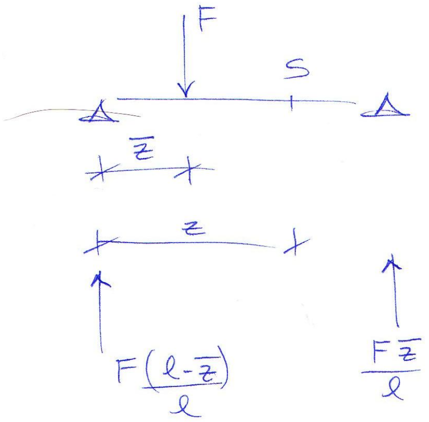
Esercitazione : Linee d'influenza, introduzione e tracciamento per i sistemi isostatici

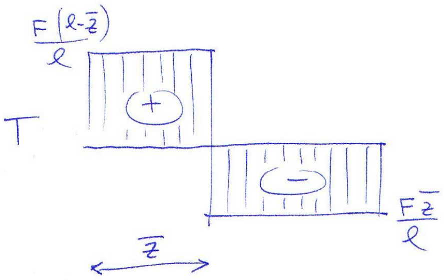
Una delle caratteristiche peculiari dell'analisi delle strutture da ponte, è la presenza tra i carichi da considerare di enti viaggianti, ovvero di azioni che occupano in istanti successivi tutte le posizioni possibili relativamente alla parte di struttura che rappresenta il piano viario. Da un punto di vista teorico tale situazione comporterebbe la necessità di analizzare infinite condizioni di carico, ognuna caratterizzata da una posizione differente per l'ipotetico "treno" di carichi mobili. Tuttavia c'è da sottolineare che delle infinite informazioni che si potrebbero potenzialmente ottenere da tale analisi, in ambito progettuale interessano solo quelle che forniscono sezione per sezione il massimo effetto sia in termini di forze interne (sollecitazioni) che di deformata (spostamenti e rotazioni).

Il concetto di linea d'influenza nasce proprio da quest'ultima considerazione, in particolare con riferimento ad una generica sezione S, individuata da una ascissa (anche curvilinea) z, si definisce linea di influenza di un generico effetto (spostamento o sollecitazione) il diagramma che riporta, in opportuna scala, in ogni sezione il valore dell'effetto in S se l'ente viaggiante si venisse a trovare in quella specifica sezione.

Per capire meglio questa idea si consideri un esempio molto semplice, quello di trave appoggiata-appoggiata caricata da una forza verticale, e si faccia riferimento alla sollecitazione di taglio:



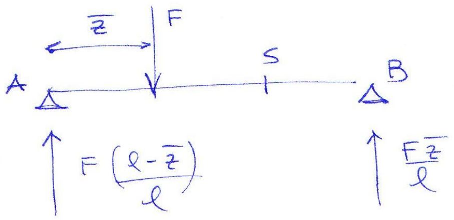
Il valore di tale sollecitazione dipenderà in generale dalla sezione rispetto alla quale la stiamo calcolando (z) e dalla posizione dell'ente sollecitante F ($\bar{z}$). Nel caso specifico esso varrà:



$$T = \begin{cases} \dfrac{F(\ell-\bar{z})}{\ell} & \text{se } z<\bar{z} \\[2ex] -\dfrac{F\bar{z}}{\ell} & \text{se } z>\bar{z} \end{cases}$$

Questa modalità di analisi è quella a cui si è maggiormente abituati, e cioè si tiene fissa la posizione della forza e si modifica la sezione rispetto cui si analizza l'effetto. In altri termini nella funzione $T(z, \bar{z})$, si considera fisso $\bar{z}$ e si guarda a come cambia tale funzione al variare di z.

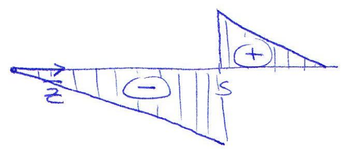
Il tracciamento delle linee d'influenza impone una inversione di questo punto di vista, la domanda da porsi è, infatti, come varia $T(z, \bar{z})$ se a



restare fissa è z (sezione in cui calcolare l'effetto) e a variare è $\bar{z}$ (posizione del carico)?

