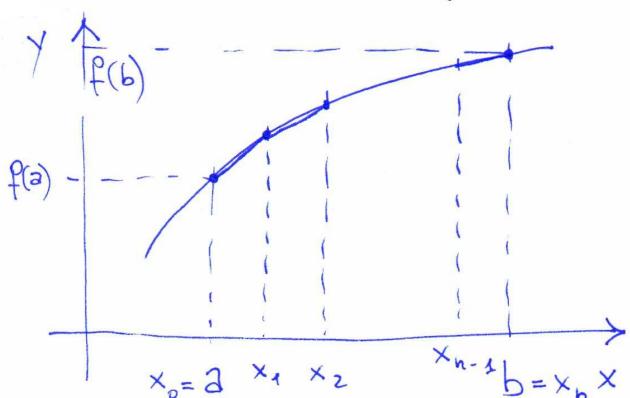


## lunghezza di una curva

Il concetto di integrale nell'ambito delle pratiche applicazioni consente, come già visto, di salutare il valore dell'area di una porzione di piano i cui limiti siano definiti mediante espressioni analitiche del tipo  $y = f(x)$ . La potenza di tale strumento, tuttavia, non si limita alla sola societàata applicazione, esso può essere utilizzato anche per il calcolo della lunghezza di un tratto finito di curva descritto anche da una funzione  $y = f(x)$ .

Si consideri, dunque, una funzione, così come



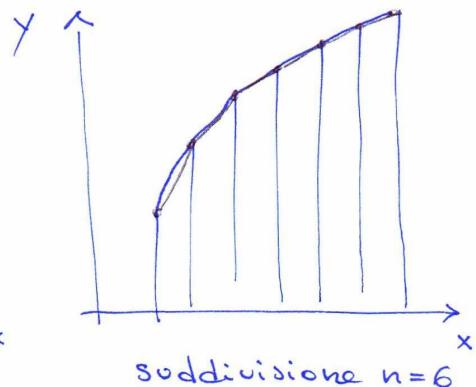
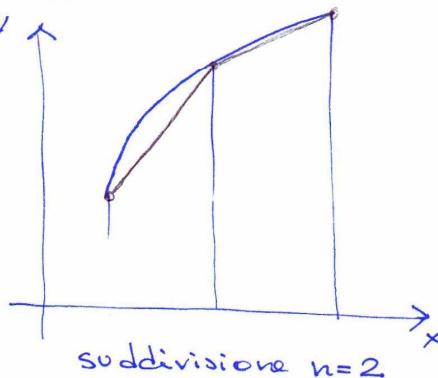
rappresentata a lato e si intenda calcolare la lunghezza della curva tra i punti  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ .

Si effettui una suddivisione dell'intervallo  $[a,b]$  in maniera analoga a come fatto quando si è presentato il concetto di integrale definito:

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

Unendo i punti ottenuti lungo la curva si ottiene una spezzata. E' facile capire, finora di tutto, che maggiori sono i punti della suddivisione più la spezzata approssima in maniera conforme

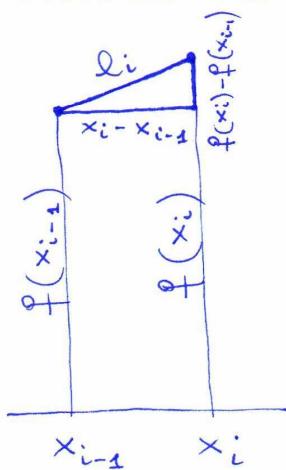
la curva,  
al limite se  
il numero di  
suddivisioni, "n",  
tendesse a



infinito, la spezzata coinciderebbe con la curva,  
e ciò sarebbe anche vero lunghezza.

Dunque concettualmente il percorso da compiere è semplice : si calcola la lunghezza della spezzata e poi si sviluppa il limite dell'espressione ottenuta per  $n \rightarrow \infty$ .

Consideriamo dunque il singolo tratto della spezzata come a lato rappresentato, la lunghezza del tratto di spezzata " $l_i$ " può essere valutato con il teorema di Pitagora:



$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

(2)

Ora se la funzione "f" risulta essere continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $\mathbb{I}[a, b]$ , ipotesi generalmente vera per le curve regolari, allora nel generico tratto  $[x_{i-1}, x_i]$  puo' applicarsi il teorema di Lagrange, che ci garantisce l'esistenza di un punto  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tale che risulti:

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i) \quad \text{che puo' anche} \\ \text{scriversi:}$$

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

sostituendo nell'espressione per il calcolo di " $l_i$ :

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})]^2}$$

Mettendo in evidenza e portando fuori dalla radice, la differenza tra le ascisse, si ha:

$$l_i = (x_i - x_{i-1}) \cdot \sqrt{1 + f'^2(c_i)}$$

Ora per calcolare la lunghezza dell'intera spezzata bastera' sommare i diversi tratti della spezzata:

$$l_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sqrt{1 + f'^2(c_i)}$$

Si intende sottolineare che il termine sotto a dice che è diverso per ogni addendo della sommatoria poiché cambia il punto " $c_i$ " che si trova in intervalli diversi.

A questo punto c'è solo da fare il passaggio al limite e chiedersi cosa accade per  $n \rightarrow \infty$ .

Prima di tutto la differenza  $(x_i - x_{i-1})$  tenderà a zero, divenendo nella pratica un trattino infinitesimo lungo l'asse delle " $x$ ", ovvero un " $dx$ ".

Essendo, inoltre, l'intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$  ridottosi ad un punto, " $c_i$ " dovrà corrispondere con tale punto, cioè  $f'(c_i) = f'(x)$ . Infine la sommatoria di infiniti termini piccolissimi (infinitesimi) è proprio l'idea di integrale definito che conosciamo. Dunque si conclude che:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n l_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sqrt{1 + f'^2(c_i)} = \\ = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Questa rappresenta l'espressione per il calcolo della lunghezza di una curva descritta dalla funzione  $f(x)$  tra gli estremi  $x=a$  e  $x=b$

### Esempio

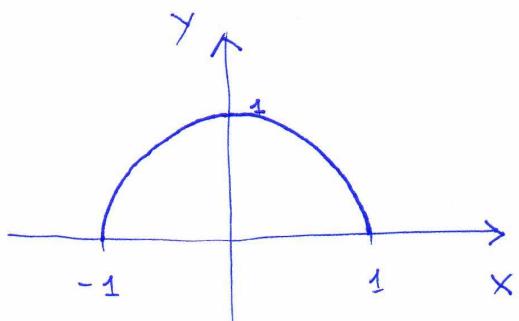
Si calcoli la lunghezza della curva  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  per  $a = -1$  e  $b = 1$

Svolgiamo la derivata  $f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

da cui:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[ \arcsin(x) \right]_{-1}^1 \\ &= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \end{aligned}$$

Infatti se proviamo a disegnare la funzione in oggetto ci si rende conto che trattasi di una semicirconferenza di raggio  $r=1$ ,



la lunghezza di una semicirconferenza è

$$L = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$$

essendo nel nostro caso  $r=1$  otteniamo il risultato fornito dall'integrale.

(5)