l'equilibrio alla rotazione della sezione intorno all'asse neutro, e quella

di equilibrio alla traslazione in ottieno:

$$\int_{A_T} \sigma dA_T + \sum_{i=1}^{n_s} A_{s,i} \sigma_{s,i} = N$$

$$\int_{A_T} \sigma y_h dA_T + \sum_{i=1}^{n_s} A_{s,i} \sigma_{s,i} y_{h,i} = N \cdot y_p$$

con N negativo. Esse conducono a:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_c}{y_c} S_n = N \\ \frac{\sigma_c}{y_c} I_n = N \cdot y_p \end{cases}$$

da cui la nota:

$$S_n \cdot y_p - I_n = 0 \quad (\text{rispetto alla pressoflessione})$$

(cambia solo $y_p = y_c - d$)

Al solito le tensioni possono essere calcolate con:

$$\sigma_c = \frac{N}{S_n} y \quad e \quad \sigma_{s,i} = \frac{n N}{S_n} (y_c - d_i) \quad \begin{matrix} \text{in cui } N \\ \text{è negativa} \end{matrix}$$

(8)