La legge di variazione non si modifica, ma va interpretata considerando $\bar{z}$ come variabile:

$$T(\bar{z}) = \begin{cases} F\dfrac{(l-\bar{z})}{l} & \text{se } \bar{z} > z \\[2ex] -\dfrac{F\bar{z}}{l} & \text{se } \bar{z} < z \end{cases} \implies$$



Per cui i diagrammi sono lineari in $\bar{z}$ ed esprimono il seguente ragionamento: il taglio in S è rappresentato dalla reazione dell'appoggio B se $\bar{z} < z$, mentre lo è da quella in A per $\bar{z} > z$. Tuttavia i valori delle reazioni dipendono essi stessi dalla posizione della forza F (cioè da $\bar{z}$) in maniera lineare, il che spiega l'andamento della linea d'influenza in questo semplice caso.

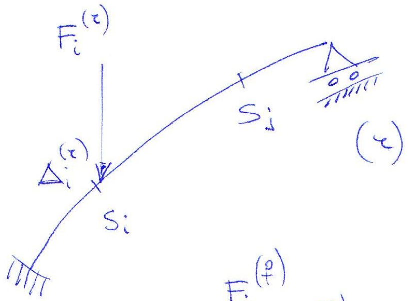
Questo tipo di approccio alla soluzione del problema, che prevede il tracciamento mediante definizione delle leggi di variazione della linea d'influenza, viene definito con il termine di <u>metodo diretto</u>. Il lettore si renderà conto come già per strutture appena più complicate di quella analizzata, tale metodo risulti inapplicabile per le difficoltà analitiche ad esso connesse. Bisogna dunque cercare altre strade.

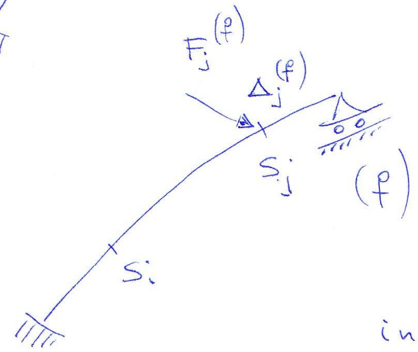
Una possibilità potrebbe essere quella di tracciare le linee d'influenza per punti, ovvero valutare la caratteristica di sollecitazione o l'ente spostamento a cui si è interessati per un numero discreto di posizioni dell'ente viaggiante. Tale metodo, tuttavia, può essere considerato utile nell'ambito delle applicazioni di calcolo automatico ovvero solo nel caso si intenda avere una prima idea sull'aspetto che assume l'andamento della linea d'influenza.

Differentemente nel seguito si farà sempre riferimento al cosiddetto <u>metodo di scambio</u>, il quale sfrutta il teorema di Betti generalizzato per ottenere le linee d'influenza come "particolari" diagrammi di spostamento e di caratteristica.

Lasciando la trattazione del teorema di Betti generalizzato al corso di teoria, ci si limita a riassumerne le conclusioni nell'ambito delle sue applicazioni al tracciamento delle linee di influenza.

Dati due schemi, che indicheremo con (r), reale, ed (f), fittizio, si indicheranno con $F^{(r)}$ e $\Delta^{(r)}$ le azioni esterne, forze e distorsioni, sullo schema reale, e con $\delta^{(r)}$ e $C^{(r)}$ rispettivamente gli effetti in termini di spostamento e di sollecitazione che le azioni esterne determinano. Al pedice di tali simboli è generalmente indicata la sezione rispetto alla quale le azioni e gli effetti sono considerati.





Stessa notazione è possibile utilizzare per lo schema (f), con riferimento ad una sezione generica: S_j.

Con riferimento a tali sistemi il teorema di Betti generalizzato consente di scrivere:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^{(r)} \delta_i^{(f)} + \sum_{j=1}^{m} C_j^{(r)} \cdot \Delta_j^{(f)} = \sum_{j=1}^{m} F_j^{(f)} \delta_j^{(r)} + \sum_{i=1}^{n} C_i^{(f)} \cdot \Delta_i^{(r)}$$

in cui gli indici "i" e "j" fanno riferimento alle sezioni rispetto alle quali sono presenti, rispettivamente negli schemi (r) ed (f), azioni esterne, sia forze che distorsioni.

Volendo sintetizzare il teorema di Betti generalizzato asserisce che "dati 2 sistemi risultano uguali i lavori mutui che gli enti forza dell'uno compiono per gli enti spostamento dell'altro".

L'applicazione di tale asserto al tracciamento delle linee di influenza è semplificato dal fatto che, a seconda dei casi, si farà sempre riferimento ad un unico ente "azione esterna", quindi o ad un'unica forza o ad un'unica distorsione, per cui ai nostri fini applicativi, la relazione finale può essere scritta come:

$$\text{(*)} \quad F^{(r)} \cdot \delta^{(f)} + C^{(r)} \cdot \Delta^{(f)} = F^{(f)} \cdot \delta^{(r)} + C^{(f)} \cdot \Delta^{(r)}$$

In particolare $F^{(r)} = 1$ e $\Delta^{(r)} = 1$ saranno gli enti viaggianti sulla struttura reale, $\delta^{(r)}$ e $C^{(r)}$ saranno gli effetti sulla struttura reale per la quale si intende ricercare la linea d'influenza. I termini $F^{(f)}$, $\Delta^{(f)}$, $\delta^{(f)}$ e $C^{(f)}$ hanno analogo significato sullo schema fittizio, essi non hanno alcun collegamento con lo schema reale, ma vengono scelti in maniera opportuna per poter sfruttare la (*) ai fini del tracciamento della linea d'influenza voluta

Si possono distinguere così 4 casi di interesse

(1) Ente viaggiante forza $F^{(r)} = 1$

linea d'influenza di una caratteristica : $C^{(r)}$

La (*) si scrive allora:

$$\underbrace{\cancel{F^{(r)}}}_{1} \cdot \delta^{(f)} + C^{(r)} \cdot \Delta^{(f)} = 0 \qquad \text{da cui}$$

$$C^{(r)} = - \frac{\delta^{(f)}}{\Delta^{(f)}}$$

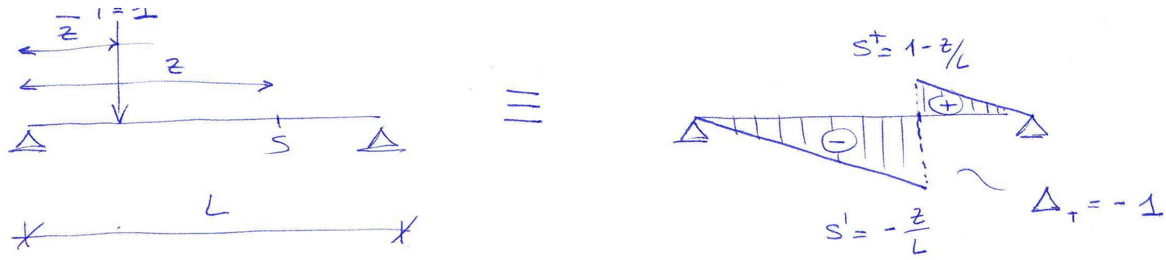
se nello schema fittizio si assegna $\Delta^{(f)} = -1$ si ha:

$$C^{(r)} = \delta^{(f)}$$

che si traduce come segue:

"La linea d'influenza di una caratteristica per forza unitaria viaggiante coincide con il diagramma degli spostamenti, duale alla forza, quando viene applicata nella sezione S una distorsione unitaria e negativa duale alla sollecitazione da calcolare".

A fini esplicativi torniamo al caso analizzato precedentemente con il metodo diretto. Esso infatti rientra nel caso (1) illustrato, dunque "la linea d'influenza del taglio per forza verticale viaggiante, sara' uguale al diagramma degli spostamenti quando in S è applicato uno scorrimento concentrato unitario e negativo" (7)



Si fa notare che gli spostamenti a sinistra e destra di S possono essere facilmente calcolati, imponendo che la loro differenza deve essere -1 e che non ci deve essere rotazione relativa (la distorsione riguarda solo lo scorrimento verticale)

$$\begin{cases} s^- - s^+ = -1 \\ -\dfrac{s^-}{z} = \dfrac{s^+}{L-z} \end{cases}$$

da cui si ricavano i valori indicati nella figura in alto a destra.

Si noti come il metodo di scambio fornisca la medesima linea d'influenza del metodo diretto (per $F=1$).

Gli altri 3 casi rilevanti sono i seguenti:

2) Ente viaggiante forza: $F^{(r)} = 1$

linea d'influenza di uno spostamento $\delta^{(r)}$

$$\underset{1}{\cancel{F^{(r)}}} \cdot \delta^{(f)} + \cancel{C^{(r)} \cdot \Delta^{(f)}} = F^{(f)} \cdot \delta^{(r)} + \cancel{C^{(f)} \cdot \Delta^{(r)}}$$

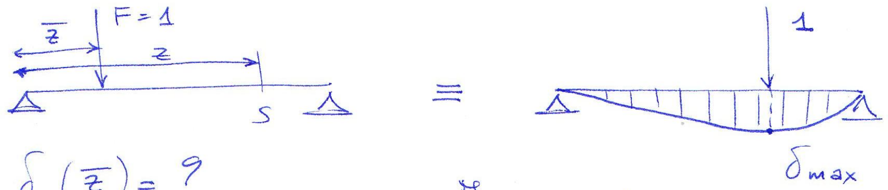
da cui:

$$\delta^{(r)} = \frac{\delta^{(f)}}{F^{(f)}} \qquad \text{posto } F^{(f)} = 1 \qquad \delta^{(r)} = \delta^{(f)}$$

"La linea d'influenza di uno spostamento per forza viaggiante, è data dal diagramma degli spostamenti duali alla forza viaggiante quando sulla struttura è applicata in S una forza duale allo spostamento di cui si vuole la linea d'influenza"

Si faccia attenzione che se la forza viaggiante e gli spostamenti per cui calcolare la linea d'influenza non hanno la stessa direzione, sullo schema fittizio gli spostamenti da calcolare non sono gli stessi di quelli sullo schema reale.

Esempio



$\delta_v(\bar{z}) = ?$

In questo caso per calcolare il valore massimo della linea d'influenza e in generale il suo andamento, bisognerà far uso dell'equazione della linea elastica.

3) Ente viaggiante: $\Delta^{(r)} = 1$ distorsione

linea d'influenza di una caratteristica $C^{(r)}$

$$\cancel{F^{(r)}\cdot\delta^{(f)}} + C^{(r)}\cdot\Delta^{(f)} = \cancel{F^{(f)}\cdot\delta^{(r)}} + C^{(f)}\cdot\cancel{\Delta^{(r)}}\,1$$

$$C^{(r)} = \frac{C^{(f)}}{\Delta^{(f)}} \longrightarrow \text{si pone unitario}$$

"La linea d'influenza di una caratteristica per distorsione viaggiante, è data dal diagramma della caratteristica duale alla distorsione viaggiante, quando sulla struttura è applicata in S una distorsione positiva e unitaria duale alla caratteristica di cui si vuole la linea d'influenza".

Anche qui come prima, la linea d'influenza di un momento può essere corrispondente al diagramma di un'altra sollecitazione sullo schema fittizio: $C^{(f)}$ infatti è legata all'ente agente, cioè alla distorsione viaggiante e non alla linea d'influenza da calcolare.

Esempio

$M^{(r)} = ?$ $\qquad\qquad$ $T^{(f)} = 0$

In questo caso il metodo di scambio fornisce un risultato banale. Essendo la struttura isostatica l'applicazione di una qualsiasi distorsione concentrata non fa nascere alcuna sollecitazione (questo vale anche nello schema fittizio), per cui la linea d'influenza è banalmente identicamente nulla.

4) Ente viaggiante distorsione : $\Delta^{(r)} = 1$

linea d'influenza di uno spostamento: $\delta^{(r)}$

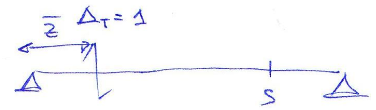
$$F^{(r)} \cancel{\cdot \delta^{(f)}} + C^{(r)} \cancel{\cdot \Delta^{(f)}} = F^{(f)} \cdot \delta^{(r)} + C^{(f)} \cdot \cancel{\Delta^{(r)}}\, 1$$

$$\delta^{(r)} = - \frac{C^{(f)}}{F^{(f)}} \rightarrow \text{si pone pari a } -1$$

$$\delta^{(r)} = C^{(f)}$$

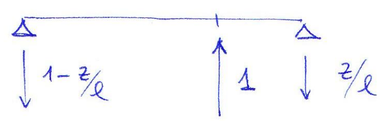
"La linea d'influenza di uno spostamento per distorsione viaggiante, è data dal diagramma ~~degli spostame~~ delle sollecitazioni duali alla distorsione viaggiante, quando sulla struttura è applicata in S una forza negativa e unitaria duale allo spostamento di cui si vuole la linea d'influenza."

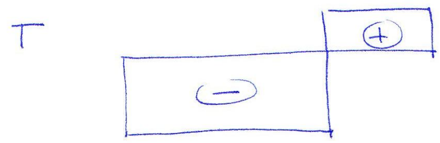
Esempio



$\delta_v^{(r)} = ?$

$\equiv$





Si noti che lo spostamento verticale in S dipende solo da se la distorsione si trova prima o dopo la sezione. Lo studente rifletta su questo risultato

I 4 casi applicativi analizzati si riferiscono in generale a qualsiasi tipo di sistema strutturale.
Nel caso di un sistema isostatico, essi possono essere specializzati come segue:

Caso 1) : L'applicazione di una distorsione unitaria determina una deformata rigida del sistema, per cui il calcolo dell'andamento degli spostamenti risulta immediato.

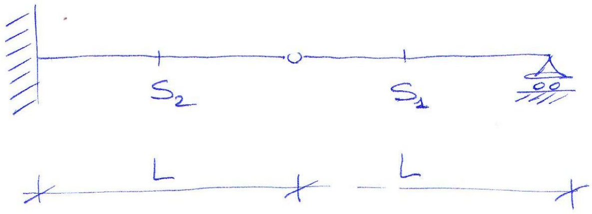
Caso 2) : L'applicazione di una forza unitaria determina una deformata che per essere analiticamente individuata necessita dello sviluppo dell'equazione della linea elastica (spesso per più di un tratto).
Si tratta del caso analiticamente più laborioso.

Caso 3) : L'applicazione di una distorsione unitaria non determina nascita di sollecitazioni per cui la linea d'influenza è sempre identicamente nulla

Caso 4) : L'applicazione di una forza unitaria determina diagrammi di sollecitazione che si trovano risolvendo il problema statico

Esempio

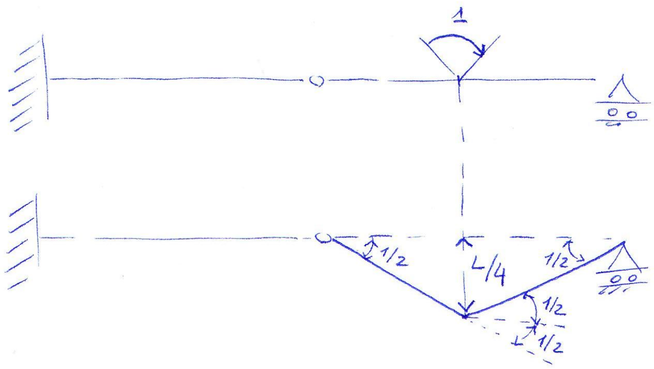
Data la seguente struttura isostatica:



Valutare la linea d'influenza della sollecitazione flettente per carico verticale viaggiante, nelle sezioni di mezzeria delle due aste, S_1 ed S_2.

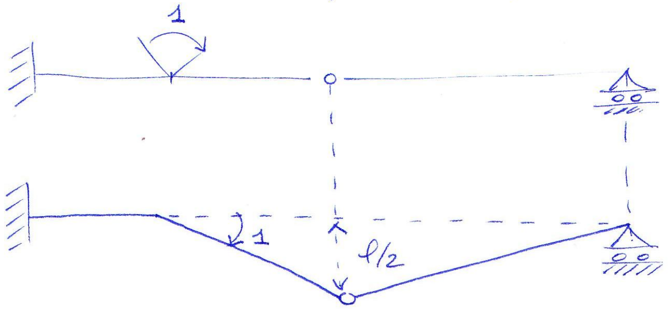
Siamo nel caso 1), la linea d'influenza coinciderà con l'andamento degli spostamenti per una distorsione angolare negativa unitaria applicata rispettivamente in S_1 ed S_2

1) Linea d'influenza per la sezione S_1



La linea d'influenza, come si poteva prevedere, riguarda solo il 2° tratto.
In altre parole ciò significa che si avranno momenti nella sezione S_1 solo se la forza è applicata nel secondo tratto, ed il valore massimo si avrà esattamente quando la forza unitaria è nella sezione di mezzeria

2) Linea d'influenza per la sezione S_2

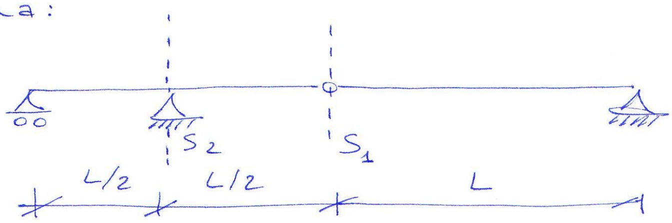


Per la sezione S_2, la linea d'influenza ha il suo massimo quando la forza è sulla cerniera centrale, infatti se essa è applicata sul 2° tratto, partecipa anche quest'ultimo all'assorbimento della sollecitazione flettente.

<u>Esercizi</u>

1 - Si risolva per la stessa struttura, la linea d'influenza degli spostamenti verticali per S_1 ed S_2

2 - Per lo schema:



si valuti la linea d'influenza del taglio nelle sezioni S_1 ed S_2 per carico verticale viaggiante e per coppia viaggiante.